

微分積分学 AB 講義ノート (抜粋)

このプリントについて. このノートは微分積分学 AB の講義ノートにおける, 定義や定理, 講義で説明しなかった定理の証明などを抜き出したものである. 定義や定理の意味, 理解すべき証明はここでは述べていないため, このノートのみで勉強をするのは不十分である. 各自, ノートや参考文献等を元にして, 自分用のノートを作成して欲しい. なお, 記述の間違い等あることに注意すること.

第 1 章

実数と数列の極限

1.1. イントロダクション -円周率を求めてみよう-

定義 1.1 (円周率).

すべての円について, 円周率 π を

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める.

注意 1.1.

どの円についても, $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい.

注意 1.2.

$A = B$ は「 A と B が等しい」と「 A を B で定める」の二つの意味がある. この違いを明確にするため,

$A = B$ A と B が等しい.

$A := B$ A を B で定める.

と書きわけることにする.

定理 1.1 (Archimedes).

すべての自然数 n に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{2}{S_n} + \frac{2}{s_n}$$
$$s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n$$

が成り立つ.

例 1.1.

$n = 2$ のとき, s_2, S_2 を求める.

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2}{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{6}} \\ &= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310 \end{aligned}$$

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} = \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

1.2. 実数の構成

1.2.1. 集合論の基礎. 詳細は [Mzn] を参照せよ.

例 1.2 (よく使う集合).

次の集合はどの教科書, 専門書でも標準的に使われる.

- \mathbb{N} : 自然数全体の集合
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{Q} : 有理数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合
- \emptyset : 元が一つもない集合 (空集合という)

例 1.3.

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{9}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

例 1.4.

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の記号を用いる.

- (1) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: 开区間という
- (2) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: 閉区間という.

例 1.5.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ となる.

1.2.2. Dedekind の切断. 詳細は小平 [Kod] を見よ.

定義 1.2 (有理数の切断).

\mathbb{Q} の部分集合 A, B が有理数の切断であるとは, 次の 4 条件をみたすことをいう.

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. すべての $a \in A, b \in B$ に対して $a < b$.
4. A に最大値はない. すなわち, すべての $a \in A$ に対して, $a' \in A$ が存在して, $a < a'$ が成り立つ.

このとき, $\langle A, B \rangle$ と書くことにする.

例 1.6.

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}, B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$ とすると, $\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_1 に最小値 $\frac{1}{2}$ がある.

例 1.7.

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0 \text{ または } a^2 < 2\}, B_2 := \{b \in \mathbb{Q} : b > 0 \text{ かつ } b^2 \geq 2\}$ とすると, $\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, B_2 に最小値はない.

定義 1.3 (実数).

有理数の切断を実数という. 実数全体のなる集合を \mathbb{R} で表す.

定義 1.4 (順序関係).

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数の切断を用いて $x = \langle A, B \rangle, y = \langle A', B' \rangle$ と書く.

$x = y$ であるとは, $A = A'$ が成り立つことをいう.

$x \leq y$ であるとは, $A \subset A'$ が成り立つことをいう.

$x < y$ であるとは, 「 $x \leq y$ かつ $x \neq y$ 」 が成り立つことをいう.

定理 1.2 (有理数の稠密性).

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

例 1.8.

$x := \sqrt{2}, y := \sqrt{3}$ とするとき, $q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば, $x < q < y$ とできる. 定理 1.2 は, この場合では, y が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければ, いつでも $q \in \mathbb{Q}$ をみつけて $x < q < y$ とすることができることを主張している.

定理 1.2 の証明.

1. $x, y \in \mathbb{R}$ が $x < y$ をみたすとし, x, y は有理数ではないとする. 有理数の切断を用いて, $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書くと, $A \subset A'$ かつ $A \neq A'$ が成り立つ. 従って

$$A' \setminus A := \{a \in \mathbb{Q} : a \in A' \text{ かつ } a \notin A\}$$

は空集合ではないから, $q \in A' \setminus A$ を一つ選ぶことができる. このとき, $x < q < y$ が成り立つことを示せばよい. q に対する有理数の切断を $\langle A'', B'' \rangle$ と書くと

$$A'' := \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}, \quad B'' := \{b \in \mathbb{Q} : q \leq b\}$$

となる.

2. $x < q$ を示す. すべての $a \in A$ に対して, $a \in A''$ を示せばよい. このとき, $q \notin A$ だったから, $q \in B$ であり, 有理数の切断の定義から, $a < q$ が成り立つ. 従って $a \in A''$ となる.

3. $q < y$ を背理法で示す. $q \geq y$ を仮定すると, $q \neq y$ より, $q > y$ だから, $A' \subset A''$ が成り立つ. $q \in A'$ より $q \in A''$ となり, A'' の定義から $q < q$ となることから矛盾が生じる.

4. x, y がどちらも有理数でないときを考える. x, y がともに有理数のときは, $q = \frac{x+y}{2}$ とすればよい. x が有理数で y が無理数のとき, $\frac{x+y}{2}$ は無理数となるので, $\frac{x+y}{2} < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ を選べば, $x < q < y$ となる. x が無理数で y が有理数のときも同様に議論すればよい. \square

1.3. 実数の性質と上限. 下限

定義 1.5 (有界).

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A が上に有界であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう. このときの M を A の上界という.

A が下に有界であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう. このときの m を A の下界という.

A が有界であるとは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう.

例 1.9.

$A := (0, 1)$ は有界である.

例 1.10.

$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない.

例 1.11.

$C := (-\infty, 3)$ は下に有界ではない.

定義 1.6.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上界の集合 A_u と下界の集合 A_l を

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$A_l := \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

と定める.

注意 1.3.

定義 1.6 の記号は一般的ではないので, 使うときは上界の集合, 下界の集合と明記すること.

例 1.12.

$A := [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ とするとき, A の上界の集合 A_u と下界の集合 A_l は

$$\begin{aligned} A_u &= \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0, 1) \text{ に対して } a \leq M\} \\ &= [1, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_l &= \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0, 1) \text{ に対して } a \geq m\} \\ &= (-\infty, 0] \end{aligned}$$

となる.

定義 1.7 (最大, 最小).

$A \subset \mathbb{R}$ に対して A の一番大きな数と一番小さな数をそれぞれ A の最大値, 最小値といい, $\max A$, $\min A$ と書く.

例 1.13.

$A := [0, 1)$ に対して, $\max A$ は存在しない. $\min A = 0$ となる.

定義 1.8 (上限, 下限).

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, A の上限 $\sup A$, 下限 $\inf A$ を, A の上界の集合 A_u , 下界の集合 A_l に対して

$$\sup A := \min A_u = \min\{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$

$$\inf A := \max A_l = \max\{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

により定義する.

定理 1.3 (実数の連続性).

上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は、実数の上限 $\sup A$ が存在する.

注意 1.4.

定理 1.3 の「実数」を「有理数」に取りかえると成立しない. つまり、定理 1.3 は実数と有理数の違いを表している.

定理 1.4 (Archimedes の原理).

すべての $\varepsilon > 0$ に対して、自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、 $\varepsilon N_0 > 1$ が成り立つ.

定理 1.3 の証明.

$A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とし、 A_u を A の上界の集合とする. $C := \mathbb{Q} \setminus A_u$, $D := \mathbb{Q} \cap A_u$ として、有理数の切断 $\alpha := \langle C, D \rangle$ を考える. 以下、 $\alpha = \min A_u$, すなわち $\alpha = \sup A$ となることを示す.

1. すべての $a \in A$ に対して、 $a \leq \alpha$ を示す. そのために、有理数の切断 $a = \langle A', B' \rangle$ を考える. $A' \subset C$ を示すために、背理法を用いて、 $q \in A'$ が存在して、 $q \notin C$ と仮定する. すると、 $q \in D$ より、 $q \in A_u$ となり、 $a \leq q$ がわかる. 他方、 $a = \langle A', B' \rangle$ だから $q < a$ となり矛盾となるから、 $A' \subset C$ がわかる. とくに、 $\alpha \in A_u$ がわかった.

2. $\alpha = \min A_u$ を示す. すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ を示す. $\alpha - \varepsilon < \alpha$ より、有理数の稠密性から、 $q \in \mathbb{Q}$ が存在して、 $\alpha - \varepsilon < q < \alpha$ とできる. 従って、 $q < \alpha$ から $q \in C$ となり $q \notin A_u$ だから $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ もわかる.

1., 2. より $\sup A$ が存在して、 $\alpha = \sup A$ となることがわかる. \square

定理 1.4 の証明.

背理法を用いて「ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\varepsilon_0 n \leq 1$ 」を仮定する. すると、 $A := \{\varepsilon_0 n : n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界となるから、定理 1.3(実数の連続性)により、 $\alpha := \sup A$ が存在する. 従って、 $\alpha - \varepsilon_0$ は上界ではないから、「ある $\alpha_0 \in A$ が存在して、 $\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_0$ 」とできる. よって、 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha_0 = \varepsilon_0 n_0$ とできるが、

$$(1.1) \quad \alpha - \varepsilon_0 < \alpha_0 = \varepsilon_0 n_0$$

だから

$$(1.2) \quad \alpha < \varepsilon_0(n_0 + 1)$$

となる. $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ より $\varepsilon_0(n_0 + 1) \in A$ となり、(1.2) から $\alpha = \sup A$ となることに矛盾していることがわかる.

\square

例 1.14.

$A := [0, 1)$ に対して, $\sup A = 1$ となる.

注意 1.5.

存在をしめすことは「成り立つものを見つける」と同じことである. 例 1.14 の証明では, $1 - \varepsilon < a_0$ となる $a_0 \in A$ をみつければよい. $a_0 \in A$ より $0 \leq a_0 < 1$ をみたして, $1 - \varepsilon < a_0$ となるものを見つければよい.

注意 1.6.

例 1.14 の証明で, $a_0 := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とすると $\varepsilon > 0$ が大きいときに $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ になってしまうことがある. すると, $a_0 \notin A$ になってしまうので, これを防ぐために, $a_0 := \max\{1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ としてある.

1.4. 数列の極限

1.4.1. 数列の極限と基本的な性質.

定義 1.9 (数列の極限 (ε - N 論法)).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとは「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon]$ が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$ となる. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$ とか

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く.

例 1.15.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ が成り立つ.}$$

例 1.16.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 0 \text{ が成り立つ.}$$

注意 1.7.

例 1.15, 例 1.16 の証明で, $N_0 \in \mathbb{N}$ をみつける計算については, 実は証明では書かなくてもよい. しかし, 微分積分学や解析学における「評価する」という観点では非常に重要な部分である.

例 1.17.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ.

証明.

1. 定義の $N_0 \in \mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_0 \in \mathbb{N}$ をあとで決める. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

とできる. そこで, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $N_0 \geq N_1$ かつ $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n} (|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &\leq \frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n} (\varepsilon(n - N_1 + 1)) \\ &\leq \frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) + \varepsilon \end{aligned}$$

となる. よって, $\frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) < \varepsilon$ となるように $N_0 \in \mathbb{N}$ を選べば

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &\leq \frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

となる. この評価をもとにして, 厳密な証明を書く.

2. $\varepsilon > 0$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1.3) \quad n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる. 次に, $N_0 \in \mathbb{N}$ を $N_0 \geq N_1$ かつ

$$(1.4) \quad \frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにとる (厳密には Archimedes の原理). このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n} (|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &\leq \frac{1}{N_0} (|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|) \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon}{2} (n - N_1 + 1) \right) \quad (\because n \geq N_1 \text{ と (1.3)}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\because n \geq N_0 \text{ と (1.4)}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となる. 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ が成り立つ. □

定義 1.10 (数列の発散).

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は発散するという.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (正の) 無限大に発散するとは「任意の実数 $M \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n > M$] が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \implies a_n > M$$

となる. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ とか

$$a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書くことがある.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が負の無限大に発散するとは「任意の実数 $m \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n < -m$] が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \implies a_n < -m$$

となる. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ とか

$$a_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書くことがある.

注意 1.8.

定義 1.10 の M, m は実数全体でとらずに, $M > 0, m > 0$ におきかえてもよい.

定理 1.5.

数列 $\{a_n\}_{n=1}, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ について, 次が成り立つ.

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 収束先はただ一つしかない. つまり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ならば, $a = b$ が成り立つ.
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.
- (3) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}_{n=1}, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ がそれぞれ a, b に収束するならば, $a \leq b$ が成り立つ.

証明.

(1) のみ証明する. 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a - b)$ とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ よりある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}n \geq N_1 &\implies |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a - b) \\n \geq N_2 &\implies |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)\end{aligned}$$

が成り立つ. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a - b)$ だから $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a - b)$ となるので

$$(1.5) \quad a_{N_0} > \frac{1}{2}(a + b)$$

が成り立つ. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|a_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a - b)$ だから $a_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a - b)$ となるので,

$$(1.6) \quad a_{N_0} < \frac{1}{2}8a + b$$

が成り立つ. 従って, (1.5), (1.6) より

$$\frac{1}{2}(a + b) < a_{N_0} < \frac{1}{2}(a + b)$$

となり矛盾する. $a < b$ の場合も同様にできるので, 各自確かめよ. □

注意 1.9.

定理 1.5 の (3) の不等号 \leq を $<$ にかえることはできない.

定理 1.6.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 次が成り立つ.

- (1) $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ($n \rightarrow \infty$).
- (2) $a_n - b_n \rightarrow a - b$ ($n \rightarrow \infty$).
- (3) $a_n b_n \rightarrow ab$ ($n \rightarrow \infty$).
- (4) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0, b \neq 0$ ならば $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($n \rightarrow \infty$).

注意 1.10.

定理 1.6 の証明の 1. の議論は書く必要のない考察部分である. そのため, 教科書にも書いていない. しかし, 証明を自分で書けるようにするには, この 1. の部分を理解する必要がある. 教科書を自分で読むときには, この 1. の部分を考えるとより深く勉強できる.

定理 1.7 (はさみうちの原理).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ をみたすとする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ をみたすならば, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ が成り立つ.

1.4.2. 単調数列.

定義 1.11 (単調増加, 単調減少).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調増加であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことをいう. 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) 単調減少であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq b_{n+1}$ が成り立つことをいう.

定理 1.8.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界かつ単調増加であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ に収束する. すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ が成り立つ.

例 1.18.

数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおき, 自然対数の底という.

1.4.3. コンパクト性定理.

定義 1.12 (部分列).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜き出した数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

例 1.19.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n$ において, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき.

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \dots\} = \{-1, -1, -1, -1, \dots\}$$

や

$$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \dots\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である.

定理 1.9 (Bolzano-Weierstrass).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする. このとき, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する.

定義 1.13 (集積点).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a \in \mathbb{R}$ が集積点であるとは, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ となることである.

定義 1.14 (上極限, 下極限).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ と下極限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right) \end{aligned}$$

で定義する.

定理 1.10 (集積点と上極限, 下極限).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ はそれぞれ最大, 最小の集積点となる.

定理 1.11.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である.

1.4.4. Cauchy 列と実数の完備性.

定義 1.15 (Cauchy 列).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとは、「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $[n, m \geq N_0$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon]$ が成り立つ」ことをいう.

定理 1.12 (実数の完備性).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと、Cauchy 列であることは同値である.

注意 1.11.

Borzano-Weierstrass の定理は実数の完備性に関する定理 1.12 を用いずに証明することができる.

注意 1.12.

実数の完備性は実数の連続性から証明した. そして、注意 1.4 にもあるように、実数の連続性は実数と有理数の違いを表していることに注意した. 実は、実数と有理数の違いは次にあげる 4 つの性質であり、さらにそれらの 4 つの性質はすべて同値であることが知られている. すなわち、どれを実数と有理数の違いとしてもよいことが知られている.

- (1) 定理 1.3(実数の連続性)
- (2) 定理 1.8(単調数列の収束性)
- (3) 定理 1.9(Borzano-Weierstrass)
- (4) 定理 1.12 と定理 1.4(実数の完備性と Archimedes の原理)

1.4.5. 漸化式と極限.

例 1.20.

漸化式 $s_1 = 6, S_1 = 4\sqrt{3}$,

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{2}{S_n} + \frac{2}{s_n}$$
$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n$$

で定められる $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

注意 1.13.

例 1.20 の数列の収束先が円周率に等しいことを示すのは別の(難しい)問題である.

例 1.21.

$r, q, x \in \mathbb{R}, r \neq \pm 1$ に対して

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ a_0 = x \end{cases}$$

で定められる $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0 \leq |r| < 1$ のときに収束する.

定理 1.13 (縮小写像の原理).

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, ある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}|$$

をみたすとする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である.

注意 1.14.

例 1.21 は直接漸化式を解いて極限を求めてもよい. なぜ, このような面倒な方法をとるのかというと, もっと複雑な (非線形問題)

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

に対して, 一般項 a_n が求められなくても, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか調べられるからである.

第 2 章

関数と関数の極限

2.1. いろいろな関数

2.1.1. 関数とは何か.

定義 2.1 (関数).

集合 X に対して, f が X 上の関数であるとは, 「すべての $x \in X$ に対して, 実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ がただ一つ定まる規則」のことをいう. このとき $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と書く.

例 2.1 (指数関数).

\mathbb{R} 上の関数 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める.

例 2.2 (三角関数).

\sin, \cos は \mathbb{R} 上の関数である. 単位円を用いて, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$ と $\cos x$ を定めるのであった. また, $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ を, すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$ に対して

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定めるのであった.

注意 2.1.

例 2.1, 2.2 は厳密な定義ではない.

2.1.2. 逆関数.

定義 2.2 (像).

集合 X と $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, f の像 $f(X)$ を

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

で定義する.

注意 2.2.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ の像とは, あらっぽくいえば, $y = f(x)$ としたときの y の範囲のこと.

定義 2.3 (単射).

集合 X 上の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が単射であるとは「すべての $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 」となることをいう.

注意 2.3.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が単射というのは, 対偶を取れば

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから, 異なる二点の行き先は常に違うということ.

例 2.3 (対数関数).

\exp は単射であり,

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから, \exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる. これを対数関数といい, $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と書くのであった.

$$\log(\exp(x)) = \log(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\exp(\log(y)) = e^{\log y} = y \quad (y \in (0, \infty))$$

であったことに注意せよ.

例 2.4 (逆三角関数).

\sin は \mathbb{R} 上で単射でないため, 逆関数を作るためには (定義域に) 制限をかける必要がある. \sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上で単射な関数になり,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1]$$

となるので, \sin の逆関数は $[-1, 1]$ 上で定義できる. これを逆正弦関数といい, $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ と書く.

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\sin(\arcsin(y)) = y \quad (y \in [-1, 1])$$

となるが,

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x \quad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること (\mathbb{R} にかえてはいけない). 同様にして, 逆余弦関数 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, 逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義することができる.

2.1.3. 指数法則.

定理 2.1 (指数法則).

次の指数法則が成り立つ.

- (1) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x e^y = e^{x+y}$
- (2) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

系 2.1.

すべての $a, b > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)^x = a^x b^x$ となる.

2.1.4. 複素関数への拡張.

定理 2.2 (Euler の公式).

すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

系 2.2.

すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

が成り立つ.

定理 2.3 (加法定理).

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

が成り立つ.

2.2. 関数の極限

定義 2.4 (関数の極限).

开区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

f が $x \rightarrow x_0$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば

$|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このとき $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ とか $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$) と書く。論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる。

f が $x \rightarrow x_0$ のときに ∞ に発散するとは、「任意の $K > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > K$ 」が成り立つことをいう。このとき $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ とか $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_0$) と書く。論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K$$

となる。

f が $x \rightarrow x_0$ のときに $-\infty$ に発散するとは、「任意の $K > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) < -K$ 」が成り立つことをいう。このとき $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ とか $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_0$) と書く。論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -K$$

となる。

例 2.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

例 2.6.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

定理 2.4.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ となることは「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \setminus \{x_0\}$ に対して¹, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $f(x_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) となること」と同値である。

定理 2.5.

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ とする。

¹すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ となるということ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
 (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$

定理 2.6 (Cauchy の判定条件).

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ が収束することは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, x' \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ かつ $0 < |x' - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ 」 が成り立つことと同値である.

例 2.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

定義 2.5 (片側極限).

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

f が $x \rightarrow x_0 + 0$ (または $x \downarrow x_0$) のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < x - x_0 < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ 」 が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ とか $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0 + 0$) と書く ($x \rightarrow x_0 + 0$ のかわりに $x \downarrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

f が $x \rightarrow x_0 - 0$ (または $x \uparrow x_0$) のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < x_0 - x < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ 」 が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ とか $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0 - 0$) と書く ($x \rightarrow x_0 - 0$ のかわりに $x \uparrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して} \\ 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

定義 2.6 (無限大での極限).

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

f が $x \rightarrow \infty$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x > K$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ 」

が成り立つことをいう。このとき $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ とか $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$ と書く。論理記号で書くと

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $x > K \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ となる。

f が $x \rightarrow -\infty$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは、「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $K > 0$ が存在して、すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x < -K$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ 」が成り立つことをいう。このとき $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ とか $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$ と書く。論理記号で書くと

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists K > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $x < -K \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ となる。

注意 2.4.

無限大に発散する場合にも同様にして定義ができる。各自定義を書いてみよ。

2.3. 連続関数

2.3.1. 連続関数.

定義 2.7 (関数の連続).

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

f が $x_0 \in I$ で連続であるとは、「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、すべての $x \in I$ に対して $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 」が成り立つことをいう。論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して} \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる。

f が I 上連続であるとは、「任意の $x_0 \in I$ に対して、 f は x_0 で連続」が成り立つことをいう。論理記号でしっかり書くと

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して} \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる。 x_0 が δ より先に決まることに注意せよ。

命題 2.1.

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ とする。このとき、 f が x_0 で連続であることと $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことは同値である。

証明.

1. f が x_0 で連続であると仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, f が x_0 で連続であることより, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I$ に対して

$$(2.1) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

とできる. すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば (2.1) より $|x - x_0| < \delta$ だから $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる. よって, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ となる.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ を仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ より, ある $\delta > 0$ に対して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して

$$(2.2) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

とできる. すべての $x \in I$ に対して $|x - x_0| < \delta$ と仮定する. $|x - x_0| = 0$ なら $x = x_0$ より $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ となる. $|x - x_0| \neq 0$ なら $0 < |x - x_0| < \delta$ より (2.2) から $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる. 以上により $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となるので, f は x_0 で連続となる. \square

例 2.8.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. このとき, f は $x = 2$ で連続となる.

注意 2.5.

例 2.8 について, 証明を書くだけなら講義ノートの 2. のみでよいが, δ をどうとったかがわかるように 1. も書いておくとよい.

例 2.9.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

で定義する. f は $x = 0$ で連続, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ では不連続となる.

注意 2.6.

例 2.9 はグラフで書くことが難しいので, ε - δ 論法を使わないと, 証明するのは困難である.

例 2.9 の証明.

1. f が $x = 0$ で連続となることを示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta := \min\{\varepsilon, 1\}$ とおく. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $|x| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |f(x) - 0| \\ &= |f(x)| \\ &\leq |x| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

となる. 実際, $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $|f(x)| = |x|$ となる. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のときは $f(x) = 0$ より $|f(x)| = 0 \leq |x|$ となる. 従って, f は $x = 0$ で連続となる.

2. f が $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ で不連続となることを示す.

$\varepsilon := \frac{|x_0|}{2}$ とおく. すべての $\delta > 0$ に対して $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \mathbb{Q}$ をひとつとると, $|x - x_0| < \delta$ かつ

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |0 - f(x_0)| \\ &= |x_0| > \frac{|x_0|}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので, f は x_0 で連続にならない. □

2.3.2. 連続関数の性質.

定義 2.8 (関数の和とスカラー倍).

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき関数の和 $f+g : I \rightarrow \mathbb{R}$, スカラー倍 $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}$, 積 $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \end{aligned}$$

で定義する.

定義 2.9 (関数の合成).

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする. このとき関数の合成 $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

で定義する.

定理 2.7.

簡単のため $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

- (1) f, g が $x \in \mathbb{R}$ で連続ならば, すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f+g$, λf , fg も x で連続である.

(2) f, g が \mathbb{R} 上連続ならば, $g \circ f$ も \mathbb{R} 上連続である.

2.4. 閉区間上の連続関数

2.4.1. 中間値の定理.

定理 2.8 (中間値の定理).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続で $f(a) < f(b)$ ならば「任意の $c \in [f(a), f(b)]$ に対して, ある $x_0 \in [a, b]$ が存在して $f(x_0) = c$ 」が成り立つ.

例 2.10.

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続で, 「すべての $x \in [0, 1]$ に対して, $0 \leq f(x) \leq 1$ 」が成り立つとする. このとき, 方程式 $x = f(x)$ は $[0, 1]$ 上に解を持つ.

注意 2.7.

$I = [a, b]$ が閉区間でないと, 証明で困るところは, $x_0 \in I$ となるかどうか? である. 开区間でも似た定理は作れるが, 証明がかなり複雑になる.

2.4.2. Weierstrass の定理.

定理 2.9 (Weierstrass の定理).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば関数 f の最大値, 最小値が存在する. すなわち,

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

が成り立つ.

2.4.3. 一様連続性.

例 2.11.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^2$ で定めると f は \mathbb{R} 上連続となる. $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続となることを ε - δ 論法で証明するとき, $\delta > 0$ の取り方は x_0 の取り方によって異なる.

例 2.12.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x$ で定めたとき, f は \mathbb{R} 上連続となる. $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, f が x_0 で連続となることを ε - δ 論法で証明するとき, $\delta > 0$ の取り方は x_0 の取り方によらない.

定義 2.10 (一様連続).

$I \subset \mathbb{R}$ に対して $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が I 上一様連続であるとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に

対して, $\delta > 0$ が存在して, すべての $x, x' \in I$ に対して, $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成り立つことをいう. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, x' \in I \text{ に対して} \\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

となる.

例 2.13.

例 2.12 の関数 f は \mathbb{R} 上一様連続となる.

注意 2.8.

一様連続の定義の $\delta > 0$ をみつけるためには, 例 2.12 の計算が必要である.

定理 2.10.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上連続ならば, f は $[a, b]$ 上一様連続である.

注意 2.9.

定理 2.10 は閉区間であることが重要である. 开区間では成り立たない.

注意 2.10.

定理 2.10 は連続関数のグラフから決まる面積が定められることを示すのに使う (後期でやる).

第 3 章

高校の微分積分

3.1. 微分とその応用

3.1.1. 曲線と微分積分.

例 3.1.

$r, \omega > 0$ に対して,

$$x(t) := r \cos(\omega t), \quad y(t) := r \sin(\omega t) \quad t > 0$$

により定まる点 $P(x(t), y(t))$ は半径 r の円周上を動く. このとき, $P(x(t), y(t))$ の時刻 t における速度ベクトル, 速さ, 加速度ベクトルはそれぞれ

$$\vec{v}(t) = (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t)),$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega,$$

$$\alpha(t) = (-r\omega^2 \cos(\omega t), -r\omega^2 \sin(\omega t))$$

となる.

3.1.2. Taylor-Maclaurin 展開.

例 3.2.

e^x に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

となる.

例 3.3.

$\cos x$ に対して

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

となる.

例 3.4.

$\log(1+x)$ に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

となる.

定理 3.1 (Taylor-Maclaurin 展開).

無限回微分可能な $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{x^k} \left(f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right) \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

が成り立つ.

例 3.5.

Taylor-Maclaurin 展開を用いると

$$\frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

がわかる.

3.1.3. 凸関数と不等式.

例 3.6.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定めると, f は凸関数である.

定理 3.2.

無限回微分可能な関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次は同値である.

- (1) f が凸関数.
- (2) すべての $x, y \in I$ と $0 < \lambda < 1$ に対して,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

例 3.7 (相加, 相乗平均と Young の不等式).

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると, f は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

と Young の不等式

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q$$

が示せる. ただし, $1 < p < \infty$ は定数で, $\frac{1}{q} := 1 - \frac{1}{p}$ で定数 q を定めるものとする.

例 3.8.

$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := x^3$ で定めると, f は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して,

$$(x + y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$$

を示せる.

3.2. 積分とその応用

3.2.1. 区分解積分法とその応用.

例 3.9.

$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ を微分を用いずに求める.

例 3.10.

連続関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は, すべての $x \in [0, 1]$ に対して, $f(x) \geq 0$ をみたすとする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた部分を x 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$$

で求めることができる.

例 3.11.

連続関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は, すべての $x \in [0, 1]$ に対して, $f(x) \geq 0$ をみたすとする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた部分を y 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) \, dx$$

で求めることができる.

3.2.2. 曲線の長さ.

例 3.12.

$r > 0$ に対して

$$x(t) = r \cos(2\pi t), \quad y(t) = r \sin(2\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

で表示された曲線 $C(x(t), y(t))$ は半径 r の円を表す. このとき, 曲線 C の長さ l は

$$x'(t) = -2\pi r \sin(2\pi t), \quad y'(t) = 2\pi r \cos(2\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

だから

$$l = \int_0^1 \sqrt{(-2\pi r \sin(2\pi t))^2 + (2\pi r \cos(2\pi t))^2} dt = 2\pi r$$

がわかる.

注意 3.1.

微分積分学 A で紹介した通り, $\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ であった. しかし, 例 3.12 をみれば, 円周の長さを求めるのに, π を用いているのでわかっていない値 π で円周の長さを求めるという, 意味のないことをしていることがわかる.

この問題を素朴に解決するには角度 θ をどのように定めるか? が鍵となる. 詳しくは小平 [Kod] を参考にせよ.

第 4 章

Riemann 積分

この講義における Riemann 積分の理論展開は、吹田・新保 [SuiShi] とは異なる。笠原 [Kas], 小池 [Koi], 小林 [Kob] を参照せよ。

4.1. Riemann 積分の定義

定義 4.1 (分割).

$\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ を $[a, b]$ の分割という。

定義 4.2 (Riemann 積分).

有界な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ にたいして

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) (x_k - x_{k-1}) : \right.$$

$$\left. \Delta = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ は } [a, b] \text{ の分割} \right\},$$

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) (x_k - x_{k-1}) : \right.$$

$$\left. \Delta = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ は } [a, b] \text{ の分割} \right\}$$

とおき、**Riemann 下積分**, **Riemann 上積分**という。 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$ のとき、 f は $[a, b]$ 上 **Riemann 積分可能**であるといい、

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

と定める。

定義 4.3 (分割の長さ).

$[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して

$$|\Delta| := \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$$

を分割 Δ の長さという.

定理 4.1 (Darboux).

有界な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $[a, b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}),$$

$$\int_a^b f(x) dx + \varepsilon > \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

とできる.

系 4.1 (区分求積法).

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が **Riemann** 積分可能ならば

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

が成り立つ.

定理 4.1 の証明.

$M := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ とおく. 記号の簡略化のため, $[a, b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して

$$s_{\Delta}(f) := \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

とおく.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある分割 $\Delta_{\varepsilon} = \{y_0, \dots, y_m\} \subset [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < s_{\Delta_{\varepsilon}}(f)$$

とできる. $d := \min_{k=1,\dots,n} y_k - y_{k-1}$ として, $\delta := \min\{d, \frac{\varepsilon}{2mM}\}$ とおく.

2. $[a, b]$ 上の任意の分割 Δ に対して,

$$\int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon < s_{\Delta_\varepsilon}(f)$$

を示す. そのために,

$$s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

を示す.

3. 任意の $y_k \in \Delta_\varepsilon$ に対して, ある $z_l \in \Delta$ が存在して, $z_{l-1} \leq y_k \leq z_l$ とできる. $y \in \Delta_\varepsilon$ が $y \neq y_k$ ならば $|y_k - y| \geq d$ と $|z_l - z_{l-1}| < d$ より $z_{l-1} \leq y_k \leq z_l$ とはならない. つまり, 上でとれる $z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ によってすべて異なっている. さて $s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f)$ を考えると

$$\begin{aligned} & \left(\inf_{z_{l-1} \leq x \leq y_k} f(x)(y_k - z_{l-1}) \inf_{y_k \leq x \leq z_l} f(x)(z_l - y_k) \right) - \inf_{z_{l-1}} f(x)(z_l - z_{l-1}) \\ & \leq 2M(z_l - z_{l-1}) \leq 2M|\Delta| \end{aligned}$$

となるから, k について和を取ることによって ($z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ も用いることで)

$$s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f) \leq 2Mm|\Delta| < \varepsilon$$

が得られる.

4. 他方, 分割の定義より

$$s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) \geq s_{\Delta_\varepsilon}(f) > \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon$$

だから,

$$\begin{aligned} s_\Delta(f) &= s_\Delta(f) - s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) + s_{\Delta \cup \Delta_\varepsilon}(f) \\ &\geq -\varepsilon + \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon - \varepsilon \\ &= \int_a^b f(x) dx - 2\varepsilon - 2\varepsilon \end{aligned}$$

が得られる. Riemann 上積分についても同様の議論で得られる. □

注意 4.1.

区分求積法は f が Riemann 積分可能でないと成立しない.

定義 4.4 (振動量).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と $A \subset [a, b]$ に対して,

$$\operatorname{osc}_{x \in A} f(x) := \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

を A における f の振動量という.

命題 4.1.

有界な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a, b]$ の分割 Δ が存在して

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

とできるならば, f は Riemann 積分可能である.

証明.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定で取れる $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ をとると, Riemann 上積分, 下積分の定義より

$$\begin{aligned} 0 &< \int_a^{\bar{b}} f(x) dx - \int_a^{\underline{b}} f(x) dx \\ (4.1) \quad &\leq \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) (x_k - x_{k-1}) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる. (4.1) の左辺は ε に依らないので $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx - \int_a^{\underline{b}} f(x) dx = 0$$

がわかる. □

定理 4.2.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上連続ならば f は Riemann 積分可能である.

定理 4.3.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が有界で単調減少 (単調増加) ならば, f は Riemann 積分可能である.

証明.

$M := f(b) - f(a) > 0$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ を $\frac{M(b-a)}{N} < \varepsilon$ となるようにとる.

$$\Delta := \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{1}{N}(b-a), x_2 = a + \frac{2}{N}(b-a), \dots, \right. \\ \left. x_k = a + \frac{k}{N}(b-a), \dots, x_N = b \right\}$$

を $[a, b]$ の分割とすると, $|\Delta| = \frac{1}{N}(b-a)$ であり,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq |\Delta| \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = \frac{b-a}{N}(f(a) - f(b)) < \varepsilon$$

となるので, 命題 4.1 より f は Riemann 積分可能である. \square

例 4.1.

$\int_0^1 x \, dx$ を区区分求積法を用いて原始関数を用いずに (つまり, 微分の逆演算を計算することなく) 求める.

4.2. Riemann 積分の性質

定理 4.4 (区間加法性).

有界な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < c < b$ に対して, f が $[a, c]$, $[c, b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, f は $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

が成り立つ.

定義 4.5.

Riemann 積分可能な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$$

と定める.

定理 4.5 (区間加法性).

有界な関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, f が $[a, c]$, $[c, b]$ 上 Riemann

積分可能ならば, f は $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

が成り立つ.

定理 4.6 (積分の順序保存性).

有界な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能であり, すべての $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ.

定理 4.7 (積分の線形性).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha f + \beta g$ は積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ.

定理 4.8 (積分平均値定理).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) f が $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \lambda \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda(b - a)$$

が成り立つ.

- (2) f が $[a, b]$ 上連続ならば, $c \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

が成り立つ.

4.3. 不定積分

定義 4.6 (不定積分).

有界で Riemann 積分可能な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in [a, b]$ に対して

$$F(x) := \int_a^x f(\xi) d\xi$$

で定義する. この関数 F を f の不定積分という.

注意 4.2.

上端と下端のない積分記号 $\int f(x) dx$ は原始関数と呼ぶのが正しい.

定義 4.7 (原始関数).

関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

をすべての $x \in (a, b)$ でみたす関数 $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を f の原始関数といい

$F(x) = \int f(x) dx$ で表す.

注意 4.3.

定義 4.7 で, 極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ は F の x での微分である. つまり, $F'(x) = f(x)$ ということである.

定理 4.9.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界で Riemann 積分可能とする. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (x \in [a, b])$$

とすると, F は $[a, b]$ 上連続となる.

定理 4.10 (微分積分学の基本定理 その1).

連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (x \in [a, b])$$

とする. このとき, すべての $x \in (a, b)$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となる.

注意 4.4.

定理 4.10 は f が連続でないと成り立たない. 実際に $H : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$H(x) := \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

により定めると H は $x = 0$ で連続でない. $-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$\int_{-1}^x H(\xi) d\xi = - \int_{-1}^x d\xi = -1 - x$$

であり, $0 < x \leq 1$ のとき

$$\int_{-1}^x H(\xi) d\xi = - \int_{-1}^0 d\xi + \int_0^x H(\xi) d\xi = -1 + x$$

となるので,

$$\int_{-1}^x H(\xi) d\xi = -1 + |x|$$

である. 従って, H の不定積分は $x = 0$ で微分できないことがわかる.

第 5 章

微分

5.1. 微分とその性質

定義 5.1 (微分).

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ と $x_0 \in (a, b)$ に対して, f が $x = x_0$ で微分可能であるとは,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

が存在することである. このとき, $f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ と書き, f の x_0 における微分係数という.

f が (a, b) 上微分可能であるとは, すべての $x \in (a, b)$ に対して, f が x で微分可能であることをいう. このとき, $x \in (a, b)$ に対して

$$\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$$

と書く. このようにして定めた関数 $\frac{df}{dx} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を f の導関数という.

以下,

$$C(a, b) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ は } (a, b) \text{ 上連続}\}$$

$$C^1(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ は } (a, b) \text{ 上微分可能, } \frac{df}{dx} \text{ は } (a, b) \text{ 上連続} \right\}$$

と書くことにする.

5.1.1. 微分と接線.

定理 5.1.

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ と $x_0 \in (a, b)$ に対して, f が $x = x_0$ で微分可能であることと, 「ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$$

と書いたときに $R(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$)」は同値である. このとき, $\lambda = f'(x_0)$ となる.

系 5.1.

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が $x_0 \in (a, b)$ で微分可能ならば, x_0 で連続になる.

5.1.2. 微分の公式.

定理 5.2.

$f, g \in C^1(a, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(3) (積の微分公式) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

注意 5.1.

定理 5.2 の (1), (2) より, 微分は線形である.

定理 5.3 (合成関数の微分公式, chain rule).

$f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が \mathbb{R} 上微分可能ならば $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x)) \frac{df}{dx}(x)$$

が成り立つ.

注意 5.2.

定理 5.3 は $y = f(x)$, $z = g(y)$ と書くと, 形式的に

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

と書ける.

例 5.1.

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

定理 5.4 (逆関数の微分公式).

$f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ は全単射で微分可能であるとする. $x_0 \in (a, b)$ にたいして $f'(x_0) \neq 0$ ならば $y_0 = f(x_0)$ としたときに, f の逆関数 f^{-1} は y_0 で微分可能であり,

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

となる.

注意 5.3.

定理 5.4 は $y = f(x)$ と書いたときに, 形式的に

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書ける.

注意 5.4.

f^{-1} が微分可能であることがわかれば, $f^{-1}(f(x)) = x$ となることに注意して両辺 x で微分すると, 合成関数の微分公式により

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

となるので, $\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ がわかる.

定理 5.5 (パラメータ微分).

$\phi, \psi \in C^1(a, b)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ とする. ϕ は狭義単調増加で $x_0 = \phi(t_0)$ とすると

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}$$

となる.

注意 5.5.

定理 5.5 は, 形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

と書ける.

5.2. 平均値定理

以下

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ は } [a, b] \text{ 上連続}\}$$

と書く.

定理 5.6 (Rolle の定理).

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ が $f(a) = f(b)$ ならば, ある $\xi \in (a, b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ が成り立つ.

定理 5.7 (微分平均値定理).

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ に対して, ある $\xi \in (a, b)$ が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

が成り立つ.

5.2.1. 微積分の基本定理.

定理 5.8 (微積分の基本定理 その2).

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a, b])$ に対して

$$\int_b^a f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

5.2.2. 平均値の定理の応用.

系 5.2.

$f \in C^1(a, b)$ に対して, 「 f が (a, b) 上単調増加」であることと「すべての $x \in (a, b)$ に対して $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$ 」は同値となる.

系 5.3.

$f \in C^1(a, b)$ に対して, 「 f が (a, b) 上定数関数, すなわち, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a, b)$ に対して $f(x) = c$ 」であることと「すべての $x \in (a, b)$ に対して $\frac{df}{dx}(x) = 0$ 」は同値となる.

5.2.3. 極大・極小.

定義 5.2 (極大・極小).

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ とする. f が $x = c$ で極大 (極小) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ に対して

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ならば } f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

が成り立つことをいう.

例 5.2.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (-\infty < x \leq -1) \\ -x & (-1 < x \leq 1) \\ x - 2 & (1 < x < \infty) \end{cases}$$

とおくと, f は $x = -1$ ($x = 1$) で極大 (極小) となる.

定理 5.9.

$f \in C^1(a, b)$, $c \in (a, b)$ に対し, f が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

定理 5.10 (極大・極小の判定).

$f \in C^1(a, b)$, $c \in (a, b)$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a, b)$ に対して

$$c - \delta < x < c \text{ ならば } f'(x) > 0$$

$$c < x < c + \delta \text{ ならば } f'(x) < 0$$

が成り立つとする. このとき, f は $x = c$ で極大となる.

f が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

5.2.4. 微分積分学の基本定理の応用.

定理 5.11.

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ かつ $\frac{df}{dx} \in C([a, b])$ のとき

$$f(b) - f(a) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a) dt \right) (b - a)$$

が成り立つ.

定理 5.12.

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ は $\frac{df}{dx}$ が (a, b) 上有界であるとする. このとき

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right| |b - a|$$

が成り立つ.

5.3. 高階導関数と Taylor の定理

定義 5.3.

$f \in C^1(a, b)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ が $x_0 \in (a, b)$ で微分可能なとき,

$$f''(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dx}(x_0 + h) - \frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく. $f''(x_0)$ を f の x_0 における第 2 次微分係数という. また, $\frac{df}{dx}$ が (a, b) 上微分可能なとき, $x \in (a, b)$ に対し

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := f''(x)$$

と書く. $\frac{d^2 f}{dx^2} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を f の 2 階導関数という.

3 次微分係数, 3 階導関数なども同様にして定義する. 以下, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^n(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ は } (a, b) \text{ 上 } n \text{ 回微分可能, } \frac{d^n f}{dx^n} \text{ は } (a, b) \text{ 上連続} \right\}$$

と書く.

例 5.3.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\frac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める.

定理 5.13 (Taylor の定理).

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a, b)$ は $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して $\frac{d^k f}{dx^k} \in C([a, b])$ をみたとする. このとき

$$f(b) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

と書いたときに, ある $a < \theta < b$ が存在して

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$$

が成り立つ.

注意 5.6.

定理 5.13 で $n = 1$ とすると, $a < \theta < b$ が存在して

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となるが, これは平均値の定理 (定理 5.7) である.

定理 5.14 (Taylor-Maclaurin 展開).

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(-1, 1)$, $x \in (-1, 1)$ に対して

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)x^n$$

と書くと $R_n(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) が成り立つ.

例 5.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \text{ となる.}$$

例 5.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} \text{ となる.}$$

5.4. de l'Hospital の定理

例 5.6.

$f, g \in C^1(-1, 1)$ が, $f(0) = g(0) = 0$ かつ $g'(0) \neq 0$ とする. このとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 5.15 (de l'Hospital の定理).

$a \in \mathbb{R}$ に対し, $f, g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ とする.

- (1) $f(x), g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) であり $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.
- (2) $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow a$) であり $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

標語的にいうと, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

例 5.7.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ となることを de l'Hospital の定理を用いて示す.

注意 5.7.

例 5.7 で

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない. de l'Hospital の定理は極限が不定形の際にしか使っては
いけない.

5.5. 凸関数

定義 5.4 (凸関数).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ 上凸関数であるとは, 任意の $x, y \in [a, b]$ と $0 < \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

が成り立つことをいう.

定理 5.16.

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ とする. このとき, f が $[a, b]$ 上凸関数であることと $\frac{df}{dx}$ が (a, b) 上単調増加であることは同値である.

系 5.4.

$f \in C^2(a, b)$ が $\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0$ をみたすならば, f は $[a, b]$ 上凸関数である.

例 5.8.

$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると, f は $(0, \infty)$ 上の凸関数である. この事実から, $1 < p, q < \infty$ に対して, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば, $a, b > 0$ に対して Young の不等式

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

が成り立つ.

第 6 章

広義積分

6.1. 広義積分と例

6.1.1. 非有界な関数の積分.

例 6.1.

$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0, 1])$$

で定義する. このときに $\int_0^1 f(x) dx$ をどう定めるのがよいだろうか?

定義 6.1 (広義積分).

$f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は $(a, b]$ 上連続とする. このとき,

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

で定義する. この積分 $\int_a^b f(x)$ は広義積分といい, 極限が存在するときは, $\int_a^b f(x)$ は収束するという. 極限が存在しないときは, $\int_a^b f(x)$ は発散するという.

例 6.2.

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ を求める.

例 6.3.

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ は発散する.

注意 6.1.

例 6.3 で正しそうに見える次の計算

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_{-1}^1 = \log |1| - \log |-1| = 0$$

や

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

は正しくないことに注意せよ.

6.1.2. 無限区間の積分.

例 6.4.

$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1, \infty))$$

で定義する. このときに $\int_1^{\infty} f(x) dx$ をどう定めるのがよいだろうか?

定義 6.2 (広義積分).

$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は $[a, \infty)$ 上連続とする. このとき,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

で定義する. この積分 $\int_a^{\infty} f(x)$ は広義積分といい, 極限が存在するときは, $\int_a^{\infty} f(x)$ は収束するという. 極限が存在しないときは, $\int_a^{\infty} f(x)$ は発散するという.

定理 6.1.

$\alpha > 0$ とすると, 次が成り立つ

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & (0 < \alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$
$$(2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \leq 1) \end{cases}$$

例 6.5.

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ は収束する.

注意 6.2.

実は

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることが知られている. この広義積分は偏差値など確率・統計, 偏微分方程式などいろいろなことに関係のある積分である.

6.2. 絶対収束と条件収束

例 6.6.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in [0, \infty)$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

とおく. このとき $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は収束するが, $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散する.

定義 6.3 (絶対収束, 条件収束).

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする.

- (1) $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ が収束するとき, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は絶対収束するという.
- (2) $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は収束するが, 絶対収束しないとき, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は条件収束するという.

定理 6.2.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ が絶対収束するならば, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は収束する.

定理 6.3.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする. $\lambda > 1$ に対して, $K > 0$ が存在して, すべての $x \in [0, \infty)$ に対して, $x^\lambda |f(x)| \leq K$ が成り立つと仮定する. このとき, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ が絶対収束する.

系 6.1.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする. ある $\lambda > 1$ に対して, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x)$ が存在するならば, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ は絶対収束する.

例 6.7.

$s > 0$ に対して, $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する (絶対収束する).

定義 6.4 (Γ -関数).

$s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

と定義する. $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を Γ -関数という.

命題 6.1.

Γ -関数について, 次が成り立つ.

- (1) $\Gamma(1) = 1$;
- (2) $s > 0$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

参考文献

- [Iid] 飯高 茂, 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方, 講談社, 1999.
- [Uch1] 内田 伏一, 集合と位相, 裳華房, 1986.
- [Uch2] 内田 伏一, 位相入門, 裳華房, 1997.
- [Kas] 笠原 皓司, 微分積分学, サイエンス社, 1974.
- [Kur] 黒田 成俊, 微分積分, 共立出版, 2002.
- [Koi] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.
- [Kod] 小平 邦彦, 軽装版 解析入門 I, 岩波書店, 2003.
- [Kob] 小林 昭七, 微分積分読本 1 変数, 裳華房, 2000.
- [SuiShi] 吹田 信之, 新保 経彦理工系の微分積分, 学術図書, 1996.
- [Sug] 杉浦 光夫, 解析入門 (1), 東京大学出版会, 1980.
- [Tak] 高木 貞治, 定本 解析概論, 岩波書店, 2010.
- [Mzn] 水野 将司, 数学入門 AB 集合論と論理学, 2014 年度講義ノート.
- [HaiWan1] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (上), 丸善, 2006.
- [HaiWan2] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (下), 丸善, 2006.
- [Ste] Ian Stewart, 芹沢 正三 (翻訳), 現代数学の考え方, 筑摩書房, 2012.