微分積分学B 中間試験問題

2015年11月19日 第1時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題1は全員が答えよ. 問題2, 問題3から1題以上, 問題4, 問題5から1題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $x(1+a)^x$ を微分せよ. ただし, $a>0$ は定数である.

(2) $\arctan x$ を微分せよ.

(3) $f(x)=\dfrac{5ex^3+2\pi x^2+3\sqrt{2}x-7}{\log_4 16+\log_6 36+\log_9 81}$ のとき, $f'(2)$ を求めよ.

(4) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ における接線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y=ax+b$ の形で書くこと.

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)\cos(-x)\,dx$ を計算せよ.

(6) $\dfrac{1}{1+x^2}$ の原始関数を一つ求めよ.

(7) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}(\log x+\arctan x)\,dx$ を計算せよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ.

(9) $f(x)=e^{2\sqrt{3}(\sin x+\cos x)^2}\cos 2x\quad\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とする. ただし, e は自然対数の底とする.

(a) $f'(0)$ を求めよ.

(b) 増減表を作り, 極値とそれを与える x の値を求めよ. なお, 変曲点は求めなくてよい.

(c) グラフの概形を書け. なお, グラフと y 軸との交点の座標がわかるように書くこと.

(d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$ を計算せよ.

(10) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ. なお**仮定**をきちんと書くこと.
(11) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能となるための十分条件を一つ述べよ. なお, **Riemann 上積分や Riemann 下積分を用いてはいけない.**
(12) $[0,1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の区間加法性とは何か？主張を述べよ.
(13) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.
(14) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ が $x=0$ で微分可能であることの定義を述べよ.
(15) $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ に対して, $F:(0,2)\to\mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べよ.
(16) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする. このとき, 微分平均値定理を述べよ.
(17) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ で, $x=0$ で極小となるが, $x=0$ で微分可能とならない例をあげよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の解答

(1) $(1+x\log(1+a))(1+a)^x$
(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$
(3) $\dfrac{60e+8\pi+3\sqrt{2}}{6}$
(4) $y=-2x+2\sqrt{2}$
(5) 0
(6) $\arctan x$
(7) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 3-\dfrac{1}{2}\log 2-\sqrt{3}+1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\pi$
(8) $\dfrac{\pi}{4}$
(9) (a) $4\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}}$

(b)

x	$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}e^{2\sqrt{3}+3}$	$\searrow$	0

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき, 極大値 $\dfrac{1}{2}e^{2\sqrt{3}+3}$ をとる.

(c) チェックすべきことは「滑らかであること」,「両端で 0 になっていて, 非負値になっていること」,「y 軸と $e^{2\sqrt{3}}$ で交わること」.

(d) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}(e^{4\sqrt{3}}-1)$

問題 2.

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ は $[0,2]$ 上連続とする．このとき，f の $[0,2]$ 上の Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ の定義を述べよ．ただし,「分割」,「Riemann 下積分」,「Riemann 上積分」の定義を書くこと.

問題 3.

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ は $[-1,1]$ 上連続とする.

(1) f の不定積分の定義を述べよ.

(2) f の不定積分は連続であることを証明せよ.

問題 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする.

(1) f が $\mathbb{R}$ 上微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

となることを, **上の同値条件を用いて**証明せよ.

問題 5.

$f \in C^1(-1,1) \cap C([-1,1])$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) Rolle の定理を述べよ.

(2) f が $\xi \in (-1,1)$ で最小になるとする．このとき，$f'(\xi) = 0$ であることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の解答

(10) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なとき

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

(11) f は $[0,2]$ 上連続, または単調減少, 単調増加.

(12) $0 < c < 1$ に対して

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx + \int_c^1 f(x)\,dx.$$

(13) $a \leq c \leq b$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

(14) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が存在する.

(15) $\dfrac{dF}{dx} = f$ が成り立つ.

(16) $a < \xi < b$ が存在して $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ が成り立つ.

(17) $f(x) = |x|$ $(x \in (-1.1))$