微分積分学 B 中間追試験問題

2015 年 12 月 22 日 第 5 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $x^2(1+a)^x$ を微分せよ. ただし, $a>0$ は定数である.

(2) $\arctan x$ を微分せよ.

(3) $f(x) = \dfrac{5ex^3 + 2\pi x^2 + 3\sqrt{2}x - 7}{\log_4 16 + \log_6 36 + \log_9 81}$ のとき, $f'(1)$ を求めよ.

(4) 曲線 $y^2 = 8x$ 上の点 $(2,4)$ における接線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y = ax + b$ の形で書くこと.

(5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(-x)\sin(2x)\,dx$ を計算せよ.

(6) $\dfrac{1}{1+x^2}$ の原始関数を一つ求めよ.

(7) $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x \arcsin x)\,dx$ を計算せよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ.

(9) $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^4+16} \quad (x \in \mathbb{R})$ とする.

(a) $f'(0)$ を求めよ.

(b) 増減表を作り, 極値とそれを与える x の値を求めよ. なお, 変曲点は求めなくてよい.

(c) グラフの概形を書け.

(d) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(10) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ．なお**仮定**をきちんと書くこと.

(11) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能となるための十分条件を一つ述べよ．なお, **Riemann 上積分や Riemann 下積分を用いてはいけない.**

(12) $[0, 1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？主張を述べよ.

(13) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ 上 Riemann 積分可能であるとする．このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(14) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ が $x = 0$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(15) $F : (0, 2) \to \mathbb{R}$ に対して, $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ が F の原始関数であることの定義を述べよ.

(16) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能であるとする．このとき, Rolle の定理を述べよ.

(17) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ で, $x = 0$ で極小となるが, $x = 0$ で微分可能とならない例をあげよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は $[0,1]$ 上連続とする．このとき，f の $[0,1]$ 上の Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の定義を述べよ．ただし，「分割」，「Riemann 下積分」，「Riemann 上積分」の定義を書くこと．

問題 3.

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ は $[-1,1]$ 上連続とする．

(1) f の不定積分の定義を述べよ．

(2) f の不定積分は連続であることを証明せよ．

問題 4.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする．

(1) f が $\mathbb{R}$ 上微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ．

(2) $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

となることを, **上の同値条件を用いて**証明せよ．

問題 5.

$f\in C^1(-1,1)\cap C([-1,1])$ に対して, 次の問いに答えよ．

(1) 平均値の定理を述べよ．

(2) f が $\xi\in(-1,1)$ で最大になるとする．このとき，$f'(\xi)=0$ であることを示せ．

以下余白 計算用紙として使ってよい.