微分積分学 B 試験問題

2016 年 1 月 21 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $x^{\sin x}$ を x について微分せよ.
(2) $\arctan x$ を x について微分せよ.
(3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ の点 $(x, y) = (4, 2)$ における法線の方程式を求めよ. なお, 答えは, $y = ax + b$ の形で書くこと.
(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を求めよ.
(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx$ を求めよ.
(6) $t > 0$ は定数とする. $e^{-tx}\sin x$ の変数 x に対する原始関数を一つ求めよ.
(7) f, g は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能な関数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{d^4(fg)}{dx^4}(x)$ を f と g の微分を用いて表せ. なお, f' や g' の微分記号を用いてよい.
(8) e^x の Taylor-Maclaurin 展開を x^5 の項まで求めよ. 答えは

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

の形で書くこと ((9), (10) も同様に書くこと).
(9) $\sin x$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^7 の項まで求めよ.
(10) $\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^6 の項まで求めよ.
(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$ を求めよ.
(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{x^3}}{1 - \cos(x)}$ を求めよ.
(13) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$ を求めよ.
(14) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

(15) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を連続な関数とする. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

(16) $\lambda>1$ に対して $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ を求めよ.

(17) $\displaystyle\int_0^2 \log x\,dx$ を求めよ.

(18) $x>0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dt$ を x の式で表せ.

(19) $t>0$ に対して, $f(t):=\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $f(t)$ を t の式で表せ.

(20) $t>0$ に対して, $f(t):=\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) $x^{\sin x}(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x})$

(2) $\frac{1}{1+x^2}$

(3) $y=-4x+18$

(4) $\frac{\pi}{3}$

(5) $-\frac{2}{3}$

(6) $-\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x+t\sin x)$

(7) $f''''(x)g(x)+4f'''(x)g'(x)+6f''(x)g''(x)+4f'(x)g'''(x)+f(x)g''''(x)$

(8) $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots$

(9) $\sin x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\dfrac{1}{7!}x^7+\cdots$

(10) $\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{6}x^6+\cdots$

(11) $\frac{1}{6}$　(12) 0　(13) 0

(14) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx:=\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx$

(15) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束する.

(16) $\frac{3^{1-\lambda}}{\lambda-1}$

(17) $2\log 2-2$

(18) $\frac{1}{x}$

(19) $\frac{1}{1+t^2}$

(20) $\frac{\pi}{2}$

問題 2.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めよ (答えのみでは得点を与えない).

問題 3.

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x):=-\log x$ と定める.

(1) f が凸関数であることの定義を述べよ.

(2) f が凸関数であることを示せ.

(3) $a,b>0$ と $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ をみたす $p,q>1$ に対して,

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b$$

を示せ.

問題 4.

$\lambda>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^\lambda}\,dx$ の定義を述べよ.

(2) 定義に基づいて $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^\lambda}\,dx$ が収束する $\lambda>0$ の必要十分条件を求め, 積分の値を求めよ (定義にそぐわない計算をしている場合には, 得点を与えない).

問題 5.

$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$ が絶対収束することを示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $\xi>1$ に対して, $e^{-\xi}\leq\dfrac{1}{\xi}$ を示せ.

(2) (1) を用いて, $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$ が絶対収束することを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

2 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4 R(x)$ とかくと

$R(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる. よって

$$\frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} = \frac{-\frac{1}{4!}x^4 - x^4 R(x)}{x^4}$$

$$= -\frac{1}{24} - R(x) \to -\frac{1}{24} \quad (x \to 0)$$

となるので $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} = -\frac{1}{24}$ となる.

3 (1) $\forall x, y \in (0, \infty)$, $0 < \forall \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(2) $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0 \quad (\forall x \in (0, \infty))$

より f は凸関数となる.

(3) $\lambda = \frac{1}{p}$, $x = a$, $y = b$ を (1) の不等式に代入すると

$$f\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \leq \frac{1}{p} f(a) + \frac{1}{q} f(b)$$

より

$$-\log\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \leq -\frac{1}{p}\log a - \frac{1}{q}\log b = -\log a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$$

となる. 両辺に指数をとれば

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$$

が得られる.

$\boxed{4}$ (1) $\int_0^2 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x^\lambda}dx$

(2) $\lambda \neq 1$ のとき. $\varepsilon>0$ に対して

$$\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x^\lambda}dx = \left[\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\right]_\varepsilon^2 = \frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \begin{cases} \frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda} & 1-\lambda>0 \\ +\infty & 1-\lambda<0 \end{cases}$$

となる. また. $\lambda=1$ のとき. $\varepsilon>0$ に対して

$$\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}dx = \left[\log x\right]_\varepsilon^2 = \log 2 - \log \varepsilon$$

より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\log 2 - \log \varepsilon\right) = +\infty$$

となる. 以上により

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx = \begin{cases} \frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda} & 0<\lambda<1 \\ +\infty \ (\text{発散}) & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

すなわち $0<\lambda<1$ のときに $\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx$ は収束

して $\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx = \frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ となる.

$\boxed{5}$ (1) $z \geq 1$ に対して $f(z) := ze^{-z}$ とおくと

$$f'(z) = (1-z)e^{-z} \leq 0 \quad (\forall z > 1)$$

より f は $[1, \infty)$ 上単調減少だから

$$f(z) \leq f(1) = e^{-1} \leq 1$$

すなわち $e^{-z} \leq \dfrac{1}{z}$ となる.

(2) $M > 1$ に対して $\int_1^M |e^{-x^2}\sin x|dx$ が有界となることをいえばよい. $|e^{-x^2}\sin x| \leq e^{-x^2}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_1^M |e^{-x^2}\sin x|dx &\leq \int_1^M e^{-x^2}dx \\
&\leq \int_1^M \frac{1}{x^2}dx \quad (\because (1)) \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M \\
&= 1 - \frac{1}{M} \leq 1.
\end{aligned}$$

となるので $\int_1^M |e^{-x^2}\sin x|dx$ は $M > 1$ に対して有界となる.