第3章　高校の微分積分

§3.1　微分とその応用

〈曲線と微分〉

点P $(x(t), y(t))$ が時刻 $t>0$ でうごくとき

$\vec{v}(t) := \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$ 時刻 t における点Pの速度ベクトル

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}$ 〃 速さ

$\vec{\alpha}(t) := \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t)\right)$ 〃 加速度ベクトル

という。

例3.1

$r, \omega>0$ に対し

$x(t) := r\cos(\omega t)$, $y(t) := r\sin(\omega t)$　$t>0$

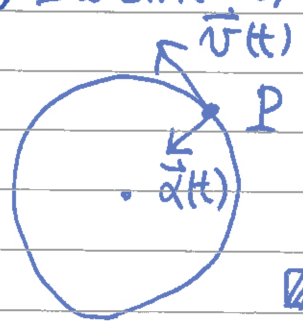
により定まる点P $(x(t), y(t))$ は半径 r の円周上をうごく。このとき時刻 t における点Pの速度ベクトル，速さ，加速度ベクトルはそれぞれ

$$\vec{v}(t) = (-r\omega\sin(\omega t), r\omega\cos(\omega t))$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

$$\vec{\alpha}(t) = (-r\omega^2\cos(\omega t), -r\omega^2\sin(\omega t))$$

となる(各自)



∎

〈Taylor-Maclaurin展開〉

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ (*)

とかけたとして，$a_0, a_1, a_2, \cdots$ を求めよう。

(*) に $x=0$ を代入すると $\boxed{f(0)=a_0}$ となる。

次に，(*) を x で微分すると

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$ (**)

となるから (**) に $x=0$ を代入すると $\boxed{f'(0)=a_1}$ となる。

次に，(**) を x で微分すると

$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots$ (***)

となるから，(***) に $x=0$ を代入すると $\boxed{f''(0)=2a_2}$ となる。

次に (***) を x で微分すると

$f'''(x)=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots$ (****)

となるから，(****) に $x=0$ を代入すると，

$\boxed{f'''(0)=3!a_3}$ となる。以下，くり返すことで

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k\in\mathbb{N})$$

となることから

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

と推測できる。この $\cdots$ はどのような意味で正しいのだろうか？

例3.2

e^x に対し $(e^x)^{(n)} = \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

となる ☑

例3.3

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x & n = 1, 5, 9, 13, \cdots \\ -\cos x & n = 2, 6, 10, 14, \cdots \\ \sin x & n = 3, 7, 11, 15, \cdots \\ \cos x & n = 4, 8, 12, 16, \cdots \end{cases}$$

より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

となる。 ☑

例3.4

$$(\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

より

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

となる ☑

この・・・は次の意味で正しい。

定理3.1 (Taylor-Maclaurin展開)

無限回微分可能な関数 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\frac{1}{x^k}\left(f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)\right) \to 0 \quad (x \to 0)$$

が成り立つ ☑

Taylor-Maclaurin展開を用いると、極限が比較的簡単に求まるときがある。

例3.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\log(1+x)-x} \text{ を求める。}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+R_1(x)$$
$$\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$$

により $R_1(x)$, $R_2(x)$ を定めると定理3.1より

$$\frac{R_1(x)}{x^2}\to 0 \quad \frac{R_2(x)}{x^2}\to 0 \quad (x\to 0)$$

となる。よって

$$\frac{\cos x-1}{\log(1+x)-x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2+R_1(x)}{-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)}$$
$$= \frac{1-\frac{2R_1(x)}{x^2}}{1-\frac{2R_2(x)}{x^2}} \to 1 \quad (x\to 0)$$

がわかる。 図

〈凸関数と不等式〉

$I:=(a,b)\subset\mathbb{R}$ に対し、$f:I\to\mathbb{R}$ が凸関数であるとは、$\forall x\in I$ に対して $f''(x)\geq 0$ となることであった。

例3.6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x):=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めると、f は凸関数である。 図

凸はグラフではどのような性質？

定理3.2

$f:I\to\mathbb{R}$は無限回微分可能とする。このとき次は同値

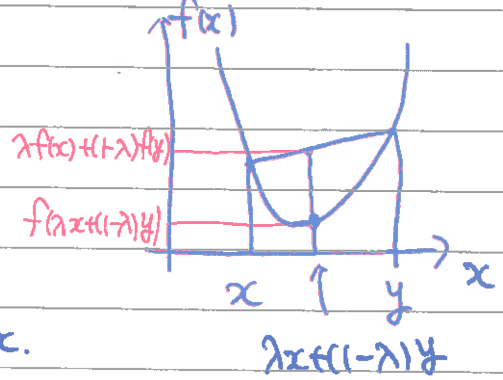
(1) fが凸関数

(2) $^\forall x,y\in I$, $0<{}^\forall\lambda<1$に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

□

定理3.2の(2)が主張していることは、右図のようにグラフ上の2点、$(x,f(x)),(y,f(y))$をむすぶ線分が常にグラフの上側にあるということ。



例3.7 (相加・相乗平均とYoungの不等式)

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$を$f(x):=-\log x$ $(x\in(0,\infty))$で定めると、$^\forall x\in(0,\infty)$に対して$f''(x)=\frac{1}{x^2}\geq0$となるから、凸関数である。よって$1<p<\infty$に対し、$\lambda=\frac{1}{p}$として定理3.2を用いると$^\forall x,y>0$に対し

$$-\log\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)y\right)\leq-\frac{1}{p}\log x-\left(1-\frac{1}{p}\right)\log y$$

となる。$\frac{1}{q}:=1-\frac{1}{p}$とおき、両辺expをとると

$$\exp\left(\frac{1}{p}\log x+\frac{1}{q}\log y\right)\leq\exp\left(\log\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)\right)$$

より

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \quad \text{—}(*)$$

が得られる. $p=2$ とすれば $q=2$ となり,

相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

が得られる。また, $a, b>0$ に対し,

$(*)$ で $x=a^p$, $y=b^q$ とすれば

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \text{—}(**)$$

が得られる. $(**)$ を Young の不等式という。 ▨

<u>例13.8</u>

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x):=x^3$ $(x\in(0,\infty))$

で定めると. f は凸関数である (各自).

よって $^\forall a, b>0$ に対し 定理3.2より

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$$

だから

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}b^3$$

となり

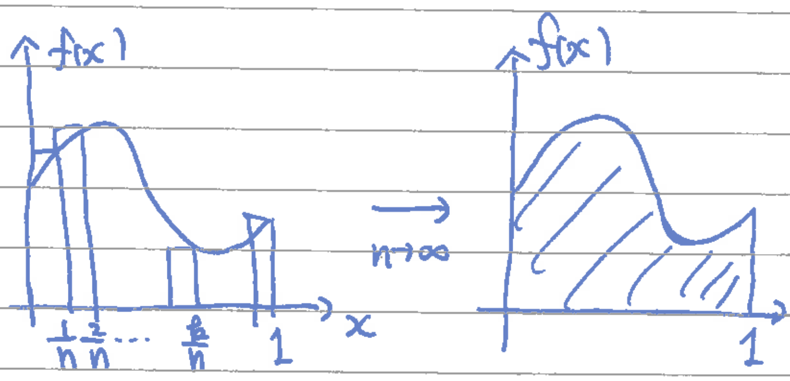
$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$$

がわかる。 ▨

§3.2 積分とその応用

連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n\to\infty)$$

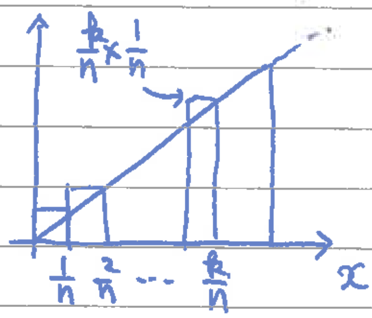


$f(x)\geq 0$ のとき, $\int_0^1 f(x)\,dx$ は $[0,1]$ 上のグラフの下側の面積.

例3.9

$\int_0^1 x\,dx$ を微分を用いずに求める.

右図より



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

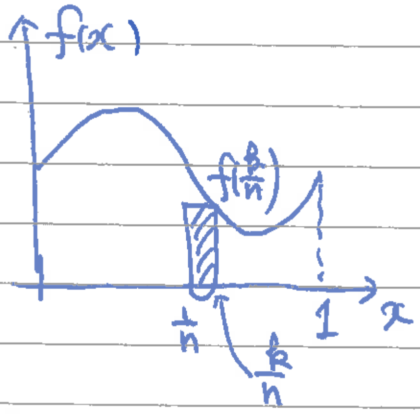
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty)$$

だから $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ となる. ☐

例13.10 (回転体の体積)

連続関数 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ は $\forall x \in [0,1]$ に対し $f(x) \geq 0$ をみたすとする。このとき、曲線 $y=f(x)$ と x軸および2直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれた部分を x軸まわりに1回転させてできる立体の体積 V を求める。



右図の斜線部分をx軸まわりに1回転させたときの体積は

$$\pi \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{半径}}{}^2 \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{円板の厚さ}}$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \frac{1}{n} \to \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

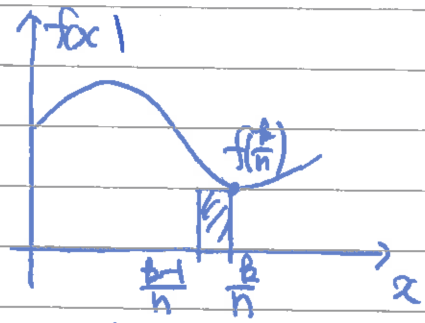
$$(n \to \infty)$$

となる。従って $V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$ となる。

例13.11 (回転体の体積)

連続関数 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ は $\forall x \in [0,1]$ に対し $f(x) \geq 0$ をみたすとする。このとき、曲線 $y=f(x)$ と x軸および2直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれた部分を y軸まわりに1回転させてできる立体の体積 V を求める。

右図の斜線部分をy軸まわりに1回転させたときの体積は



$$f\left(\frac{k}{n}\right)\pi\left(\frac{k}{n}\right)^2 - f\left(\frac{k}{n}\right)\pi\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

高さ.　外周の半径　内周の半径

$$=\pi f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

となるから

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\pi\left(\frac{k}{n}\right)^2 - f\left(\frac{k}{n}\right)\pi\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right)$$

$$= 2\pi\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}_{\to \int_0^1 xf(x)dx} - \underbrace{\frac{\pi}{n}}_{\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}_{\to \int_0^1 f(x)dx}$$

$$\longrightarrow 2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx \qquad (n\to\infty)$$

となる. 従って $V = 2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$ となる.

□

〈曲線の長さ〉

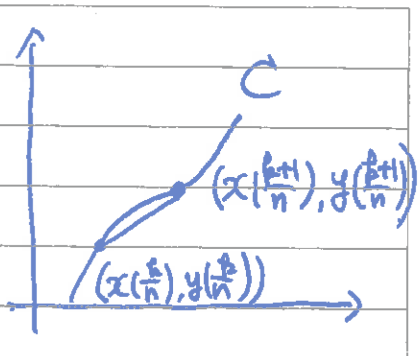
パラメータ $0\le t\le 1$ で表示された曲線 $C(x(t), y(t))$ の長さを求めよう. まず Taylor-Maclaurin 展開より

$$x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right) = x'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} + R_1$$

$$y\left(\frac{k+1}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right) = y'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} + R_2$$

とおくと $nR_1\to 0$, $nR_2\to 0$ $(n\to\infty)$ に注意する.

$\left(x\left(\frac{k}{n}\right), y\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ と
$\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right), y\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$ の
距離は三平方の
定理により



$$\sqrt{\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2+\left(y\left(\frac{k+1}{n}\right)-y\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(x'\left(\frac{k}{n}\right)+nR_1\right)^2+\left(y'\left(\frac{k}{n}\right)+nR_2\right)^2}\ \frac{1}{n}$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2+\left(y\left(\frac{k+1}{n}\right)-y\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}\ \frac{1}{n}$$

$$\to \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \quad (n\to\infty)$$

となる．従って．曲線 C の長さ l は
$l=\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ で与えられる

<u>例3.12</u>

$r>0$ に対し，

$x(t)=r\cos(2\pi t),\ y(t)=r\sin(2\pi t)\quad 0\le t\le 1$

で表示された曲線 C $(x(t), y(t))$ は半径 r
の円を表す．このとき，曲線 C の長さ l は

$x'(t)=-2\pi r\sin(2\pi t),\ y'(t)=2\pi r\cos(2\pi t)$

だから

$$l=\int_0^1\sqrt{(-2\pi r\sin(2\pi t))^2+(2\pi r\cos(2\pi t))^2}\,dt=2\pi r$$

がわかる. ☑

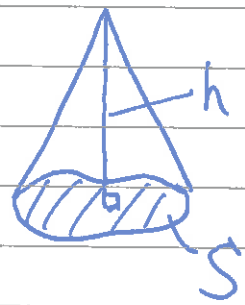
注意3.1

微積Aで紹介した通り, $\pi = \dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ であった. しかし, 例13.12をみれば, 円周の長さを求めるのにπを用いているので わかっていない値πで円周の長さを求めるという, 意味のないことをしていることがわかる.

この問題を素朴に解決するには角度θをどのように定めるか?が鍵となる ☑

〈錐の体積〉

右図のような底面積S, 高さhの錐の体積Vを求める.

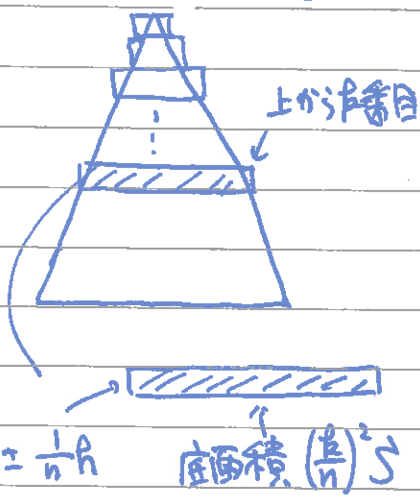


アイデア1

hを右図のようにn等分する.
上からk番目のブロックの体積V_kは相似比 $h : \frac{k}{n}h = 1 : \frac{k}{n}$ に注意して

$$V_k = \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 S\right)\left(\frac{1}{n}h\right) = \frac{k^2}{n^3}Sh$$

となる.



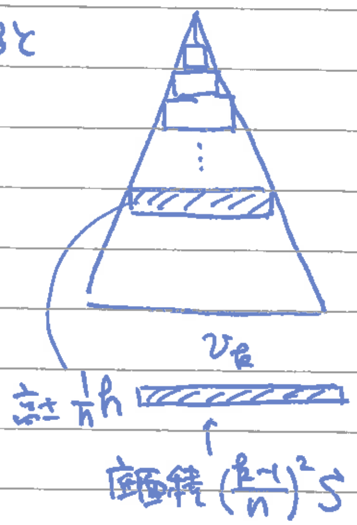
kについて和をとって $n\to\infty$とすると

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) \to \frac{1}{3}Sh$$

となる。 $(n\to\infty)$

アイデア2

hを右図のようにn等分すると
上からk番目のブロックの
体積v_kは



$$v_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 S \frac{1}{n} h$$
$$= \frac{(k-1)^2}{n^3} Sh$$

となる。kについて和を
とって $n\to\infty$とすると

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{Sh}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$
$$= \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right) \to \frac{1}{3}Sh$$

$(n\to\infty)$

となる。どちらのアイデアでも同じ値に収束した

疑問

アイデア1とアイデア2は常に同じ値に収束するのか?

答え

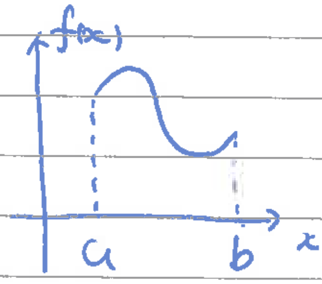
ちがう! 大雑把にいうと
同じ値に収束する $\Longleftrightarrow$ (Riemann)積分可能

第4章 Riemann積分

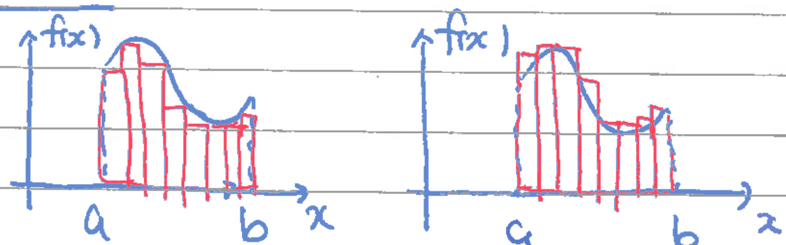
〈目標〉

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$に対して

面積を定義したい。



困ること



内側から近づける　　外側から近づける

問 これらは一致するのか？

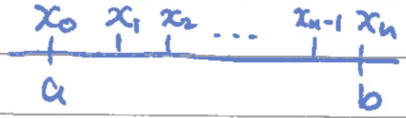
以下 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする

§4.1 Riemann積分の定義

定義4.1（分割）

$\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_n : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$

を$[a,b]$の分割という　図



定義4.2（Riemann積分）

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し

$$\int_a^b f(x)dx := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1}) : \Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}は[a,b]の分割\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) : \Delta=\{x_0,\dots,x_n\} は [a,b] の分割\right\}$$

とおき、それぞれ Riemann下積分、Riemann上積分という。

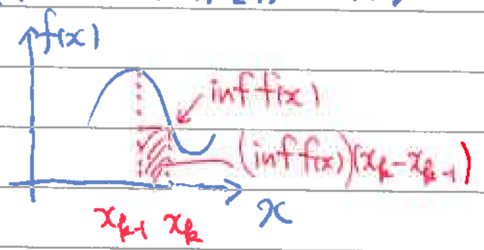
$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ のとき Riemann積分可能

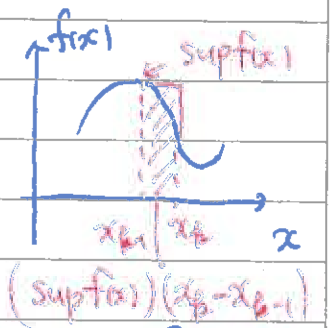
であるといい

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

と定める。 ☑

〈下積分, 上積分のイメージ〉





赤い部分を集めて、それぞれ上限, 下限をとる。

〈Riemann積分可能のイメージ〉

「内側からどんな分割を考えても」
「外側からどんな分割を考えても」
その極限が同じ値になるときに
面積(積分)が定められる ということ。

Riemann積分を求めるにはどうしたらよいか?
を考える。

定義4.3 (分割の長さ)

$[a,b]$の分割 $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ に対して

$$|\Delta|:=\max_{k=1,\cdots,n}(x_k-x_{k-1})$$

を分割 Δ の長さという ▨

定理4.1 (Darboux)

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について

$\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\delta>0$ s.t.

$[a,b]$上の$\forall$分割 $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ に対し

$|\Delta|<\delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1}),$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon>\sum_{k=1}^{n}\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$$

が成り立つ. ▨

〈Darbouxの定理のよいところ〉

$\exists$分割 Δ なら上限, 下限の定義から従う.

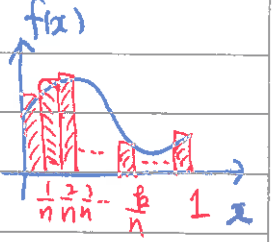
$\forall$分割 Δ で $|\Delta|<\delta$ なら成り立つことが非自明。

系4.1 (区分求積法)

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が Riemann積分可能ならば

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

が成り立つ. ▨



定理4.1の証明はWebのノートを参照

系4.1の証明の方針:

$\forall \varepsilon>0$ に対し、定理4.1の$\delta>0$について、

$N\in\mathbb{N}$を $\frac{1}{N}<\delta$ となるようにとる。$\forall n\in\mathbb{N}$に対し

$n\geq N$ ならば $\Delta:=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$とすれば

$|\Delta|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\delta$ だから

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}\inf_{\frac{k-1}{n}\leq x\leq\frac{k}{n}} f(x)\frac{1}{n}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

より、fがRiemann積分可能なことから

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

となる。 ■

注意4.1

区分求積法はfがRiemann積分可能でないと成り立たない。 ■

◎ 区分求積法を使うために、どのような関数がRiemann積分可能か考えよう。

定義4.4 (振動量)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$と$A\subset[a,b]$に対し

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x):=\sup_{x\in A} f(x)-\inf_{x\in A} f(x)$$

をAにおけるfの振動量という ■

命題4.1

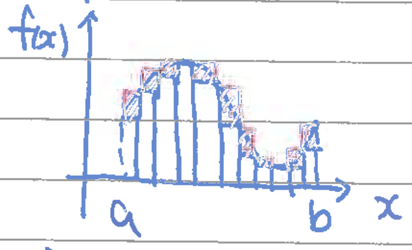
有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について

$\forall\varepsilon>0$ に対し、$\exists\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$：$[a,b]$ の分割

s.t. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$

$\Rightarrow$ f は Riemann 積分可能 □

〈命題4.1のイミ〉



赤い部分の和が小さい

$\Rightarrow$ Riemann積分可能

証明は web ノートをみよ.

定理4.2

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続

$\Rightarrow$ f は Riemann 積分可能 □

証明

f は $[a,b]$ 上連続より一様連続となる(定理2.10).

$\forall\varepsilon>0$ に対し、$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x,x'\in[a,b]$ に対して

$$|x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

とできる. $N\in\mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{N}<\delta$ となるように

とり,

$$\Delta=\{x_0=a,\ x_1=a+\tfrac{1}{N}(b-a),\ x_2=a+\tfrac{2}{N}(b-a),\ \dots,\ x_k=a+\tfrac{k}{N}(b-a),\ \dots\ x_N=b\}$$

を $[a,b]$ の分割とすると, $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{N}<\delta$

だから

$$\underset{x_{k-1}\le x\le x_k}{\mathrm{osc}}\, f(x) = \sup_{x_{k-1}\le x,x'\le x_k} |f(x)-f(x')| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

となり.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\underset{x_{k-1}\le x\le x_k}{\mathrm{osc}}\, f(x)\right)(x_k-x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{b-a}\frac{b-a}{N} = \varepsilon$$

が得られる. 命題4.1よりfはRiemann積分可能である. □

定理4.3

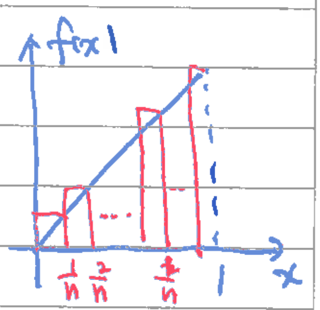
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$は有界で単調減少(単調増加)

$\Longrightarrow$ fは Riemann 積分可能.

証明はwebノートをみよ.

例4.1

$\int_0^1 x\,dx$を区分求積法で求める。$f(x)=x$として



$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

より

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

と微分(原始関数)を用いずに求められる.

§4.2 Riemann 積分の性質

以下．関数は常に有界なもののみ考える．
$[a.b]$上の分割 $\Delta=\{x_0,\cdots,x_n\}$ と
$f:[a.b]\to\mathbb{R}$に対し

$$s_\Delta(f):=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k-x_{k-1})$$

$$S_\Delta(f):=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\,(x_k-x_{k-1})$$

とかく。

定理4.4（区間加法性）
$f:[a.b]\to\mathbb{R}$, $a<c<b$
〈仮定〉
fは$[a,c]$, $[c,b]$上Riemann積分可能
〈結論〉
fは$[a.b]$上Riemann積分可能で

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

☑

証明 $^\forall\varepsilon>0$を固定する．
1. （下積分の評価）
$\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$の定義より
$\exists\Delta$: $[a,c]$の分割
$\exists\Delta'$: $[c,b]$の分割 s.t.

$$\int_a^c f(x)dx-\varepsilon\le s_\Delta(f),$$

$$\int_c^b f(x)dx-\varepsilon\le s_{\Delta'}(f)$$

とできる．$\Delta\cup\Delta'$は$[a,b]$の分割だから

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx+\underline{\int_c^b} f(x)dx-2\varepsilon$$
$$\leq s_\Delta(f)+s_{\Delta'}(f)$$
$$\leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad -(*)$$

が成り立つ．

2 （上積分の評価）

1. と同様にして

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx+2\varepsilon\geq\overline{\int_a^b} f(x)dx \quad -(**)$$

が得られる．

3. fは$[a,c]$, $[c,b]$上Riemann積分可能より

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx=\overline{\int_a^c} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx,$$
$$\underline{\int_c^b} f(x)dx=\overline{\int_c^b} f(x)dx=\int_c^b f(x)dx$$

が成り立つ．$(*)$と$(**)$より

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\leq\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx+2\varepsilon$$
$$\leq\underline{\int_a^b} f(x)dx+4\varepsilon$$

となるので $\varepsilon\downarrow 0$とすると，それぞれの積分がεに依らないことに注意して

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx \le \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$$

―(***)

が得られる. 他方

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$$

だから(***)の不等号はすべて等号になる.
よって f は $[a,b]$ 上 Riemann積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

となる. □

定理4.4の $a<c<b$ の仮定は, 積分の向きを考えることで緩めることができる.

定義 4.5

Riemann積分可能な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める. ▨

定理4.6 (区間加法性)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann積分可能
$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ 上 Riemann積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ ▨

証明は a,b,c についての場合わけと
定理4.5を用いればよい.

定理4.6 (積分の順序保存性)

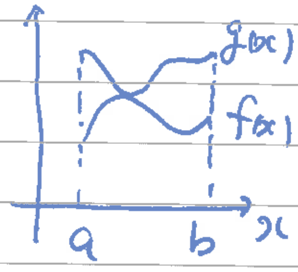
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, Riemann積分可能

$\forall x\in[a,b]$に対し $f(x)\le g(x)$ ($f\le g$とかく)

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$ ▨

証明

$[a,b]$の$\forall$分割Δに対し



$s_\Delta(f)\le s_\Delta(g)$ ($\because f\le g$)

$$\le \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx \quad (\because g\text{はRiemann積分可能})$$

より, ΔについてsupをとるとfがRiemann積分可能なことから

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

となる. □

定理4.7 (積分の線形性)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, Riemann積分可能

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\alpha f+\beta g$ は Riemann積分可能で

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

▨

証明

線形性を示すには，$f+g$とαfがRiemann積分可能であることを示せばよい．

1 $f+g$がRiemann積分可能であることを示す．

$\forall \varepsilon > 0$に対し，$^\exists$分割Δ, Δ' s.t.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon \leq s_\Delta(f),$$

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx - \varepsilon \leq s_{\Delta'}(g)$$

とできる．$s_\Delta(f) \leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f)$と$s_{\Delta\cup\Delta'}(f)+s_{\Delta\cup\Delta'}(g) \leq s_{\Delta+\Delta'}(f+g)$に注意すると

$$\underline{\int_a^b} f(x) + \underline{\int_a^b} g(x) - 2\varepsilon \leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f+g)$$

$$\leq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx$$

となる．よって$\varepsilon \downarrow 0$とおると，f, gはRiemann積分可能より

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx$$

が得られる．同様にして，

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx$$

も成り立つから$f+g$はRiemann積分可能となる．

2. $\alpha = 0$のとき，αfがRiemann積分可能なことは自明なので$\alpha \neq 0$のときに示す．$\forall \varepsilon > 0$に対し，$^\exists$分割Δ s.t.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s_\Delta(f) \quad —(*)$$

とできる。ここで $\alpha>0$ と $\alpha<0$ の場合にわける。

3. $\alpha>0$ のとき、$(*)$ より

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx - \alpha\varepsilon < \alpha s_\Delta(f)$$
$$= s_\Delta(\alpha f) \leq \underline{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$$

より $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、f が Riemann 積分可能より

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}(\alpha f(x))\,dx$$

が得られる。同様に

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

も得られるので αf は Riemann 積分可能である。

4. $\alpha<0$ のとき、$(*)$ より

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx - \alpha\varepsilon > \alpha S_\Delta(f)$$
$$= S_\Delta(\alpha f) \geq \overline{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$$

より $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、f が Riemann 積分可能より

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b}(\alpha f(x))\,dx$$

が得られる。同様に

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} (\alpha f(x))\,dx$$

も得られるので αf は Riemann 積分可能である

□

定理4.8（積分平均値定理）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$,

(1) f が $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能

$$\Rightarrow \inf_{a\leq x\leq b} f(x) \leq {}^{\exists}\lambda \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x) \ \text{s.t.}$$

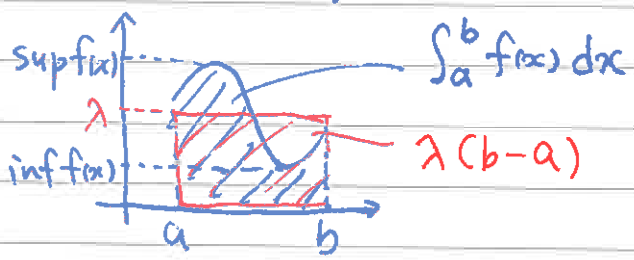
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a).$$

(2) f が $[a,b]$ 上連続

$$\Rightarrow \ {}^{\exists}c\in[a,b] \ \text{s.t.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

〈定理4.8のイミ〉



と の面積が等しくなるように λ をとることができる。

定理4.8の証明

(1) ${}^{\forall}x\in[a,b]$ に対して

$$m := \inf_{a\leq y\leq b} f(y) \leq f(x)$$

$$\leq \sup_{a\leq y\leq b} f(y) =: M$$

だから，$[a,b]$ で積分すると，定理4.6より

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$$

だから

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となる。よって

$$\lambda := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

とおけば $m \leq \lambda \leq M$ であり

$$\lambda(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

となる。

(2) (1)において、fが連続ならば、Mは最大値, mは最小値となる(定理2.9, Weierstrassの定理)。連続関数における中間値の定理(定理2.8)より、$^\exists c \in [a,b]$ s.t. $\lambda = f(c)$ とできるので

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

となる。 □

§4.3 不定積分

高校の教科書では、不定積分(または原始関数)を先に学んでから定積分と面積を学んだ。しかし、この講義では積分は面積を求める計算であることを重視するため、定積分(Riemann積分)を先に扱った。さて、不定積分とは何か?について考えてみる。

定義 4.6 (不定積分)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 有界, Riemann 積分可能

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を

$$F(x):=\int_a^x f(z)\,dz \qquad (x\in[a,b])$$

で定義する. この関数 F を f の不定積分という. ☑

注意 4.2

上端と下端のない積分記号 $\int f(x)\,dx$ は原始関数と呼ぶのが正しい) ☑

定義 4.7

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ に対し $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ が f の原始関数

$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \quad (\forall x\in(a,b))$$

このとき $F(x)=\int f(x)\,dx$ とかく. ☑

注意 4.3

定義 4.7 で, 極限 $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ は F の x での微分である. つまり, $F'(x)=f(x)$ ということである. ☑

定理 4.9

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 有界, Riemann 積分可能

F : f の不定積分. i.e.

$$F(x)=\int_a^x f(z)\,dz \qquad (x\in[a,b])$$

$\Longrightarrow$ F は $[a,b]$ 上連続 ☑

証明

fが有界なので $M := \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ とおく.

$^\forall x, y \in [a,b]$ に対して

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(z)\,dz - \int_a^x f(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_a^y f(z)\,dz + \int_x^a f(z)\,dz \right| \quad (\because \text{定義 } 4.5)$$

$$= \left| \int_x^y f(z)\,dz \right| \quad (\because \text{区間加法性})$$

$$\le \left| \int_x^y |f(z)|\,dz \right| \quad (\because \text{積分の三角不等式})$$

$$\le M \left| \int_x^y dz \right| \quad (\because |f(x)| \le M \text{ 定理} 4.6)$$

$$= M|y - x| \to 0 \quad (y \to x)$$

だから $F(y) \to F(x)$ $(y \to x)$ となるので

Fはxで連続となる. □

定理 4.10（微分積分学の基本定理 その1）

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, 連続, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, fの不定積分 i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz \quad (x \in [a,b])$$

$\Rightarrow$ $^\forall x \in (a,b)$ に対し

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

〈定理4.10の修〉

◎連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し、(a,b) 上で定義された原始関数 $\int f(x)\,dx$ が存在する。しかも、それは不定積分 $\int_a^x f(z)\,dz$ に等しい。高校の教科書では「微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の不定積分または原始関数という」とあるが、fが連続でないと不定積分と原始関数を同じものとしてみなせない。

◎連続関数の不定積分は端点をのぞいて微分可能になる。つまり、不定積分はもとの関数より滑らかになることがわかる。

証明

$\forall \varepsilon>0$ に対して、f が x で連続なので $\exists\delta>0$ s.t. $\forall z\in[a,b]$ に対して

$$|z-x|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{—}(*)$$

とできる。そこで、$\forall h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し、$0<|h|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(z)\,dz-f(x)\right| \quad (\because \text{区間加法性})$$

$$=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(z)-f(x))\,dz\right| \quad \left(\because \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dz=f(x)\right)$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(\xi)-f(x)|\,d\xi\right| \quad (\because 積分の三角不等式)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|h|}\left|\int_x^{x+h} d\xi\right| \quad (\because (*))$$

$$= \varepsilon$$

となるので

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

となる. $\square$

注意 4.4

定理4.10はfが連続でないと成り立たない.

(反例) $H:[-1,1]\to\mathbb{R}$を

$$H(x)=\begin{cases}-1 & -1\leq x\leq 0\\ 1 & 0<x\leq 1\end{cases}$$

により定めるとHは$x=0$で連続でない.

$$\int_{-1}^{x} H(\xi)\,d\xi = \begin{cases}-\int_{-1}^{x} d\xi = -1-x & (-1\leq x\leq 0)\\ -\int_{-1}^{0} d\xi + \int_{0}^{x} d\xi = -1+x & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$$

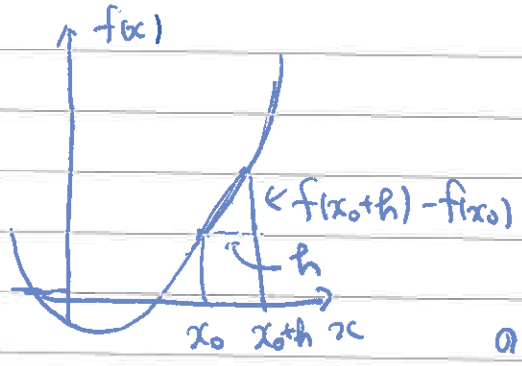
より

$$\int_{-1}^{x} H(\xi)\,d\xi = -1+|x|$$

である. よってHの不定積分は$x=0$で微分できないことがわかる. ☑

第5章 微分

§5.1 微分とその性質



$0<|h|<1$ に対し $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ はグラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ での接線の傾きの近似.

定義5.1 (微分)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

f が $x=x_0$ で微分可能

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ が存在する.

このとき, $\displaystyle f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

とかき, f の x_0 における微分係数という.

f が (a,b) 上微分可能

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ f は ${}^\forall x\in(a,b)$ について微分可能

このとき, $x\in(a,b)$ に対し

$$\frac{df}{dx}(x):=f'(x)$$

とかく. $\dfrac{df}{dx}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の導関数という □

以下

$C^0(a.b) := \{f:(a.b)\to\mathbb{R},\ (a.b)$上連続$\}$

$C^1(a.b) := \{f:(a.b)\to\mathbb{R},\ f$は$(a.b)$上微分可能, $\frac{df}{dx}$は$(a.b)$上連続$\}$

とかく.

〈微分と接線〉

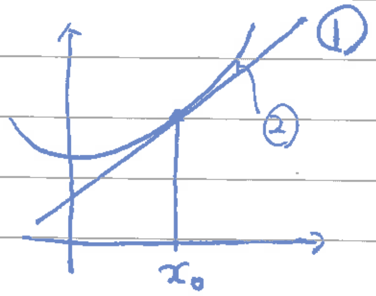
$f\in C^1(a.b)$, $x_0\in(a.b)$に対して

$$R(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

とおく。このとき.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{①}+\underbrace{R(x)(x-x_0)}_{②}$$

となるが, $x\to x_0$ としたとき. $R(x)\to 0$ が わかる。



①は一次関数
(グラフ$y=f(x)$の
$x=x_0$での接線)

② は誤差 (②は $(x-x_0)$ より速く 0 に近づく)

定理5.1

$f:(a.b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a.b)$

fが $x=x_0$で 微分可能

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$

とかいたときに. $R(x)\to 0$ $(x\to x_0)$.

さらにこのとき, $\lambda = f'(x_0)$ となる. □

証明

$\Rightarrow$) $\lambda = f'(x_0)$ とおくと, $x \neq x_0$ に対し

$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

となるから, 微分の定義より $R(x) \to 0 \ (x \to x_0)$ となる.

$\Leftarrow$) $R(x) \to 0 \ (x \to x_0)$ より

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lambda \right| = |R(x)| \to 0 \quad (x \to x_0)$$

すなわち, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \lambda \ (x \to x_0)$ となるので

f は x_0 で微分可能で $f'(x_0) = \lambda$ となる. ☒

系5.1

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in (a,b)$ で微分可能

$\Rightarrow f$ は x_0 で連続

証明

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(x)(x-x_0)$

とかくと, 定理5.1より $R(x) \to 0 \ (x \to x_0)$

となる. よって

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |f'(x_0)(x-x_0) + R(x)(x-x_0)| \\ &\leq |f'(x_0)|\underbrace{|x-x_0|}_{\to 0} + \underbrace{|R(x)|}_{\to 0}\underbrace{|x-x_0|}_{\to 0} \\ &\to 0 \quad (x \to x_0) \end{aligned}$$

となるから, f は x_0 で連続となる. □

〈微分の公式〉

定理5.2

$f, g \in C^1(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(3) (積の微分公式)

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

囧

注意5.1

定理5.2の(1),(2)より微分は線形である.

囧

定理5.2の証明

(3)のみ示す. $0 < |h| < 1$ に対し

$$f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)$$
$$= (f(x_0+h) - f(x_0))g(x_0+h) + f(x_0)(g(x_0+h) - g(x_0))$$

より

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)\ (系5.1)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)}$$
$$\to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (h \to 0)$$

となる. □

定理5.3（合成関数の微分公式, Chain rule）
$f=f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=g(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は
$\mathbb{R}$上微分可能

$$\Rightarrow \frac{d(g\circ f)}{dx}(x)=\frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

□

注意5.2
定理5.3は $y=f(x)$, $z=g(y)$ とすると形式的に

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

とかける. □

証明 $x_0\in\mathbb{R}$に対し

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_f(x)(x-x_0) \quad (*)$$

$$g(y)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(y-f(x_0))+R_g(y)(y-f(x_0)) \quad (**)$$

とかくと, 定理5.1より

$$R_f(x)\to 0 \quad (x\to x_0),\quad R_g(y)\to 0 \quad (y\to f(x_0))$$

となる. $(**)$で $y=f(x)$ とすると

$$g(f(x))=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+R_g(f(x))(f(x)-f(x_0))$$

となるので $(*)$を代入すると

$$g\circ f(x)=g\circ f(x_0)+g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)+\left(g'(f(x_0))R_f(x)+R_g(f(x))(f'(x_0)+R_f(x))\right)\times(x-x_0)$$

となる. ここで

$$g'(f(x_0))\underset{\to 0}{R_f(x)} + \underbrace{R_g(f(x))}_{\to 0}\,(f'(x_0) + \underset{\to 0}{R_f(x)}) \underset{\to 0}{\to 0} \quad (x \to x_0)$$

となるから、定理5.1より

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0)$$

となる。従って

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\,\frac{df}{dx}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

となる $\square$

例5.1

$x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

証明

$$x^\alpha = \exp(\log x^\alpha) = \exp(\alpha \log x)$$

より $g(y) := e^y,\ f(x) = \alpha \log x$

とすれば

$$x^\alpha = e^{f(x)} = g(f(x)),$$

$$g'(y) = e^y,\ f'(x) = \alpha/x$$

だから

$$(x^\alpha)' = g'(f(x))\,f'(x)$$

$$= \exp(\alpha \log x)\,(\alpha/x)$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\square$

定理 5.4（逆関数の微分公式）

$f:(a,b)\to(c,d)$ 全単射，微分可能

$x_0\in(a,b)$，$f'(x_0)\neq 0$，$y_0:=f(x_0)$

$\Rightarrow$ f^{-1} は y_0 で微分可能であり

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$ ▨

注意 5.3

定理5.4は $y=f(x)$ とかくと形式的に

$$\frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx}$$

とかける． ▨

注意 5.4

f^{-1} が y_0 で微分可能であることがわかれば

$f^{-1}(f(x))=x$ を x で微分すれば

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)=1$$

より $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ がわかる． ▨

証明

$0<|h|<1$ に対し，$h'\in\mathbb{R}$ を

$$f(x_0+h')=y_0+h=f(x_0)+h$$

により定めると

$$\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}=\frac{x_0+h'-x_0}{f(x_0+h')-f(x_0)}$$

$$=1\Big/\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}$$

となる。ここで $h \to 0$ とすると

$$f(x_0+h') = y_0 + h \to y_0 = f(x_0)$$

より $x_0 + h' \to x_0 \quad (h \to 0)$

となるので $h' \to 0$ がわかる。従って

$$\frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = 1 \Big/ \frac{f(x_0+h') - f(x_0)}{h'}$$

$$\to 1/f'(x_0) \quad (h \to 0)$$

がわかる。 □

定理 5.5 (パラメータ微分)

$\varphi, \psi \in C^1(a, b)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

φは狭義単調増加, $x_0 = \varphi(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$ ☒

注意 5.5

定理 5.5 は形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

とかける。 ☒

証明

$x = \varphi(t)$ で φ が狭義単調増加なので x_0 の近くで $\varphi^{-1}(x) = t$ とかける。よって

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

となるので合成関数、逆関数の微分公式を用いればよい □

これらの具体的計算は高校の微分積分で既に学んでいるはず…

§5.2 平均値定理

$C([a,b]) := \{f : [a,b]\to\mathbb{R},\ f\text{は}[a,b]\text{上連続}\}$

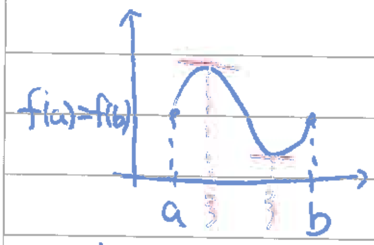
とおく.

定理5.6 (Rolleの定理)

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b),\ f(a)=f(b)$

$\Rightarrow {}^\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$ □

<Rolleの定理のイミ>



$f(a)=f(b)$なら、左図のように、接線の傾き$=0$となる点があるということ.

定理5.6の証明

fが定数関数のときは ${}^\forall x\in(a,b)$ に対し $f'(x)=0$ となるから、たとえば $\xi=\frac{a+b}{2}$ とすればよい。以下、fが定数関数でないとする.

1. ${}^\exists c\in(a,b)$ s.t. $f(a)<f(c)$ となる場合を考える。このとき、fが$[a,b]$上連続なので定理2.9(Weierstrassの定理)より

${}^\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(\xi)$

とできるが、このとき $\xi\neq a,\ \xi\neq b$ となる.

2. $f'(\xi)\leq 0$を示す. $\xi<{}^\forall x<b$ に対し

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0 \quad \left(\because \begin{array}{l} x-\xi>0 \\ f(x)-f(\xi)\leq 0 \end{array}\right)$$

より $x\to\xi+0$ とすると $f'(\xi)\leq 0$ となる.

3. $f'(\xi)\ge 0$ を示す. $a<{}^{\forall}x<\xi$ に対し

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0 \quad \left(\because \begin{array}{l} x-\xi<0\\ f(x)-f(\xi)\le 0\end{array}\right)$$

より $x\to \xi-0$ とすると $f'(\xi)\ge 0$ となる.

2.3 より $f'(\xi)=0$ がわかる.

4. $\exists c\in(a,b)$ s.t. $f(a)>f(c)$ のときも同様にできる(演習) □

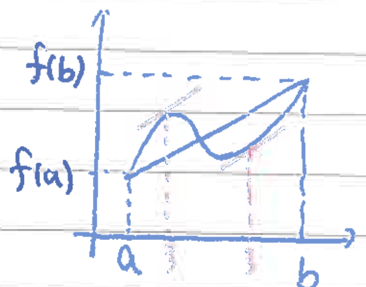
定理5.7 (微分平均値定理)

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$

$\Rightarrow {}^{\exists}\xi\in(a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$ ☑

〈平均値定理のイミ〉



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は左のななめ線の傾き. これと同じ傾きを接線に持つ点ξが (a,b) 内にあるということ.

証明

$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $x\in[a,b]$ に対し

$$\varphi(x):=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$$

と定めると, $\varphi\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$ かつ

$\varphi(a)=\varphi(b)=0$, $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

となる. Rolleの定理(定理5.6)より

$^\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\varphi'(\xi)=0$ となるので

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ となる. □

〈微積分の基本定理〉

定理5.8 (微積分の基本定理 その2)

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a,b])$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$ ☒

証明

$\Delta = \{x_0, \cdots, x_n\}$ を $[a,b]$ の分割とすると,

$1 \leq k \leq n$ に対し, 微分平均値定理 (定理5.7) より

$x_{k-1} < {}^\exists \xi_k < x_k$ s.t.

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とできるので, k について和をとると

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

となる. $\displaystyle\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x) \leq f'(\xi_k) \leq \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x)$ より

$$s[\Delta] \leq f(b) - f(a) \leq S[\Delta]$$

だから, 分割 Δ についてそれぞれ上限, 下限をとると

$$\underline{\int_a^b} f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)\,dx$$

となる. $\frac{df}{dx}$ は $[a,b]$ 上連続だから, Riemann 積分可能であり (定理4.2)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$ がわかる □

微積分の基本定理

$f \in C([a,b])$ とする

(1) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\, d\xi \quad (x \in [a,b])$$

と定めると

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \quad (\forall x \in (a,b))$$

が成り立つ。つまり f の原始関数が存在する。

(2) F を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad \blacksquare$$

定理4.5 区間加法性　　定理4.2 可積分条件　　定理5.7 平均値定理

定理2.10 一様連続性　　定理5.6 Rolle

定理2.9 Weierstrass

定理1.3 上限存在　　定理1.9 Bolzano-Weierstrass

$\boxed{\text{実数とは何か？}}$

(途中サボりまくっている)

① $\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

は 実数とは何か？につながっている!!

〈平均値の定理の応用〉

系5.2

$f \in C^1(a,b)$,

fが(a,b)上単調増加

$\underset{同値}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in (a,b)$に対し $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$ $\boxed{\text{口}}$

証明

$\Rightarrow$) $\forall x \in (a,b)$, $h>0$に対し

$f(x+h)-f(x) \geq 0$ だから

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

$\Leftarrow$) $\forall x, x' \in (a,b)$に対し $x<x'$ ならば

平均値定理と仮定より $x < \exists \xi < x'$ s.t

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = f'(\xi)(x'-x) \geq 0$$

となるから $f(x) \leq f(x')$ となる。 □

系5.3

$f \in C^1(a,b)$

fが定数関数、すなわち $\exists c \in \mathbb{R}$ s.t.

$\forall x \in (a,b)$に対し $f(x)=c$

$\underset{同値}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in (a,b)$に対し $\frac{df}{dx}(x)=0$ $\boxed{\text{口}}$

証明

$\Rightarrow$) 演習

$\Leftarrow$) 系5.2より、fは単調増加かつ

単調減少になるので $\forall x, x' \in (a,b)$に対し

$x<x'$ ならば

$f(x)\le f(x')$ かつ $f(x')\le f(x)$

となる。従って $f(x)=f(x')$ となる ◻

〈極大・極小〉

定義5.2 (極大・極小)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$

fが$x=c$で極大 (極小)

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ $^\exists\delta>0$ s.t. $^\forall x\in(a,b)\setminus\{c\}$に対し

$0<|x-c|<\delta \Longrightarrow f(x)<f(c)$

$(f(x)>f(c))$ ◻

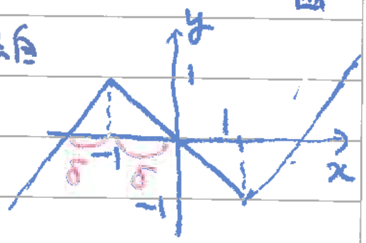
例5.2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を

$$f(x):=\begin{cases} x+2 & (-\infty<x\le -1)\\ -x & (-1<x\le 1)\\ x-2 & (1<x<\infty)\end{cases}$$

とおくと、fは$x=-1$ ($x=1$)で極大(極小)となる ◻

証明　極大のみ示す。極小は各自



$\delta=1$とおく。$^\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$に対し $0<|x+1|<1$

ならば $-2<x<-1$, $-1<x<0$ であり

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-2<x<-1)\\ -x & (-1<x<0)\end{cases}$$

$$< 1 = f(-1)$$

となるので f は $x=-1$ で極大となる.
なお. $0<\delta<4$ であれば. δ はなんでもよい (各自)
$\square$

極大・極小はもともと微分とはかんけいない.
しかし. 微分できると、もっとわかりやすい判定法がある.

定理5.9
$f\in C^1(a.b)$, $c\in(a.b)$
f が $x=c$ で極大 (or 極小)
$\Longrightarrow$ $f'(c)=0$ $\boxed{\text{!!}}$

証明
f が $x=c$ で極大のときに示す. 定義でとれる $\delta>0$ に対し $0<h<\delta$ ならば
$f(c+h)<f(c)$ だから

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

となるので $h\to+0$ として $f'(c)\leq 0$ がわかる.
$-\delta<h<0$ ならば $f(c+h)<f(c)$ だから

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

となるので $h\to-0$ として $f'(c)\geq 0$ がわかる.
よって $f'(c)=0$ となる $\square$

定理5.10 (極大・極小の判定)

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$

〈仮定〉

$\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (a,b)$ に対して

$c - \delta < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

$c < x < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0$

〈結論〉

f は $x = c$ で極大 $\boxtimes$

証明

$\forall x \in (a,b) \setminus \{c\}$ に対し、$0 < |x - c| < \delta$ を仮定する.

1. $c - \delta < x < c$ ならば 平均値定理より

$x < \exists \xi_1 < c$ s.t. $\dfrac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(\xi_1) > 0$

となるから、$f(x) < f(c)$ となる.

2. 逆に $c < x < c + \delta$ ならば 平均値定理より

$c < \exists \xi_2 < x$ s.t. $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_2) < 0$

となるから. $f(x) < f(c)$ となる.

どちらの場合も $f(x) < f(c)$ となるので f は $x = c$ で極大となる $\square$

〈微分積分の基本定理の応用〉

定理5-11

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a,b])$

$$\Rightarrow f(b)-f(a) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)dt\right)(b-a)$$

□

証明

$0 \leq t \leq 1$に対し $tb+(1-t)a$ は $t=0, 1$を代入すると

それぞれ a, bとなることに注意しておく。

$f(tb+(1-t)a)$ を tについて微分すると

合成関数の微分公式により

$$\frac{d}{dt}\left(f(tb+(1-t)a)\right) = \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)(b-a)$$

となる。両辺を $0 \leq t \leq 1$で積分すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tb+(1-t)a)dt \\
&= \left[f(tb+(1-t)a)\right]_0^1 \\
&= f(b)-f(a),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)(b-a)dt \\
&= \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)dt\right)(b-a)
\end{aligned}
$$

より

$$f(b)-f(a) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)dt\right)(b-a)$$

が得られる □

定理5.1は微分平均値定理より仮定が多いが、応用上はこれで十分なことが多い。

定理5.12

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\frac{df}{dx}$は(a,b)上有界

$$\Rightarrow |f(b)-f(a)| \leq \sup_{x \in [a,b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| |b-a|$$

証明

定理5.11より

$$|f(b)-f(a)| = \left|\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt\right| |b-a|$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left|\frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\right| dt\right) |b-a|$$

(∵三角不等式)

$$\leq \left(\int_0^1 \sup_{x \in [a,b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| dt\right) |b-a|$$

(∵積分の順序保存性)

$$= \sup_{x \in [a,b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| |b-a|.$$

□

§5.3 高階導関数とTaylorの定理

定義5.3

$f\in C^1(a,b)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能なとき

$$f''(x_0) := \lim_{h\to 0}\frac{\frac{df}{dx}(x_0+h)-\frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく。$f''(x_0)$ を f の x_0 における第2次微分係数という。また、$\frac{df}{dx}$ が (a,b) 上微分可能なとき、

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) := f''(x) \quad (x\in(a,b))$$

とかく。$\frac{d^2f}{dx^2}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の2階導関数という。 ☑

3次微分係数, 3階導関数 etc... も同様に定義する。以下 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$C^n(a,b) := \left\{ f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{は}(a,b)\text{上で}\ n\text{回微分可能},\ \frac{d^nf}{dx^n}\text{は}(a,b)\text{上連続} \right\}$$

とかく。

例5.2

$n\in\mathbb{N}$ に対し $\frac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める。

$x\in(-1,1)$ に対し

$$\frac{d(\arcsin)}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x) = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

$$= \frac{x}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{1-x^2}\frac{d(\arcsin)}{dx}(x)$$

より $f := \arcsin$ とおくと、

$$(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}(x) = x\frac{df}{dx}(x)$$

となる。両辺 n 回微分すると

$$(\text{左辺}) = (1-x^2)\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) - 2nx\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x)$$

$$- n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

$$(\text{右辺}) = x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + n\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

となるから、$x=0$ を代入すると

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) - n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(0) = n\frac{d^nf}{dx^n}(0),$$

すなわち

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) = n^2\frac{d^nf}{dx^n}(0)$$

となる。

$f(0)=0$, $\frac{df}{dx}(0)=1$ より漸化式をとくことで $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} \dfrac{d^{2m}f}{dx^{2m}}(0) = 0 \\ \dfrac{d^{2m+1}f}{dx^{2m+1}}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2 \end{cases}$$

が得られる. ☑

定理5.13 (Taylorの定理)

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a,b)$, $\dfrac{d^k f}{dx^k} \in C([a,b])$ $(k=0,1,2,\dots,n)$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

とかいたときに, $a < {}^\exists\theta < b$ s.t.

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n.$$ ☑

注意5.6

定理5.13で $n=1$ とすると, $a < {}^\exists\theta < b$ s.t.

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となる. これは微分平均値定理(定理5.7)である. ☑

証明

$n=2$ で示す. $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対し

$$\varphi(x) := f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \left(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}$$

とおくと

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)$$

となり, $\varphi \in C^1(a,b) \cap C([a,b])$ となるから.

Rolleの定理より

$$a <^{\exists}\theta < b \quad \text{s.t.} \quad \varphi'(\theta) = 0$$

となる. 一方

$$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'(x)}{1!} - 2\left(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{b-x}{(b-a)^2}$$

となるから

$$0 = \varphi'(\theta) = \frac{f''(\theta)}{1!}(b-\theta) - 2\left(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{b-\theta}{(b-a)^2}$$

より

$$\frac{f''(\theta)}{2!}(b-a)^2 = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)$$

がわかる. □

<u>定理 5.14</u> (Taylor-Maclaurin展開)

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(-1,1)$, $x \in (-1,1)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)x^n$$

$$\Rightarrow R_n(x) \to 0 \quad (x \to 0)$$

証明

$\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ に対し、Taylor の定理から

$0 < |\theta_x| < |x|$ となる $\theta_x \in \mathbb{R}$ がとれて

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}x^n$$

とできる。このとき、$x \to 0$ とすると $\theta_x \to 0$ となる。

よって

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)\right)x^n$$

から

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)\right) \to 0 \quad (x \to 0)$$

となる。 □

例5.4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

証明

Taylor-Maclaurin 展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3$$

を考えると、$R_3(x) \to 0 \quad (x \to 0)$. よって

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} + R_3(x) \to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)$$ □

例15.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{3}$$ 四

証明

$\log(1+x)'=\frac{1}{1+x}$, $\log(1+x)''=\frac{-1}{(1+x)^2}$

$\log(1+x)'''=\frac{2}{(1+x)^3}$ より.

$$\log(1+x)=\log(1)+x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+R_3(x)x^3$$

と展開できて $R_3(x)\to 0$ $(x\to 0)$. よって

$$\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{3}+R_3(x)\to\frac{1}{3}$$

$(x\to 0)$

$x=0$ 以外の極限や $x\to\infty$ などの極限を求める問題については平行移動や $\frac{1}{x}$ を考えるなどをして, $x\to 0$ の問題におきかえれば, 上記の手法が利用できることがある.

§5.4 de l'Hospital の定理

例5.6

$f, g \in C^1(-1,1)$, $f(0)=g(0)=0$, $g'(0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$ 例

証明

Taylor-Maclaurin 展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_f(x)x$$
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + R_g(x)x$$

を考えると $R_f(x), R_g(x) \to 0 \quad (x\to 0)$ となる.

従って

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)+f'(0)x+R_f(x)x}{g(0)+g'(0)x+R_g(x)x}$$
$$= \frac{f'(0)+R_f(x)}{g'(0)+R_g(x)} \quad (\because f(0)=g(0)=0)$$
$$\to \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad (x\to 0)$$ □

例5.6 より $f(0)=g(0)=0$ つまり

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となっているようにみえる. このことが正しいことを主張するのが de l'Hospital の定理である.

定理5.15 (de l'Hospitalの定理)

$a \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$

(1) $f(x), g(x) \to 0 \quad (x \to a)$

↖不定形の条件

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

(2) $f(x), g(x) \to \infty \quad (x \to a)$

↖ 不定形の条件

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \blacksquare$$

標語的にいうと

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が 不定形 ならば

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる.

例5.7

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を de l'Hospitalの定理を用いて示す.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{の不定形}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{の不定形}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad \left(\because \tfrac{0}{0} \text{の不定形}\right) \quad \blacksquare$$

注意5.7

例5.7で

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない。de l'Hospital の定理は極限が不定形のときしか使ってはいけない。

定理5.15 (de l'Hospital の定理)の直観的理由

Taylor-Maclaurin 展開より

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R_f(x)(x-a)$$

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+R_g(x)(x-a)$$

と形式的にかけば $R_f(x), R_g(x)\to 0\ (x\to a)$。

また $f(a)=g(a)=0$ となるから

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+R_f(x)(x-a)}{g'(a)(x-a)+R_g(x)(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)+R_f(x)}{g'(a)+R_g(x)}$$ ← ここは 0になる

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる。これは厳密な証明ではないし、$f(a)$, $g(a)$ や $f'(a)$, $g'(a)$ が存在するかどうかそもそもわからないので Taylor-Maclaurin 展開も正しくない。実際には Cauchy の平均値定理を用いて、これらの議論を正当化する必要がある。詳細は、吹田・新保 (p.50〜52) を参照せよ。

§5.5 凸関数

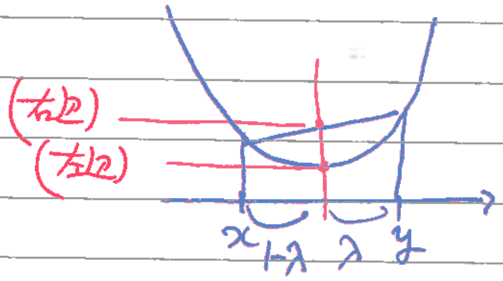
定義5.4 (凸関数)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$上凸関数

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x, y\in[a,b]$, $0<{}^\forall\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

☑



定理5.16

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$.

f が $[a,b]$上凸関数

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{df}{dx}$ が (a,b) 上単調増加

☑

系5.4

$f\in C([a,b])\cap C^2(a,b)$, $\frac{d^2f}{dx^2}\geq 0$

$\Longrightarrow$ f は $[a,b]$上凸関数 ☑

$\because$ $\frac{d^2f}{dx^2}\geq 0$ より $\frac{df}{dx}$ は (a,b) 上単調増加

となるので定理5.16を用いればよい

□

定理 5.16の証明

($\Leftarrow$) のみ示す. $x, x' \in (a.b)$ が $x < x'$

ならば $0 < {}^{\forall}\lambda < 1$ に対し

$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') - (\lambda + (1-\lambda)) f(\lambda x + (1-\lambda)x')$

$= \lambda\,(f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)x'))$

$\quad + (1-\lambda)(f(x') - f(\lambda x + (1-\lambda)x'))$

$= \lambda\, f'(\theta_1)\,(x - (\lambda x + (1-\lambda)x'))$

$\quad + (1-\lambda) f'(\theta_2)\,(x' - (\lambda x + (1-\lambda)x'))$

$(x < {}^{\exists}\theta_1 < \lambda x + (1-\lambda)x' < {}^{\exists}\theta_2 < x')$

($\because$ 平均値定理)

$= \lambda(1-\lambda) f'(\theta_1)\,(x - x')$

$\quad + \lambda(1-\lambda) f'(\theta_2)\,(x' - x)$

$= \underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\geq 0}\,\underbrace{(x'-x)}_{\geq 0}\,\underbrace{(f'(\theta_2) - f'(\theta_1))}_{\geq 0}$

≥ 0 ($\because$ f' は単調増加)

となる. 従って $\lambda + (1-\lambda) = 1$ より

$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$

$\quad \geq f(\lambda x + (1-\lambda) x')$

がわかった. $x > x'$ のときも同じように

計算すればよい $\square$

例5.8 (Youngの不等式)

$1 < p, q < \infty$ が $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ をみたすとする。

このとき、$a, b > 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つ 図

証明

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) := -\log x \ (x \in (0,\infty))$

で定めると $\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0$ より、系5.4から

fは凸関数である。従って $x, y > 0$ と

$0 < \lambda < 1$ に対し定義5.4から

$-\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda \log x - (1-\lambda)\log y$

より

$$\log x^{\lambda} y^{(1-\lambda)} \leq \log(\lambda x + (1-\lambda) y),$$

すなわち

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$$

を得る。$\lambda = \frac{1}{p}$ とおけば $1-\lambda = \frac{1}{q}$ であり

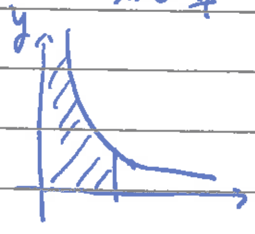
$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

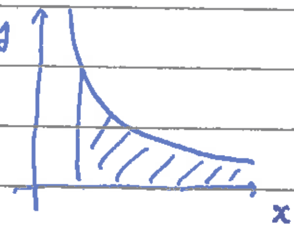
だから $x = a^p$, $y = b^q$ とおくことで

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が得られる。 □

第6章 広義積分





有界でない関数　　無限区間

どうやって積分を定義するのが妥当か？

§6.1 広義積分と例

例6.1

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad (x\in(0,1])$$

で定めるとき、$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 f(x)dx$ を
どう定めればよいか？を考える。$x=0$ で
$f(x)$ は定義できない(発散している)ことに注意
せよ。しかし、$\forall\varepsilon>0$ に対し $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ は定まるから

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

と定めるのが一つの方法だろう。

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx=\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

より

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}})=2$$

とすればよいだろう　∎

このアイデアを一般化しよう。

定義6.1（広義積分）
$f : (a,b] \to \mathbb{R}$，$(a,b]$ 上連続．
このとき
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
と定義する．$\int_a^b f(x)dx$ を広義積分といい，極限が存在するとき，$\int_a^b f(x)dx$ は収束するという．極限が存在しないとき $\int_a^b f(x)dx$ は発散するという　$\boxtimes$

例6.2
$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ を求める．$\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ は $x=0$ で定義できないから
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$$
と2つにわけて広義積分を求めなければいけない
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2 \quad (\text{各自})$$
より
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2+2=4$$
となる　$\boxtimes$

例6.3

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx \text{ は発散する.}$$

$\boxed{}$

証明

$\frac{1}{x}$ は $x=0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$$

と2つにわける.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} \left[\log|x| \right]_{-1}^{-\varepsilon_1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} \log \varepsilon_1 = -\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} \left[\log|x| \right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} (-\log \varepsilon_2) = \infty$$

となり, それぞれの広義積分は収束しない. □

注意6.1

例6.3で正しそうにみえる次の計算

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \left[\log|x| \right]_{-1}^{1} = \log|1| - \log|-1| = 0$$

($x=0$ で定義できないことを認識していない)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

(2つの広義積分を同じ $\varepsilon > 0$ で表している)

は正しくない.

$\boxed{}$

例 6.4

$f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \qquad (x \in [1,\infty))$$

で定義する。このとき、$\int_1^\infty f(x)\,dx$ をどのように定めればよいか？を考えよ。$^\forall M > 1$ に対し

$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx$ は定まるから

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^\infty f(x)\,dx$$

と定めるのが一つの方法だろう。

$$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{M}+1$$

より

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right) = 1$$

とすればよいだろう　□

このアイデアを一般化する。

定義 6.2（広義積分）

$f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$　$[a,\infty)$ 上連続

このとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

で定義する。$\int_0^\infty f(x)\,dx$ を広義積分といい、

極限が存在するとき $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するという。

極限が存在しないとき、$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は発散するという　□

$\alpha>0$ に対し, $\frac{1}{x^\alpha}$ の広義積分は重要である.

定理6.1

$\alpha>0$ に対し、次が成り立つ

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & (0<\alpha<1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha>1) \\ \infty & (0<\alpha\leq 1) \end{cases}$

$\boxtimes$

証明は演習とする. $\alpha=1$ のときに注意せよ.

例6.5 (Gauss積分)

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する

$\boxtimes$

証明

1. $x\geq 0$ に対し $e^{-x^2}\geq 0$ より

$\displaystyle\int_0^M e^{-x^2}dx$ は $M>0$ について単調増加

である. 従って $\int_0^M e^{-x^2}dx$ が $M>0$ について有界であることをいえばよい.

2. $\xi\geq 1$ に対し $\xi e^{-\xi}\leq 1$ だから

(各自). とくに $\xi=x^2$ として

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

である. 従って $M>1$ に対して

$$\int_1^M e^{-x^2}dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2}dx$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad (\because \frac{1}{x^2} \geq 0)$$

$$= 1 \quad (\because 定理6.1)$$

だから、$\int_1^M e^{-x^2}dx$ は $M>1$ に対して有界となる。

$$\int_0^M e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^M e^{-x^2}dx$$

より $\int_0^M e^{-x^2}dx$ は $M>0$ について有界となるので $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する □

注意6.2

実は

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。この広義積分は、偏差値などの確率・統計、温度分布や濃度分布などの偏微分方程式など、様々な分野で関係のある積分である。なお、不定積分

$$\int_0^x e^{-y^2}dy$$

は x の簡単な(積分を含まない)関数ではかけないことも知られている。

§6.2 絶対収束と条件収束

以下、話をかんたんにするため、連続関数 $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ のみを考える。このとき

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \quad と \quad \int_0^\infty f(x)dx$$

が収束するかどうかを調べたい。

例 6.6

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,\infty)$ に対し

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

とおくと、f は $[0,\infty)$ 上連続である。このとき、

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束、$\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散

証明

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示す。

$M, M' > 0$ に対し

$$\left|\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{M'} \frac{\sin x}{x}dx\right|$$

$$= \left|\int_{M'}^M \frac{\sin x}{x}dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_{M'}^M - \int_{M'}^M \frac{\cos x}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \left|\int_{M'}^M \frac{1}{x^2}dx\right| \quad (\because 三角不等式)$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) \to 0 \quad (M, M' \to \infty)$$

だから、Cauchyの収束判定条件より

$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx$ は存在する。すなわち

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する。

2. $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ が発散することを示す。

$n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$
$$\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

となる。$l\in\mathbb{N}$ に対し、$n=2^l+1$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots}_{2つ}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{2^l}}_{2^{l}つ}$$
$$=l+1$$

となるので $l\to\infty$ とすると $n\to\infty$ となり

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geq\frac{2}{\pi}(l+1)\to\infty\quad(l\to\infty)$$

だから $\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する

□

定義6.3（絶対収束，条件収束）

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$，$[0,\infty)$上連続

(1) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束 $\underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束

(2) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が条件収束 $\underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するが絶対収束しない。

例6.5は絶対収束，例6.6は条件収束する例である。

定理6.2

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$，$[0,\infty)$上連続

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束

$\Longrightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束

証明

$M, M' > 0$ に対し，絶対収束性から，

$$\left|\int_0^M f(x)\,dx - \int_0^{M'} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{M'}^M f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{M'}^M |f(x)|\,dx\right| \quad (\because 三角不等式)$$

$$\to 0 \qquad (M, M' \to \infty)$$

より，Cauchyの収束判定条件より

$\lim_{M\to\infty} \int_0^M f(x)\,dx$ は収束する $\square$

絶対収束の判定条件を与えよう

定理6.3

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $[0,\infty)$上連続

〈仮定〉

$^\exists\lambda>1,\ ^\exists K>0$ s.t. $^\forall x\in[0,\infty)$に対して

$$x^\lambda|f(x)|\leq K$$

〈結論〉

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束 ☒

証明

$M>0$ について $\int_0^M |f(x)|\,dx$ は単調増加

($\because |f(x)|\geq 0$) だから $\int_0^M |f(x)|\,dx$ が $M>0$ について

有界であることをいえばよい. 仮定より

$$|f(x)|\leq\frac{K}{x^\lambda}\qquad(^\forall x\in[1,\infty))$$

だから $M\geq 1$ に対し

$$\int_1^M |f(x)|\,dx\leq\int_1^M\frac{K}{x^\lambda}\,dx$$

$$\leq K\int_1^\infty\frac{1}{x^\lambda}\,dx=\frac{K}{\lambda-1}\qquad(\because 定理6.1)$$

だから $\int_0^M |f(x)|\,dx=\int_0^1|f(x)|\,dx+\int_1^M|f(x)|\,dx$ に

注意すれば $\int_0^M|f(x)|\,dx$ は $M>0$ について有界となる. □

系6.1

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $[0,\infty)$上連続, $\lambda>1$

$\lim_{x\to\infty}x^\lambda f(x)$ が存在

$\Longrightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束 ☒

∵ $\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x)$ が存在するので

$x^{\lambda} f(x)$ は $[0,\infty)$ 上有界となる. 従って

定理 6.3 の仮定をみたす. □

例 6.7

$s>0$ に対して

$$\int_0^s e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

は収束（絶対収束）する ☒

証明

1 $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ を考える

$0<s<1$ のとき.

$$e^{-x} x^{s-1} \to \infty \quad (x \downarrow 0)$$

である. $0<x\leq 1$ に対し

$$x^{1-s}(e^{-x} x^{s-1}) = e^{-x} \leq 1$$

より

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_0^1 x^{s-1} dx = \frac{1}{1-s} < \infty$$

だから $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

$s\geq 1$ のとき. $e^{-x} x^{s-1}$ は $x=0$ で発散しない.

($\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する)

2. $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ を考える.

$$x^2 (e^{-x} x^{s-1}) = e^{-x} x^{s+1} \to 0 \quad (x\to\infty)$$

より. 系 6.1 から $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は

収束する. □

定義6.4 (Γ-関数)

$s>0$ に対し

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$$

を Γ関数 という。

命題6.2

Γ-関数について次が成り立つ。

(1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $s>0$ に対し $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 略

命題6.1 より

$\Gamma(1) = 1 = 0!$, $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = \Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3!$

となるので

$n \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma(n) = (n-1)!$

がわかる. つまり Γ-関数は 階乗を $(0,\infty)$ に拡張したものである.