微分積分学 B 中間試験問題

2016 年 12 月 1 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ. 問題 2 以降のそれぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ の導関数を $f'(x)$ とするとき, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ を求めよ.

(2) $\arcsin x$ を微分せよ.

(3) 次の関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. ただし, $a > 0$ は定数とする. 結果は t の関数でよい.

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

(4) 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ について考える.

(a) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(b) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ における法線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y = ax + b$ の形で書くこと.

(5) $x^2 \sin x$ の原始関数を一つ求めよ.

(6) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta - \theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta$ を求めよ.

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 + nk}{n^2 + k^2}$ を求めよ.

(8) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2(x+1)}$ とする. 次の $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ に入る値を答えよ.

(a) $f(x)$ は $x = \boxed{\text{A}}$ で極大値 $\boxed{\text{B}}$ をとる.

(b) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{C}}$ となる.

(9) $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で, 曲線 $y = 2\sin(2x)$ と曲線 $y = \sin^2(2x)$ を考える.

  (a) 曲線 $y = \sin^2(2x)$ 上の点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$ における接線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y = ax + b$ の形で書くこと.

  (b) この 2 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(10) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ は $[-1, 1]$ 上連続とする. f の不定積分の定義を述べよ.

(11) Riemann 積分可能であるが, $[-1, 1]$ 上連続でない $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ の例をあげよ.

(12) $[0, 1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の順序保存性とは何か？主張を述べよ.

(13) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $[0, 1]$ 上 Riemann 積分可能とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(14) $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ が $x = 1$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(15) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ に対して, $F : (0, 1) \to \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べよ.

(16) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能であるとする. このとき, Rolle の定理を述べよ.

(17) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ が $x = 0$ で極小であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の解答

(1) $2 + \sqrt{2}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $-\tan t$

(4) (a) $\frac{\pi}{6}$

  (b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$

(5) $(2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$

(6) $\frac{1}{2}$

(7) $4 - \pi + \frac{1}{2}\log 2$

(8) (a) $\boxed{\mathrm{A}} = -1 - \sqrt{2}$, $\boxed{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} - \frac{3}{2}$

  (b) $\boxed{\mathrm{C}} = \frac{3}{4} - \log 2$

(9) (a) $y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{3}{4}$

  (b) $2 - \frac{\pi}{4}$

問題 2.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ は $[-1, 1]$ 上連続とする. このとき, f の $[-1, 1]$ 上の Riemann 積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ の定義を述べよ. ただし,「分割」,「Riemann 下積分」,「Riemann 上積分」の定義を書くこと.

問題 3.

連続な関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0, 1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x = 1$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $2\pi \displaystyle\int_{0}^{1} xf(x)\, dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 4.

$f = f(x) : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ は $x = 0$ で微分可能, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $y = f(0) \in \mathbb{R}$ で微分可能であるとする.

(1) f が $x = 0$ で微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) 合成関数の微分公式

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(0) = \frac{dg}{dy}(f(0))\frac{df}{dx}(0)$$

を上の同値条件を用いて証明せよ.

問題 5.

下記の事柄を証明せよ.

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して $(\cos)'(x) = -\sin x$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$ と定めると, f は $x = 0$ で微分可能でない.

(3) $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $a < b$ に対して, 部分積分公式

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\, dx + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

が成り立つ. ただし, 微分積分学の基本定理をどこで使ったかを明記せよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.