微分積分学 B 中間追試験問題

2016 年 12 月 8 日 第 5 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ. 問題 2 以降のそれぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $x^{x+1} - 1$ を微分せよ.

(2) $\arctan x$ を微分せよ.

(3) $f(x) = \arccos x$ とおくとき, $f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x}\,dx$ を求めよ.

(5) $f(x) = xe^{3x}$ とする. $-1 < a < 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = a$, $x = a+1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を $S(a)$ とする.

(a) xe^{3x} の原始関数を一つもとめよ.

(b) $S(a)$ を求めよ.

(c) $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ.

(6) 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ を考える.

(a) $f(1)$ を求めよ.

(b) $(1, f(1))$ における接線の方程式を求めよ. なお, 答えは一次関数 $y = ax + b$ の形で書くこと.

(c) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を求めよ.

(d) $x > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\left(f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ を求めよ.

(e) $x > 0$ に対して $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ.

(7) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ は $[-1,1]$ 上連続とする. f の不定積分の定義を述べよ.

(8) Riemann 積分可能であるが, $[0,2]$ 上連続でない $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ の例をあげよ.

(9) $[-1,1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？主張を述べよ.

(10) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ は $[-1,1]$ 上 Riemann 積分可能とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(11) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$ が $x=-1$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(12) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $g:(0,1)\to\mathbb{R}$ は $(0,1)$ 上微分可能であるとする. このとき, すべての $x\in(0,1)$ に対して, $f(x)\le g(x)$ であるが, $f'(x)\le g'(x)$ とならない f, g の例をあげよ.

(13) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする. このとき, 平均値定理を述べよ.

(14) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$ が $x=1$ で極大であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の解答

(1) $x^{x+1}(\log x+1+\frac{1}{x})$

(2) $\frac{1}{1+x^2}$

(3) $-4\sqrt{3}$

(4) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(5) (a) $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}$
   (b) $S(a)=\frac{1}{9}e^{3a}(3(1+e^3)a-1+2e^3)-\frac{2}{9}$
   (c) $a=-\frac{e^3}{e^3+1}$

(6) (a) $\frac{\pi}{4}$
   (b) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$
   (c) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
   (d) 0
   (e) $\frac{\pi}{2}$

問題 2.

$f:[0,2]\to\mathbb{R}$ に対して, f が $[0,2]$ 上 Riemann 積分可能であることの定義を述べよ. ただし, 「分割」,「Riemann 下積分」,「Riemann 上積分」の定義を書くこと.

問題 3.

連続関数 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ はすべての $x\in[0,2]$ に対して $f(x)\geq 0$ をみたすとする.

(1) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ を区分求積法を用いて表せ. ただし, 分割数を N とすること ($2N$ としないこと). 答えのみでよい.

(2) x 軸, y 軸, $x=2$, グラフ $y=f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\displaystyle 2\pi\int_0^2 xf(x)\,dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 4.

$f=f(x):(-2,2)\to\mathbb{R}$ は $x=1$ で微分可能, $g=g(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $y=f(1)\in\mathbb{R}$ で微分可能であるとする.

(1) f が $x=1$ で微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) 合成関数の微分公式

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(1)=\frac{dg}{dy}(f(1))\frac{df}{dx}(1)$$

を上の同値条件を用いて証明せよ.

問題 5.

下記の事柄を証明せよ.

(1) $x\in\mathbb{R}$ に対して $(\sin)'(x)=\cos x$

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & (x\geq 0)\\ -\sqrt[3]{-x} & (x<0)\end{cases}$ と定めると, f は $x=0$ で微分可能でない.

(3) $f,g\in C^1(\mathbb{R})$, $a<b$ に対して, 部分積分公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx+f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

が成り立つ. ただし, 微分積分学の基本定理をどこで使ったかを明記せよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.