微分積分学 B 試験問題

2017 年 1 月 19 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f(x) = 2e^{2+\frac{4}{3}\sin^2 x}\sin 2x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. ただし, e は自然対数の底とする.

(a) $f'(x)$ を求めよ.

(b) 点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ. なお, 答えは $y = ax + b$ の形で書くこと.

(c) 関数 $f(x)$ の増減表を書け. なお, 変曲点は求めなくてよい.

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$ について, I, J を求めたい.

(a) $I + J$ と $I - J$ を求めよ.

(b) I, J を求めよ.

(3) f, g は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能な関数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{d^7(fg)}{dx^7}(x)$ の $\dfrac{d^4 f}{dx^4}(x)\dfrac{d^3 g}{dx^3}(x)$ の係数を求めよ.

(4) e^x の Taylor-Maclaurin 展開を $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いたとき, a_n を求めよ.

(5) $\cos x$ の Taylor-Maclaurin 展開を $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いたとき, $k \in \mathbb{N}$ に対して a_{2k} を求めよ.

(6) $\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^6 の項まで求めよ. 答えは

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \cdots$$

の形で答えよ.

(7) $a, b > 0$ に対して 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$ を求めよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$ を求めよ.

(9) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^5}$ を求めよ.

(10) 連続関数 $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

(11) 連続関数 $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

(12) $0 < \lambda < 1$ に対して $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^\lambda}\,dx$ を求めよ.

(13) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ を求めよ.

(14) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が条件収束する連続関数 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ の例をあげよ. 答えは $f(x) = \boxed{}$ の形で答えよ.

(15) Γ を Γ-関数とするとき, $\Gamma(4)$ を求めよ.

(16) $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx$ を α を用いて表せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めよ (答えのみでは得点を与えない).

問題 3.

$p>1$ に対して $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,\infty)$ に対して $f(x):=x^p$ と定める.

(1) f が凸関数であることの定義を述べよ.

(2) f が凸関数であることを示せ.

(3) $a,b\geq 0$ に対して $(a+b)^p\leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ を示せ.

(4) 連続関数 $g_1:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_2:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は

$$\int_0^\infty |g_1(x)|^p\,dx+\int_0^\infty |g_2(x)|^p\,dx<\infty$$

をみたすとする. このとき

$$\int_0^\infty |g_1(x)+g_2(x)|^p\,dx\leq 2^{p-1}\left(\int_0^\infty |g_1(x)|^p\,dx+\int_0^\infty |g_2(x)|^p\,dx\right)$$

となることを示せ.

問題 4.

$\lambda>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^\lambda}\,dx$ の定義を述べよ.

(2) 定義に基づいて $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^\lambda}\,dx$ が収束する $\lambda>0$ の必要十分条件を求め, 積分の値を求めよ (定義にそぐわない計算をしている場合には, 得点を与えない).

問題 5.

$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx$ が絶対収束することを示したい.

(1) $\xi\geq 1$ に対して, $e^{-\xi}\leq\dfrac{1}{\xi}$ を示せ.

(2) (1) を用いて, $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx$ が絶対収束することを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) (a) $-\frac{4}{3}e^{2+\frac{4}{3}\sin^2 x}(2\cos 2x+1)(\cos 2x-2)$

(b) $y=-4e^{\frac{10}{3}}x+2\pi e^{\frac{10}{3}}$

(c)

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{3}e^3$	$\nearrow$	$\sqrt{3}e^3$	$\searrow$	0

(d) $\frac{3}{2}(e^{\frac{10}{3}}-e^2)$

(2) (a) $I+J=\frac{\pi}{2}$, $I-J=0$

(b) $I=J=\frac{\pi}{4}$

(3) 35

(4) $\frac{1}{n!}$

(5) $\frac{(-1)^k}{(2k)!}$

(6) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\cdots$

(7) $\log a-\log b$

(8) 1

(9) ∞

(12) $\frac{1}{1-\lambda}2^{1-\lambda}$

(13) 1

(14) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(15) 6

(16) $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

問題 2 の答え

2

問題 3 の答え

(2) $f''(x)\geq 0$ を示せばよい.

(3) 定義から $f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$ である.

(4) $a=|f(x)|$, $b=|g(x)|$ に (3) を使い, $x\in[0,\infty)$ で積分する.

問題 4 の答え

(2) $\lambda>1$

問題 5 の答え

(2) $x\geq 1$ に対して $|e^{-x^2}\cos 2x|\leq e^{-x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ となることを用いる.