# 微分積分学AB 講義ノート(抜粋)

**このプリントについて.** このノートは微分積分学 AB の講義ノートにおける, 定義や定理, 講義で説明しなかった定理の証明などを抜き出したものである. 定義や定理の意味, 理解すべき証明はここでは述べていないため, このノートのみで勉強をするのは不十分である. 各自, ノートや参考文献等を元にして, 自分用のノートを作成して欲しい. なお, 記述の間違い等あることに注意をすること.

# 第 1 章

# 実数と数列の極限

## 1.1. イントロダクション –円周率を求める–

**定義 1.1** (円周率)**.**
すべての円について, **円周率** $\pi$ を

$$\pi := \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

で定める.

**注意 1.1.**
どの円についても, $\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は等しい.

**注意 1.2.**
$A = B$ は「$A$ と $B$ が等しい」と「$A$ を $B$ で定める」の二つの意味がある. この違いを明確にするため,

$$A = B \quad A \text{ と } B \text{ が等しい}.$$
$$A := B \quad A \text{ を } B \text{ で定める}.$$

と書きわけることにする.

**定理 1.1** (Archimedes)**.**
すべての自然数 $n$ に対して

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}, \tag{1.1}$$

$$s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n \tag{1.2}$$

が成り立つ.

**証明.**
**1.** $s_n$ を求める. 内接する正 $6 \times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6 \times 2^{n-1}) \times \left( 2 \times \sin \frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}} \right) = 6 \times 2^n \sin \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

となる．

**2.** $S_n$ を求める．外接する正 $6\times 2^{n-1}$ 角形の一辺の長さは $2\times 1\times \tan\dfrac{\pi}{6\times 2^{n-1}}$ となるので

$$s_n = (6\times 2^{n-1})\times\left(2\times\tan\frac{\pi}{6\times 2^{n-1}}\right) = 6\times 2^n\tan\frac{\pi}{3\times 2^n}$$

となる．

**3.** (1.1) を示す．倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) - 1,\\ \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_n}+\frac{1}{s_n} &= \frac{1}{6\times 2^n\tan\frac{\pi}{3\times 2^n}} + \frac{1}{6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}}\\ &= \frac{\cos\frac{\pi}{3\times 2^n}+1}{6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}}\\ &= \frac{2\cos^2\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} \quad (\because\ \text{倍角公式})\\ &= \frac{2}{6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}} = \frac{2}{S_{n+1}}\end{aligned}$$

がわかる．

**4.** (1.2) を示す．倍角の公式より

$$\begin{aligned}S_{n+1}s_n &= \left(6\times 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\left(6\times 2^n\sin\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)\\ &= \left(6\times 2^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}}\right)\left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)\\ &= \left(6\times 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)^2 = S_{n+1}\end{aligned}$$

が得られる． □

**例 1.1.**
$n = 2$ のとき, $s_2$, $S_2$ を求める.

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{s_1}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{6}} \\ &= 2 \div (1 \div 4\sqrt{3} + 1 \div 6) \simeq 6.4310, \end{aligned}$$

$$s_2 = \sqrt{S_2 s_1} = \sqrt{6.4310 \times 6} \simeq 6.2117$$

となる.

## 1.2. 実数の構成

詳細は白岩 [Shi, p.1–11], 吹田・新保 [SuiShi, p.1–5] を参照せよ.

### 1.2.1. 集合論の基礎.
詳細は, 例えば [Mzn] を参照せよ.

**例 1.2** (よく使う集合)**.**
次の集合はどの教科書, 専門書でも標準的に使われる.

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\emptyset$: 元が一つもない集合 (**空集合**という)

**例 1.3.**

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{9}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

**例 1.4** (開区間, 閉区間)**.**
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の記号を用いる.

(1) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **開区間**という
(2) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **閉区間**という.

**例 1.5.**
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ となる.

**1.2.2. Dedekind の切断.** 詳細は小平 [Kod] を見よ.

**定義 1.2** (有理数の切断)**.**

$\mathbb{Q}$ の部分集合 $A$, $B$ が**有理数の切断**であるとは, 次の 4 条件をみたすことをいう.

**1.** $A \cup B = \mathbb{Q}$.
**2.** $A \cap B = \emptyset$.
**3.** すべての $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.
**4.** $A$ に最大値はない. すなわち, すべての $a \in A$ に対して, $a' \in A$ が存在して, $a < a'$ が成り立つ.

このとき, $\langle A, B \rangle$ と書くことにする.

**例 1.6.**

$A_1 := \{a \in \mathbb{Q} : a < \frac{1}{2}\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b \geq \frac{1}{2}\}$ とすると, $\langle A_1, B_1 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, $B_1$ に最小値 $\frac{1}{2}$ がある.

**例 1.7.**

$A_2 := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0$ または $a^2 < 2\}$, $B_1 := \{b \in \mathbb{Q} : b > 0$ かつ $b^2 \geq 2\}$ とすると, $\langle A_2, B_2 \rangle$ は有理数の切断になる. このとき, $B_1$ に最小値はない.

**定義 1.3** (実数)**.**

有理数の切断を実数という. 実数全体のなる集合を $\mathbb{R}$ で表す.

**定義 1.4** (順序関係)**.**

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, 有理数の切断を用いて $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書く.
$x = y$ であるとは, $A = A'$ が成り立つことをいう.
$x \leq y$ であるとは, $A \subset A'$ が成り立つことをいう.
$x < y$ であるとは, 「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」が成り立つことをいう.

**定理 1.2** (有理数の稠密性)**.**

すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x < y$ ならば, ある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < q < y$ とできる.

**例 1.8.**

$x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{3}$ とするとき, $q := 1.6 \in \mathbb{Q}$ とすれば, $x < q < y$ とできる. 定理 1.2 は, この場合では, $y$ が $\sqrt{2}$ より少しでも大きければ, いつでも $q \in \mathbb{Q}$ をみつけて $x < q < y$ とすることができることを主張している.

**定理 1.2 の証明.**

**1.** $x, y \in \mathbb{R}$ が $x < y$ をみたすとし, $x, y$ は有理数ではないとする. 有理数の切断を用いて, $x = \langle A, B \rangle$, $y = \langle A', B' \rangle$ と書くと, $A \subset A'$ かつ $A \neq A'$ が成り立つ. 従って

$$A' \setminus A := \{a \in \mathbb{Q} : a \in A' \text{かつ} \, a \notin A\}$$

は空集合ではないから, $q \in A' \setminus A$ を一つ選ぶことができる. このとき, $x < q < y$ が成り立つことを示せばよい. $q$ に対する有理数の切断を $\langle A'', B'' \rangle$ と書くと

$$A'' := \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}, \qquad B'' := \{b \in \mathbb{Q} : q \leq b\}$$

となる.

**2.** $x < q$ を示す. すべての $a \in A$ に対して, $a \in A''$ を示せばよい. このとき, $q \notin A$ だったから, $q \in B$ であり, 有理数の切断の定義から, $a < q$ が成り立つ. 従って $a \in A''$ となる.

**3.** $q < y$ を背理法で示す. $q \geq y$ を仮定すると, $q \neq y$ より, $q > y$ だから, $A' \subset A''$ が成り立つ. $q \in A'$ より $q \in A''$ となり, $A''$ の定義から $q < q$ となることから矛盾が生じる.

**4.** $x, y$ がともに有理数のときは, $q = \frac{x+y}{2}$ とすればよい. $x$ が有理数で $y$ が無理数のとき, $\frac{x+y}{2}$ は無理数となるので, $\frac{x+y}{2} < q < y$ となる $q \in \mathbb{Q}$ を選べば, $x < q < y$ となる. $x$ が無理数で $y$ が有理数のときも同様に議論すればよい. $\square$

## 1.3. 実数の性質と上限. 下限

詳細は白岩 [Shi, p.1–11], 吹田・新保 [SuiShi, p.1–5] を参照せよ.

**定義 1.5** (有界)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, $A$ が**上に有界**であるとは「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \leq M$ が成り立つ」ことをいう. このときの $M$ を $A$ の**上界**という.

$A$ が**下に有界**であるとは「ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $a \geq m$ が成り立つ」ことをいう. このときの $m$ を $A$ の**下界**という.

$A$ が**有界**であるとは, 「ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ が成り立つ」ことをいう.

**例 1.9.**

$A := (0, 1)$ は有界である.

**例 1.10.**

$B := (0, \infty)$ は上に有界ではない.

**例 1.11.**

$C := (-\infty, 3)$ は下に有界ではない.

**定義 1.6.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, $A$ の**上界の集合** $A_u$ と**下界の集合** $A_l$ を

$$A_u := \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$
$$A_l := \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

と定める.

**注意 1.3.**

定義 1.6 の記号は一般的ではないので, 使うときは上界の集合, 下界の集合と明記すること.

**例 1.12.**

$A := [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ とするとき, $A$ の上界の集合 $A_u$ と下界の集合 $A_l$ は

$$\begin{aligned} A_u &= \{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \leq M\} \\ &= [1, \infty), \\ A_l &= \{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in [0,1) \text{ に対して } a \geq m\} \\ &= (-\infty, 0] \end{aligned}$$

となる.

**定義 1.7** (最大, 最小)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して $A$ の一番大きな数と一番小さな数をそれぞれ $A$ の**最大値**, **最小値**といい, $\max A$, $\min A$ と書く.

**例 1.13.**

$A := [0, 1)$ に対して, $\max A$ は存在しない. $\min A = 0$ となる.

**定義 1.8** (上限, 下限)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, $A$ の**上限** $\sup A$, **下限** $\inf A$ を, $A$ の上界の集合 $A_u$, 下界の集合 $A_l$ に対して

$$\sup A := \min A_u = \min\{M \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \leq M\}$$
$$\inf A := \min A_l = \min\{m \in \mathbb{R} : \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \geq m\}$$

により定義する.

**定理 1.3** (実数の連続性)**.**
上に有界な空でない実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は, 実数の上限 $\sup A$ が存在する.

**注意 1.4.**
定理 1.3 の「実数」を「有理数」に取りかえると成立しない. つまり, 定理 1.3 は実数と有理数の違いを表している.

**定理 1.4** (Archimedes の原理)**.**
すべての $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon N_\varepsilon > 1$ が成り立つ.

**定理 1.3 の証明.**
$A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とし, $A_u$ を $A$ の上界の集合とする. $C := \mathbb{Q} \setminus A_u$, $D := \mathbb{Q} \cap A_u$ として, 有理数の切断 $\alpha := \langle C, D \rangle$ を考える. 以下, $\alpha = \min A_u$, すなわち $\alpha = \sup A$ となることを示す.

**1.** すべての $a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$ を示す. そのために, 有理数の切断 $a = \langle A', B' \rangle$ を考える. $A' \subset C$ を示すために, 背理法を用いて, $q \in A'$ が存在して, $q \notin C$ と仮定する. すると, $q \in D$ より, $q \in A_u$ となり, $a \leq q$ がわかる. 他方, $a = \langle A', B' \rangle$ だから $q < a$ となり矛盾となるから, $A' \subset C$ がわかる. とくに, $\alpha \in A_u$ がわかった.

**2.** $\alpha = \min A_u$ を示す. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ を示す. $\alpha - \varepsilon < \alpha$ より, 有理数の稠密性から, $q \in \mathbb{Q}$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < q < \alpha$ とできる. 従って, $q < \alpha$ から $q \in C$ となり $q \notin A_u$ だから $\alpha - \varepsilon \notin A_u$ もわかる.

**1.**, **2.** より $\sup A$ が存在して, $\alpha = \sup A$ となることがわかる. □

**定理 1.4 の証明.**
背理法を用いて「ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\varepsilon_0 n \leq 1$」を仮定する. すると, $A := \{\varepsilon_0 n : n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界となるから, 定理 1.3(実数の連続性) により, $\alpha := \sup A$ が存在する. 従って, $\alpha - \varepsilon_0$ は上界ではないから, 「ある $\alpha_\varepsilon \in A$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < \alpha_\varepsilon$」 とできる. よって, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon$ とできるが,

$$\alpha - \varepsilon_0 < \alpha_\varepsilon = \varepsilon_0 n_\varepsilon \tag{1.3}$$

だから

$$\alpha < \varepsilon_0 (n_\varepsilon + 1) \tag{1.4}$$

となる. $n_\varepsilon + 1 \in \mathbb{N}$ より $\varepsilon_0(n_\varepsilon + 1) \in A$ となり, (1.4) から $\alpha = \sup A$ となることに矛盾していることがわかる. □

**例 1.14.**

$A := [0,1)$ に対して, $\sup A = 1$ となる.

**注意 1.5.**

存在をしめすことは「成り立つものを見つける」と同じことである. 例 1.14 の証明では, $1-\varepsilon < a_\varepsilon$ となる $a_\varepsilon \in A$ をみつければよい. $a_\varepsilon \in A$ より $0 \leq a_\varepsilon < 1$ をみたして, $1-\varepsilon < a_\varepsilon$ となるものをみつければよい.

**注意 1.6.**

例 1.14 の証明で, $a_\varepsilon := 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ とすると $\varepsilon > 0$ が大きいときに $1 - \dfrac{\varepsilon}{2} < 0$ となってしまうことがある. すると, $a_\varepsilon \notin A$ となってしまうので, これを防ぐために, $a_\varepsilon := \max\left\{1 - \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$ としてある.

## 1.4. 数列の収束・発散

詳細は白岩 [Shi, p.11–16, p.19], 吹田・新保 [SuiShi, p.5–8] を参照せよ.

**定義 1.9** (数列の極限 ($\varepsilon$-$N$ 論法))**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 $a$ に**収束する**とは「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して [$n \geq N_\varepsilon$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$] が成り立つ」ことをいう. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 $a$ に収束するとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n := a$ とか $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ と書く.

$a_n \to a \quad (n \to \infty)$ を論理記号で書くと

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

となる.

**例 1.15.**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つ.

**例 1.16.**

$\dfrac{2n}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ.

**注意 1.7.**

例 1.15, 例 1.16 の証明で, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をみつける計算については, 実は証明では書かなくてもよい. しかし, 微分積分学や解析学における「評価する」という観点では非常に重要な部分である.

**例 1.17.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a$ に収束するとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ が成り立つ.

**証明.**

**1.** 定義の $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をみつけるために, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ をあとで決める. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より, $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N_1\Longrightarrow|a_n-a|<\varepsilon$$

とできる. そこで, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して, $N_\varepsilon\geq N_1$ かつ $n\geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&\leq\frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)\\&\quad+\frac{1}{n}(|a_{N_1}-a|+\cdots+|a_n-a|)\\&\leq\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)\\&\quad+\frac{1}{n}(\varepsilon(n-N_1+1))\\&\leq\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)+\varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって, $\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)<\varepsilon$ となるように $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ を選べば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|&\leq\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)+\varepsilon\\&\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

となる. この評価をもとにして, 厳密な証明を書く.

**2.** $\varepsilon>0$ に対して, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より, $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$n\geq N_1\Longrightarrow|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{1.5}$$

とできる. 次に, $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ を $N_\varepsilon\geq N_1$ かつ

$$\frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|)<\frac{\varepsilon}{2}\tag{1.6}$$

となるようにとる (厳密には Archimedes の原理). このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}(|a_{N_1}-a|+\cdots+|a_n-a|) \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon}(|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1-1}-a|) \\
&\quad + \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}(n-N_1+1)\right) \quad (\because n \geq N_1 \text{と } (1.5)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad (\because n \geq N_\varepsilon \text{と } (1.6)) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. 従って, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ が成り立つ. □

**定義 1.10** (数列の発散)**.**

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は**発散する**という.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**(正の) 無限大に発散する**とは「任意の実数 $M \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n > M]$ が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n > M$$

となる. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とか

$$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

と書くことがある.

収束しない数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が**負の無限大に発散する**とは「任意の実数 $m \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n \geq N_0$ ならば $a_n < -m]$ が成り立つ」ことをいう. これを論理記号で書くと

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ に対して } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N_0 \Longrightarrow a_n < -m$$

となる. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とか

$$a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

と書くことがある.

**定理 1.5.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 次が成り立つ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 収束先はただ一つしかない. つまり, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ ならば, $a = b$ が成り立つ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}$ が収束するならば, 有界である. つまり, ある $M > 0$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b$ に収束するならば, $a \leq b$ が成り立つ.

**証明.**
(1) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ よりある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$n \geq N_2 \Longrightarrow |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ となるので

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.7}$$

が成り立つ. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|a_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ だから $a_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ となるので,

$$a_{N_0} < \frac{1}{2}8a + b \tag{1.8}$$

が成り立つ. 従って, (1.7), (1.8) より

$$\frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b)$$

となり矛盾する. $a < b$ の場合も同様にできるので, 各自確かめよ.

(2) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく. $\varepsilon := 1 > 0$ ととる. すると, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ が成り立つ. 三角不等式を用いると, $n \geq N_1$ ならば

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \tag{1.9}$$

が成り立つ. そこで, $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_1-1}|, 1+|a|\}$ とおく. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $1 \leq n < N_1$ のときは $|a_n| \leq M$, $n \geq N_1$ のときは (1.9) より $|a_n| \leq 1 + |a| \leq M$ となるので, $|a_n| \leq M$ が成り立つ.

(3) 背理法で示す. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \frac{1}{2}(a-b)$ とおく. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ より, $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$$

が成り立つ. そこで, $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $N_0 \geq N_1$ より $|a_{N_0} - a| < \frac{1}{2}(a-b)$ が成り立つから, $a_{N_0} - a > -\frac{1}{2}(a-b)$ より

$$a_{N_0} > \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.10}$$

が得られる. 他方, $N_0 \geq N_2$ より $|b_{N_0} - b| < \frac{1}{2}(a-b)$ が成り立つから, $b_{N_0} - b < \frac{1}{2}(a-b)$ より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.11}$$

が得られる. よって, (1.10) と (1.11) より

$$b_{N_0} < \frac{1}{2}(a+b) < a_{N_0}$$

となり, 「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \leq b_n$」に矛盾する. □

**注意 1.8.**
定理 1.5 の (3) の不等号 $\leq$ を $<$ にかえることはできない.

## 1.5. 極限の性質

詳細は白岩 [Shi, p.16–20], 吹田・新保 [SuiShi, p.8–9] を参照せよ.

**定理 1.6.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 次が成り立つ.

(1) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to \infty)$.
(2) $a_n - b_n \to a - b$ $(n \to \infty)$.
(3) $a_n b_n \to ab$ $(n \to \infty)$.

(4) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0,\ b \neq 0$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}\ (n \to \infty)$.

**証明.**

(4) のみ示す. $b_n \to b\ (n \to \infty)$ かつ $|b| \neq 0$ より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_1$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ とできるので, とくに $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ が成り立つ.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $a_n \to a,\ b_n \to b\ (n \to \infty)$ より, ある $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N_2$ ならば $|a_n - a| < \dfrac{|b|}{4}\varepsilon$, $n \geq N_3$ ならば $|b_n - b| < \dfrac{|b|^2}{4|a|+1}\varepsilon$ とできる. $N_0 := \max\{N_1, N_2, N_3\} \in \mathbb{N}$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_0$ ならば

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| \\
&= \left|\frac{(a_n - a)b - a(b_n - b)}{b b_n}\right| \\
&\leq \frac{|a_n - a||b| + |a||b_n - b|}{|b||b_n|} \qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq \frac{2}{|b|^2}(|b||a_n - a| + |a||b_n - n|) \\
&< \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|a||b|^2}{4|a|+1}\right) \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{|b|^2}\left(\frac{|b|^2}{4} + \frac{|b|^2}{4}\right) = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

すなわち, $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \varepsilon$ が成り立つ. □

**注意 1.9.**

定理 1.6 の証明の 1. の議論は書く必要のない考察部分である. そのため, 教科書にも書いていないことがある. しかし, 証明を自分で書けるようにするには, この 1. のアイデアを理解する必要がある. 教科書を自分で読むときには, この 1. の部分を補うことでより深く勉強できる.

**定理 1.7** (はさみうちの原理)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ を

みたすとする. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ をみたすならば, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ.

## 1.6. 数列の収束条件

詳細は白岩 [Shi, p.20–26], 吹田・新保 [SuiShi, p.9–13] を参照せよ.

### 1.6.1. 単調数列.

**定義 1.11** (単調増加, 単調減少).
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調増加**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことをいう. 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (広義) **単調減少**であるとは, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq b_{n+1}$ が成り立つことをいう.

**定理 1.8.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界かつ単調増加であれば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に収束する. すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が成り立つ.

**例 1.18.**
数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおき, **自然対数の底**という.

### 1.6.2. コンパクト性定理.

**定義 1.12** (部分列).
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から順番をかえずに一部を抜き出した数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**といい, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

**例 1.19.**
$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := (-1)^n$ とおいて, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき.

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\} = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$$

や

$$\{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である.

**定理 1.9** (Bolzano-Weierstrass).
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする. このとき, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する.

**定義 1.13** (集積点)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $a \in \mathbb{R}$ が**集積点**であるとは, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ となることである.

**例 1.20.**
数列 $\displaystyle\left\{\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点は $0, \pm 1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である.

**定義 1.14** (上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上極限** $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$ と**下極限** $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ をそれぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

で定義する.

**注意 1.10.**
上極限, 下極限をそれぞれ $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} a_n$ と書くこともある.

**定理 1.10** (集積点と上極限, 下極限)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ最大, 最小の集積点となる.

**定理 1.11.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$ ならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である.

### 1.6.3. Cauchy 列と実数の完備性.

**定義 1.15** (Cauchy 列)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは, 「任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $[n, m \geq N_0$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon]$ が成り立つ」ことをいう.

**定理 1.12** (実数の完備性)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと, Cauchy 列であることは同値である.

**注意 1.11.**
実数の完備性は実数の連続性から証明した. そして, 注意 1.4 にもあるよう

に, 実数の連続性は実数と有理数の違いを表していることに注意した. 実は, 実数と有理数の違いは次にあげる 4 つの性質であり, さらにそれらの 4 つの性質はすべて同値であることが知られている. すなわち, どれを実数と有理数の違いとしてもよいことが知られている.

(1) 定理 1.3(実数の連続性)
(2) 定理 1.8(単調数列の収束性)
(3) 定理 1.9(Bolzano-Weierstrass)
(4) 定理 1.12 と定理 1.4(実数の完備性と Archimedes の原理)

### 1.6.4. 漸化式と極限.

**例 1.21.**
初期値 $s_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$ である連立漸化式

$$\frac{2}{S_{n+1}} = \frac{2}{S_n} + \frac{2}{s_n}, \quad s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n$$

で定められる $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

**注意 1.12.**
例 1.21 の数列が円周率と収束することを示すのは別の (難しい) 問題である.

**例 1.22.**
$r, q, x \in \mathbb{R}$, $r \neq \pm 1$ に対して

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + q \\ a_0 = x \end{cases}$$

で定められる $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $0 \leq |r| < 1$ のときに収束する.

**定理 1.13** (縮小写像の原理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ はある定数 $0 \leq L < 1$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}| \tag{1.12}$$

をみたすとする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である.

**証明.**

**1.** $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m > n$ ならば $|a_m - a_n| \leq \dfrac{1}{1-L}|a_{n+1} - a_n|$ となることを示す. 実際に

$$
\begin{aligned}
&|a_m - a_n| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\leq L|a_{m-1} - a_{m-2}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (\because\ (1.12)) \\
&\leq L^2|a_{m-2} - a_{m-3}| + L|a_{m-2} - a_{m-3}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (\because\ (1.12)) \\
&\leq \cdots \leq (L^{m-(n+1)} + L^{m-1-(n+1)} + \cdots + 1)|a_{n+1} - a_n| \quad (\because\ (1.12)) \\
&\leq \frac{1 - L^{m-n}}{1-L}|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{1-L}|a_{n+1} - a_n|
\end{aligned}
$$

が得られる. さらに

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &\leq L|a_n - a_{n-1}| \quad (\because\ (1.12)) \\
&\leq L^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq L^n|a_1 - a_0| \quad (\because\ (1.12))
\end{aligned}
$$

から,

$$
|a_m - a_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0| \tag{1.13}
$$

がわかる.

**2.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\dfrac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0| \to 0\ (n \to \infty)$ より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
n \geq N \text{ ならば } \frac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0| < \varepsilon \tag{1.14}
$$

とできる. したがって, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して, $m \geq n \geq N$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq \frac{L^n}{1-L}|a_1 - a_0| \quad (\because\ (1.13)) \\
&< \varepsilon \quad (\because\ (1.14))
\end{aligned}
$$

となるので, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は Cauchy 列となる. □

**注意 1.13.**

例 1.22 は直接漸化式を解いて極限を求めてもよい. なぜ, このような面倒な方法をとるのかというと, もっと複雑な (非線形問題)

$$
a_{n+1} = f(a_n)
$$

に対して, 一般項 $a_n$ が求められなくても, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するか調べられるからである.

**定理 1.14.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

**証明.**

**1.** $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) \leq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を示す. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $a_k \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ だから $-a_k \leq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ となる. $k \in \mathbb{N}$ について上限をとると $\sup_{k\in\mathbb{N}}(-a_k) \leq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ となるから, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) \leq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ がわかる.

**2.** $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) \geq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を示す. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $-a_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n)$ だから $a_k \geq -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n)$ となる. $k \in \mathbb{N}$ について下限をとると $\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \leq -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n)$ となるから, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) \geq -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ がわかる.

**3.** $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ を示す. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_k + b_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$$

となるから, $k \in \mathbb{N}$ について上限をとると $\sup_{k\in\mathbb{N}}(a_k+b_k) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ となるから $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ が成り立つ. □

**注意 1.14.**

定理 1.14 の (2) の証明をもう少し丁寧に書くと, 次のようになる.

$a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $b := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$, とおく. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a$, $b_n \leq b$ となるから $a_n + b_n \leq a + b$ となる. 従って, $a+b$ は $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界となるから, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leq a+b$ が成り立つ.

sup, inf の添字 $n$ は $k$ などにかえてもよいことに注意せよ. これは数列の和において $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + \cdots + a_N$ と添字をかえてもよいことと同じである.

**注意 1.15.**

定理 1.14 の (2) の不等号は等号にすることができない. 実際に $a_n := (-1)^n$,

$b_n := (-1)^{n+1}$ とすると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n + b_n = 0$ となるから $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = 0$ である. しかし, $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = 1$ となるから

$$0 = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \neq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = 2$$

となる.

# 第 2 章

# 関数と関数の極限

詳細は白岩 [Shi, p.29–32, p.51–61], 吹田・新保 [SuiShi, p.17–18,27–31] を参照せよ.

## 2.1. いろいろな関数

### 2.1.1. 関数とは何か.

**定義 2.1** (関数)**.**
集合 $X$ に対して, $f$ が $X$ **上の関数**であるとは, 「すべての $x \in X$ に対して, 実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ がただ一つ定まる規則」をいう. このとき $f : X \to \mathbb{R}$ と書く.

**例 2.1** (指数関数)**.**
$\mathbb{R}$ 上の関数 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp(x) := e^x$$

で定める.

**例 2.2** (三角関数)**.**
$\sin$, $\cos$ は $\mathbb{R}$ 上の関数である. 単位円を用いて, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\sin x$ と $\cos x$ を定めるのであった. また, $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots \right\} \to \mathbb{R}$ を, すべての $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$ に対して

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定めるのであった.

**注意 2.1.**
例 2.1, 2.2 は厳密な定義ではない.

### 2.1.2. 逆関数.

**定義 2.2** (像)**.**
集合 $X$ と $f : X \to \mathbb{R}$ に対して, $f$ の**像** $f(X)$ を

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

で定義する.

**注意 2.2.**
$f : X \to \mathbb{R}$ の像とは, あらっぽくいえば, $y = f(x)$ としたときの $y$ の範囲のこと.

**定義 2.3** (単射)**.**
集合 $X$ 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**単射**であるとは「すべての $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」となることをいう.

**注意 2.3.**
$f : X \to \mathbb{R}$ が単射というのは, 対偶を取れば

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

だから, 異なる二点の行き先は常に違うということ.

**例 2.3** (対数関数)**.**
exp は単射であり,

$$\exp(\mathbb{R}) = \{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

だから, exp の逆関数は $(0, \infty)$ 上で定義できる. これを対数関数といい, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と書くのであった.

$$\log(\exp(x)) = \log(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\exp(\log(y)) = e^{\log y} = y \quad (y \in (0, \infty))$$

であったことに注意せよ.

**例 2.4** (逆三角関数)**.**
sin は $\mathbb{R}$ 上で単射でないため, 逆関数を作るためには (定義域に) 制限をかける必要がある. sin は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上で単射な関数になり,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [-1, 1]$$

となるので, sin の逆関数は $[-1,1]$ 上で定義できる. これを逆正弦関数といい, $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ と書く.

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin(x)) &= x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)\\ \sin(\arcsin(y)) &= y \quad (y \in [-1,1])\end{aligned}$$

となるが,

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x \quad (x \in \mathbb{R})$$

となることに注意すること ($\mathbb{R}$ にかえてはいけない). 同様にして, 逆余弦関数 $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, 逆正接関数 $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義することができる.

#### 2.1.3. 複素関数への拡張.

**定理 2.1** (指数法則)**.**
次の指数法則が成り立つ.

(1) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^x e^y = e^{x+y}$
(2) すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)^y = e^{xy}$

**定理 2.2** (Euler の公式)**.**
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ.

**系 2.1.**
すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

が成り立つ.

**定理 2.3** (加法定理)**.**
すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

が成り立つ.

## 2.2. 関数の極限

詳細は白岩 [Shi, p.32–39], 吹田・新保 [SuiShi, p.18–23] を参照せよ．ただし, この講義では集積点を表に出さずに定義を述べるため, 白岩 [Shi, p.33] とは多少表記が異なる．

**定義 2.4** (関数の極限)**.**

開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, 関数 $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ に対し, $f$ が $x \to x_0$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$」が成り立つことをいう．このとき $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ とか $f(x) \to A$ $(x \to x_0)$ と書く．論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる．

$f$ が $x \to x_0$ のときに $\infty$ に発散するとは, 「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > K$」が成り立つことをいう．このとき $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ とか $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$ と書く．論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > K$$

となる．

$f$ が $x \to x_0$ のときに $-\infty$ に発散するとは, 「任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) < -K$」が成り立つことをいう． このとき $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ とか $f(x) \to -\infty$ $(x \to x_0)$ と書く．論理記号で書くと

$$\forall K > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -K$$

となる．

**例 2.5.**

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

**例 2.6.**

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

**定理 2.4.**

開区間 $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, 関数 $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ となることは「すべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I\setminus\{x_0\}$ に対して[1], $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ ならば $f(x_n)\to A$ $(n\to\infty)$ となること」と同値である.

**定理 2.5.**

開区間 $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, 関数 $f,g:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}g(x)=B$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB$

**定理 2.6** (Cauchy の判定条件)**.**

開区間 $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, 関数 $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)$ が収束することは,「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x,x'\in I\setminus\{x_0\}$ に対して $0<|x-x_0|<\delta$ かつ $0<|x'-x_0|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$」が成り立つことと同値である.

**例 2.7.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

**定義 2.5** (片側極限)**.**

開区間 $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, 関数 $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ に対し, $f$ が $x\to x_0+0$(または $x\downarrow x_0$) のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは,「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して $0<x-x_0<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\displaystyle\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$ とか $f(x)\to A$ $(x\to x_0+0)$ と書く ($x\to x_0+0$ のかわりに $x\downarrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0\text{ に対して }\exists\delta>0\text{ s.t. }\forall x\in I\setminus\{x_0\}\text{ に対して}\\ 0<x-x_0<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\end{gathered}$$

となる.

$f$ が $x\to x_0-0$(または $x\uparrow x_0$) のときに $A\in\mathbb{R}$ に収束するとは,「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in I\setminus\{x_0\}$ に対して $0<x_0-x<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき

[1]すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $x_n\in I\setminus\{x_0\}$ となるということ.

$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ とか $f(x) \to A$ $(x \to x_0 - 0)$ と書く ($x \to x_0 - 0$ のかわりに $x \uparrow x_0$ と書いてもよい). 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ に対して}$$
$$0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

**定義 2.6** (無限大での極限)**.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, $f$ が $x \to \infty$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x > K$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A$ $(x \to \infty)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists K > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x > K \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

$f$ が $x \to -\infty$ のときに $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x < -K$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. このとき $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ とか $f(x) \to A$ $(x \to -\infty)$ と書く. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists K > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} \text{ に対して } x < -K \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となる.

**注意 2.4.**

$f$ が (正の/負の) 無限大に発散することの定義も定義することができる. 各自定義を書いてみよ.

## 2.3. 連続関数

詳細は白岩 [Shi, p.39–42], 吹田・新保 [SuiShi, p.23–24] を参照せよ.

### 2.3.1. 連続関数.

**定義 2.7** (関数の連続)**.**

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ に対して, $f$ が $x_0 \in I$ で**連続**であるとは, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I$ に対して $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$」が成り立つことをいう. 論理記号で書くと

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる.

$f$ が $I$ **上連続**であるとは,「任意の $x_0 \in I$ に対して, $f$ は $x_0$ で連続」が成り立つことをいう.

**注意 2.5.**

$f$ が $I$ 上連続であることを論理記号で書くと

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して}$$
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる. $x_0$ が $\delta$ より先に決まることに注意せよ.

**命題 2.1.**

$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ とする. このとき, $f$ が $x_0$ で連続であることと $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことは同値である.

**証明.**

**1.** $f$ が $x_0$ で連続であると仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $f$ が $x_0$ で連続であることより, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in I$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

とできる. すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して, $0 < |x - x_0| < \delta$ ならば (2.1) より $|x - x_0| < \delta$ だから $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる. よって, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ となる.

**2.** $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ を仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ より, ある $\delta > 0$ に対して, すべての $x \in I \setminus \{x_0\}$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

とできる. すべての $x \in I$ に対して $|x - x_0| < \delta$ と仮定する. $|x - x_0| = 0$ なら $x = x_0$ より $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ となる. $|x - x_0| \neq 0$ なら $0 < |x - x_0| < \delta$ より (2.2) から $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ となる. 以上により $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となるので, $f$ は $x_0$ で連続となる. $\square$

**例 2.8.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3 - 1$ で定義する. このとき, $f$ は $x = 2$ で連続となる.

**注意 2.6.**

例 2.8 について, 証明を書くだけなら講義ノートの 2. のみでよいが, $\delta$ をどうとったかがわかるように 1. も書いておくとよい.

**例 2.9.**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3-1$ で定義する. このとき, $f$ は $\mathbb{R}$ 上連続となる.

**例 2.10.**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := \begin{cases} x & (x\in\mathbb{Q}) \\ 0 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$$

で定義する. $f$ は $x=0$ で連続, $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ では不連続となる.

**注意 2.7.**

例 2.10 はグラフを書くことが難しいので, $\varepsilon$-$\delta$ 論法を使わないと, 証明するのは困難である.

**例 2.10 の証明.**

**1.** $f$ が $x=0$ で連続となることを示す. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta := \min\{\varepsilon,1\}$ とおく. すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $|x|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x)-f(0)| &= |f(x)-0| \\ &= |f(x)| \\ &\le |x| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

となる. 実際, $x\in\mathbb{Q}$ のとき, $|f(x)|=|x|$ となる. $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ のときは $f(x)=0$ より $|f(x)|=0\le|x|$ となる. 従って, $f$ は $x=0$ で連続となる.

**2.** $f$ が $x_0\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ で連続とならないことを示す.

$\varepsilon := \dfrac{|x_0|}{2}$ とおく. すべての $\delta>0$ に対して $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\mathbb{Q}$ をひとつとると, $|x-x_0|<\delta$ かつ

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |0-f(x_0)| \\ &= |x_0| > \frac{|x_0|}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので, $f$ は $x_0$ で連続にならない. □

### 2.3.2. 連続関数の性質.

**定義 2.8** (関数の和とスカラー倍)**.**

$I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$, $g:I\to\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ とする. このとき関数の和 $f+g:I\to\mathbb{R}$,

スカラー倍 $\lambda f : I \to \mathbb{R}$, 積 $fg : I \to \mathbb{R}$ をそれぞれ任意の $x \in I$ に対して

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\
(\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \\
(fg)(x) &:= f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

で定義する.

**定義 2.9** (関数の合成)**.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする. このとき関数の**合成** $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

で定義する.

**定理 2.7.**

簡単のため $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

(1) $f$,$g$ が $x \in \mathbb{R}$ で連続ならば, すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f+g$, $\lambda f$, $fg$ も $x$ で連続である.
(2) $f$, $g$ が $\mathbb{R}$ 上連続ならば, $g \circ f$ も $\mathbb{R}$ 上連続である.

## 2.4. 閉区間上の連続関数

詳細は白岩 [Shi, p.43–50], 吹田・新保 [SuiShi, p.24–27] を参照せよ.

### 2.4.1. 中間値の定理.

**定理 2.8** (中間値の定理)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続で $f(a) < f(b)$ ならば「任意の $c \in (f(a), f(b))$ に対して, ある $x_0 \in [a,b]$ が存在して $f(x_0) = c$」が成り立つ.

**例 2.11.**

$k = 0,1,2$, $c_k \in \mathbb{R}$ に対して, 方程式 $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ は実数解を持つ.

### 2.4.2. Weierstrass の定理.

**定理 2.9** (Weierstrass の定理)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば関数 $f$ の最大値, 最小値が存在する. すなわち,

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in [a,b]} f(x) &:= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max_{x \in [a,b]} f(x) \\
\inf_{x \in [a,b]} f(x) &:= \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = \min_{x \in [a,b]} f(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

### 2.4.3. 一様連続性.

**例 2.12.**
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^2$ で定めると $f$ は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0\in\mathbb{R}$ で連続となることを $\varepsilon$-$\delta$ 論法で証明するとき, $\delta>0$ の取り方は $x_0$ の取り方によって異なる.

**例 2.13.**
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x$ で定めたとき, $f$ は $\mathbb{R}$ 上連続となる. $x_0\in\mathbb{R}$ に対して, $f$ が $x_0$ で連続となることを $\varepsilon$-$\delta$ 論法で証明するとき, $\delta>0$ の取り方は $x_0$ の取り方によらない.

**定義 2.10** (一様連続)**.**
$I\subset\mathbb{R}$ に対して $f:I\to\mathbb{R}$ が $I$ **上一様連続**であるとは, 「任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ が存在して, すべての $x$, $x'\in I$ に対して, $|x-x'|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$」が成り立つことをいう. 論理記号で書くと

$$\forall\varepsilon>0 \text{ に対して } \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall x,x'\in I \text{ に対して}$$
$$|x-x'|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

となる.

**例 2.14.**
例 2.13 の関数 $f$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続となる.

**定理 2.10.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続ならば, $f$ は $[a,b]$ 上一様連続である.

**注意 2.8.**
定理 2.10 は閉区間であることが重要である. 開区間では成り立たない.

**注意 2.9.**
定理 2.10 は連続関数のグラフから決まる面積が定められることを示すのに使う (後期でやる).

## 2.5. 補足

### 2.5.1. 上半連続, 下半連続.

**定義 2.11** (上半連続, 下半連続)**.**
$I\subset\mathbb{R}$ に対して, $f:I\to\mathbb{R}$ が**上半連続**であるとはすべての $I$ 上の収束列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty}f(a_n)\le f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)$$

が成り立つことをいう．

$f : I \to \infty$ が**下半連続**であるとはすべての $I$ 上の収束列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して，

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$$

が成り立つことをいう．

**定理 2.11** (上半連続に対する Weierstrass の定理)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が上半連続ならば，関数 $f$ の最大値が存在する．

## 2.6. 級数

**定義 2.12** (級数)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，**級数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは，$N \in \mathbb{N}$ に対して，第 $N$ 部分和 $S_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N$ について，$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が収束することをいう．このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$ と書く．

**例 2.15.**

$0 < r < 1$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$ となる．

**定理 2.12** (Cauchy の判定条件)**.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと，「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $m \ge n \ge N_0$ ならば $|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$」が成り立つことは同値である．

**系 2.2.**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である．

**注意 2.10.**

系 2.2 の逆は成り立たない．例えば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しない．

**定理 2.13.**
開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して, $f : I \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in I$ で連続であることと,「任意の $f(x_0) \in J$ となる開区間 $J \subset \mathbb{R}$ に対して, $x_0 \in I_0$ となる, ある開区間 $I_0 \subset I$ が存在して, $I_0 \subset f^{-1}(J)$」は同値である.

# 第 3 章

# 高校の微分積分

## 3.1. 微分とその応用

### 3.1.1. 微分の計算手法.

**例 3.1.**
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=\sqrt{x^2+1}$ で定めるとき, $f'(x)$ を三通りの方法で求める.

### 3.1.2. Taylor-Maclaurin 展開.

**例 3.2.**
$e^x$ に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

となる.

**例 3.3.**
$\cos x$ に対して

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

となる.

**例 3.4.**
$\log(1+x)$ に対して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

となる.

**定理 3.1** (Taylor-Maclaurin 展開)**.**
無限回微分可能な $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ と $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R(x)$$

とかくと, $\dfrac{R(x)}{x^k} \to 0\ (x \to 0)$ が成り立つ.

**例 3.5.**

Taylor-Maclaurin 展開を用いると

$$\frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

がわかる.

### 3.1.3. 凸不等式.

**例 3.6.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定めると, $f$ は凸関数である.

**定理 3.2.**

無限回微分可能な関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して, 次は同値である.

(1) $f$ が凸関数.

(2) すべての $x, y \in (a,b)$ と $0 < \lambda < 1$ に対して,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

**例 3.7** (相加, 相乗平均と Young の不等式)**.**

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,\infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると, $f$ は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

と Young の不等式

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q$$

が示せる. ただし, $1 < p < \infty$ は定数で, $\dfrac{1}{q} := 1 - \dfrac{1}{p}$ で定数 $q$ を定めるものとする.

**例 3.8.**

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,\infty)$ に対して $f(x) := x^3$ で定めると, $f$ は凸関数である. この事実から $x, y > 0$ に対して,

$$(x+y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$$

を示せる.

## 3.2. 積分とその応用

### 3.2.1. 区分求積法とその応用.

**例 3.9.**
$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ を微分を用いずに求める.

**例 3.10.**
連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は, すべての $x \in [0,1]$ に対して, $f(x) \geq 0$ をみたすとする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸, および 2 直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分を $x$ 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ は

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

で求めることができる.

**例 3.11.**
連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は, すべての $x \in [0,1]$ に対して, $f(x) \geq 0$ をみたすとする. このとき, 曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸, および 2 直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分を $y$ 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ は

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx$$

で求めることができる.

### 3.2.2. 曲線の長さ.

**例 3.12.**
単位円は第一象限で $(\sqrt{1-y^2}, y)$ $(0 < y < 1)$ で表せる. 角度 $\theta$ (rad) は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

と表せる. $\theta = \arcsin x$ とおくと, $\sin\theta = x$ より

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \tag{3.1}$$

が得られる. 特に, 円周率の微分積分を用いた定式化 $\pi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$ が得られる.

**注意 3.1.**

例 3.12 の (3.1) は三角関数の解析的な定義そのものである．この定義から，微分積分学の基本定理により

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy - \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy}{x} \to \left.\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|_{y=0} = 1 \quad (x \to 0)$$

が正当化できる．詳しくは小平 [Kod], 黒田 [Kur] を参考にせよ．

# 第 4 章

# Riemann 積分

詳細は白岩 [Shi, p.107–114], 吹田・新保 [SuiShi, p.102–106] を参照せよ. なお, この講義における Riemann 積分の理論展開は, 吹田・新保 [SuiShi] とは異なる.

## 4.1. Riemann 積分の定義

### 4.1.1. Riemann 積分の定義.

**定義 4.1** (分割)**.**
$\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ を $[a,b]$ の**分割**という.

有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ に対して

$$s_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$
$$S_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

とおく[1].

**定義 4.2** (Riemann 積分)**.**
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ にたいして

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\Big\{ s_\Delta(f) : \Delta = \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \Big\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\Big\{ S_{\Delta(f)} : \Delta = \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \Big\}$$

[1]白岩 [Shi, p.107–108] では過剰和, 不足和と定義している.

とおき, **Riemann 下積分**, **Riemann 上積分**という. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ のとき, $f$ は $[a,b]$ 上 **Riemann 積分可能**であるといい,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

と定める.

### 4.1.2. Darboux の定理と区分求積法.

**定義 4.3** (分割の長さ)**.**
$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して

$$|\Delta| := \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$$

を分割 $\Delta$ の**長さ**という.

**定理 4.1** (Darboux)**.**
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s_\Delta(f), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon > S_\Delta(f)$$

が成り立つ.

**系 4.1** (区分求積法)**.**
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が **Riemann 積分可能**ならば

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

が成り立つ.

**定理 4.1 の証明.**
$M := \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ とおく.
**1.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある分割 $\Delta_\varepsilon = \{y_0, \dots, y_m\} \subset [a,b]$ が存在して

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s_{\Delta_\varepsilon}(f)$$

とできる. $d := \min_{k=1,\dots,n} y_k - y_{k-1}$ として, $\delta := \min\{d, \frac{\varepsilon}{2mM}\}$ とおく.

**2.** $[a,b]$ 上の任意の分割 $\Delta$ に対して,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon < s_{\Delta_\varepsilon}(f)$$

を示す. そのために,

$$s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

を示す.

**3.** 任意の $y_k \in \Delta_\varepsilon$ に対して, ある $z_l \in \Delta$ が存在して, $z_{l-1} \le y_k \le z_l$ とできる. $y \in \Delta_\varepsilon$ が $y \ne y_k$ ならば $|y_k - y| \ge d$ と $|z_l - z_{l-1}| < d$ より $z_{l-1} \le y_k \le z_l$ とはならない. つまり, 上でとれる $z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ によってすべて異なっている. さて $s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f)$ を考えると

$$\begin{aligned}&\left(\inf_{z_{l-1}\le x\le y_k} f(x)(y_k - z_{l-1}) \inf_{y_k\le x\le z_l} f(x)(z_l - y_k)\right) - \inf_{z_{l-1}} f(x)(z_l - z_{l-1})\\ &\le 2M(z_l - z_{l-1}) \le 2M|\Delta|\end{aligned}$$

となるから, $k$ について和を取ることで ($z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ も用いることで)

$$s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f) \le 2Mm|\Delta| < \varepsilon$$

が得られる.

**4.** 他方, 分割の定義より

$$s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) \ge s_{\Delta_\varepsilon}(f) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon$$

だから,

$$\begin{aligned}s_\Delta(f) &= s_\Delta(f) - s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) + s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f)\\ &\ge -\varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon - \varepsilon\\ &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon - 2\varepsilon\end{aligned}$$

が得られる. Riemann 上積分についても同様の議論で得られる. □

**注意 4.1.**

区分求積法は $f$ が Riemann 積分可能でないと成立しない.

### 4.1.3. Riemann 積分可能性.

**定義 4.4** (振動量)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $A\subset[a,b]$ に対して,

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x) := \sup_{x,x'\in A} |f(x)-f(x')|$$

を $A$ における $f$ の**振動量**という.

**命題 4.1.**
有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $[a,b]$ の分割 $\Delta$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$$

とできるならば, $f$ は Riemann 積分可能である.

**証明.**
任意の $\varepsilon>0$ に対して, 仮定で取れる $\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$ をとると, Riemann 上積分, 下積分の定義より

$$\begin{aligned}
0 &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k-x_{k-1}) \\
&< \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる. (4.1) の左辺は $\varepsilon$ に依らないので $\varepsilon\downarrow 0$ とすると

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

がわかる. □

**定理 4.2** (Riemann 積分の基本定理)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続ならば $f$ は Riemann 積分可能である.

**定理 4.3.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が有界で単調減少 (単調増加) ならば, $f$ は Riemann 積分可能である.

**証明.**

$f$ が単調減少のときに示す. $f$ が定数関数のときは明らかなので, 定数関数ではないとし, $M := f(a) - f(b)$ とおくと, $f$ が単調減少なので, $M > 0$ となる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ を $\dfrac{M(b-a)}{N} < \varepsilon$ となるようにとる.

$$\begin{aligned}\Delta := \{x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{1}{N}(b-a),\ x_2 = a + \frac{2}{N}(b-a), \dots, \\ x_k = a + \frac{k}{N}(b-a), \dots, x_N = b\}\end{aligned}$$

を $[a,b]$ の分割とすると, $|\Delta| = \dfrac{1}{N}(b-a)$ であり, $f$ が単調減少であることから $\displaystyle\operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) = f(x_{k-1}) - f(x_k)$ となるので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) &\le |\Delta| \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \\ &= \frac{b-a}{N}(f(a) - f(b)) < \varepsilon\end{aligned}$$

が得られる. 命題 4.1 より $f$ は Riemann 積分可能である. $\square$

**例 4.1.**

$\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ を区分求積法を用いて原始関数を用いずに (つまり, 微分の逆演算を計算することなく) 求める.

## 4.2. Riemann 積分の性質

詳細は白岩 [Shi, p.115–118], 吹田・新保 [SuiShi, p.107–109] を参照せよ.

**定理 4.4** (区間加法性)**.**

有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$ に対して, $f$ が $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, $f$ は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ.

**定義 4.5.**

Riemann 積分可能な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める.

**定理 4.5** (区間加法性)**.**
有界な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ に対して, $f$ が $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, $f$ は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能であり,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ.

**定理 4.6** (積分の順序保存性)**.**
有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ が Riemann 積分可能であり, すべての $x\in[a,b]$ に対して $f(x)\le g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ.

**定理 4.7** (積分の線形性)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して, $\alpha f+\beta g$ は積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ.

**定理 4.8** (積分平均値定理)**.**
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $f$ が $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能ならば, $\inf_{x\in[a,b]} f(x)\le\lambda\le\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

が成り立つ.

(2) $f$ が $[a,b]$ 上連続ならば, $x_0\in[a,b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

が成り立つ.

## 4.3. 不定積分

詳細は白岩 [Shi, p.118–120], 吹田・新保 [SuiShi, p.109–113] を参照せよ. なお, この講義における不定積分の理論展開は, 白岩 [Shi] とは少し異なる.

**定義 4.6** (不定積分)**.**
有界で Riemann 積分可能な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

で定義する. この関数 $F$ を $f$ の**不定積分**という.

**注意 4.2.**
上端と下端のない積分記号 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は**原始関数**と呼ぶのが正確である.

**定義 4.7** (原始関数)**.**
関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

をすべての $x \in (a,b)$ でみたす関数 $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ を $f$ の**原始関数**といい $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す.

**注意 4.3.**
定義 4.7 で, 極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ は $F$ の $x$ における微分係数である. つまり, $F'(x) = f(x)$ ということである.

**定理 4.9.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界で Riemann 積分可能とする. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $f$ の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x \in [a,b])$$

とすると, $F$ は $[a,b]$ 上連続となる.

**定理 4.10** (微分積分学の基本定理 その 1)**.**
連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $f$ の不定積分, すなわち

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x \in [a,b])$$

とする. このとき, すべての $x \in (a,b)$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となる.

**注意 4.4.**
　定理 4.10 は $f$ が連続でないと成り立たない. 実際に $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を

$$H(x) := \begin{cases} -1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

により定めると $H$ は $x = 0$ で連続でない. $-1 \le x \le 0$ のとき

$$\int_{-1}^{x} H(\xi)\, d\xi = -\int_{-1}^{x} d\xi = -1 - x$$

であり, $0 < x \le 1$ のとき

$$\int_{-1}^{x} H(\xi)\, d\xi = -\int_{-1}^{0} d\xi + \int_{0}^{x} H(\xi)\, d\xi = -1 + x$$

となるので,

$$\int_{-1}^{x} H(\xi)\, d\xi = -1 + |x|$$

である. 従って, $H$ の不定積分は $x = 0$ で微分できないことがわかる.

## 4.4. 補足

**定理 4.11.**
　有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $fg$ は Riemann 積分可能である.
(2) $|f|$ は Riemann 積分可能である.

**注意 4.5.**
　定理 4.11 の (2) の逆にあたる主張「$|f|$ は Riemann 積分可能ならば, $f$ は Riemann 積分可能」は一般に成り立たない. 例えば, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

とすると, $x \in [0,1]$ に対して $|f(x)| = 1$ となるから, $|f|$ は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能となるが, $f$ は Riemann 積分可能とはならない.

この事実に対して, Riemann 積分可能を Lebesgue 積分にかえた主張「$|f|$ は Lebesgue 積分可能ならば, $f$ は Lebesgue 積分可能」は成立することが知られている.

# 第 5 章

# 微分

## 5.1. 微分とその性質

詳細は白岩 [Shi, p.65–75], 吹田・新保 [SuiShi, p.36–41] を参照せよ. なお, この講義において, 開集合, 閉集合の概念は説明しない. 開集合, 閉集合は開区間, 閉区間に読みかえて差し支えない.

**定義 5.1** (微分)**.**

$x_0 \in (a,b)$ に対して, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $x=x_0$ で**微分可能**であるとは,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

が存在することである. このとき, $f'(x_0) := \lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ と書き, $f$ の $x_0$ における**微分係数**という.

$f$ が $(a,b)$ **上微分可能**であるとは, すべての $x\in(a,b)$ に対して, $f$ が $x$ で微分可能であることをいう. このとき, $x\in(a,b)$ に対して

$$\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$$

と書く. このようにして定めた関数 $\dfrac{df}{dx}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を $f$ の**導関数**という.

以下, $I\subset\mathbb{R}$ に対して

$$C(I) := \{f: I\to\mathbb{R},\ f \text{ は } I \text{ 上連続}\}$$

$$C^1(a,b) := \left\{f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f \text{ は } (a,b) \text{ 上微分可能},\ \frac{df}{dx}\in C((a,b))\right\}$$

と書くことにする.

### 5.1.1. 微分と接線.

**定理 5.1.**

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と $x_0\in(a,b)$ に対して, $f$ が $x=x_0$ で微分可能であることと,

「ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$$

と書いたときに $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$」は同値である. このとき, $\lambda = f'(x_0)$ となる.

**系 5.1.**

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in (a,b)$ で微分可能ならば, $x_0$ で連続になる.

**5.1.2. 微分の公式.**

**定理 5.2.**

$f, g \in C^1(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
(3) (積の微分公式) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

**注意 5.1.**

定理 5.2 の (1), (2) より, 微分は線形である.

**定理 5.3** (合成関数の微分公式, chain role)**.**

$f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能ならば $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)$$

が成り立つ.

**注意 5.2.**

定理 5.3 は $y = f(x)$, $z = g(y)$ と書くと, 形式的に

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

と書ける.

**例 5.1.**

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

**定理 5.4** (逆関数の微分公式)**.**

$f : (a,b) \to (c,d)$ は全単射で微分可能であるとする. $x_0 \in (a,b)$ にたいし

て $f'(x_0) \neq 0$ ならば $y_0 = f(x_0)$ としたときに, $f$ の逆関数 $f^{-1}$ は $y_0$ で微分可能であり,

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

となる.

**注意 5.3.**

定理 5.4 は $y = f(x)$ と書いたときに, 形式的に

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書ける.

**注意 5.4.**

$f^{-1}$ が微分可能であることがわかれば, $f^{-1}(f(x)) = x$ の $x = x_0$ における微分係数を考えれば, 合成関数の微分公式により

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

となるので, $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ がわかる.

**定理 5.5** (パラメータ微分)**.**

$\varphi, \psi \in C^1(a, b)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ とする. $\varphi$ は狭義単調増加で $x_0 = \varphi(t_0)$ とすると

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

となる.

**注意 5.5.**

定理 5.5 は, 形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

と書ける.

## 5.2. 平均値定理

詳細は白岩 [Shi, p.75—79, p.118–121], 吹田・新保 [SuiShi, p.43–45, p.55, p.109–111] を参照せよ.

**定理 5.6** (Rolle の定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ が $f(a) = f(b)$ ならば, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ が成り立つ.

**定理 5.7** (微分平均値定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ に対して, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

が成り立つ.

### 5.2.1. 微積分の基本定理.

**定理 5.8** (微積分の基本定理 その 2)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$, $\dfrac{df}{dx} \in C([a,b])$ に対して

$$\int_b^a \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

### 5.2.2. 平均値の定理の応用.

**系 5.2.**
$f \in C^1(a,b)$ に対して, 「$f$ が $(a,b)$ 上単調増加」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \geq 0$」は同値となる.

**系 5.3.**
$f \in C^1(a,b)$ に対して, 「$f$ が $(a,b)$ 上定数関数, すなわち, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f(x) = c$」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$」は同値となる.

### 5.2.3. 極大・極小.

**定義 5.2** (極大・極小)**.**
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ とする. $f$ が $x = c$ で**極大** (**極小**) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ に対して

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ならば } f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

が成り立つことをいう.

**例 5.2.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} x+2 & (-\infty < x \le -1) \\ -x & (-1 < x \le 1) \\ x-2 & (1 < x < \infty) \end{cases}$$

とおくと, $f$ は $x = -1$ $(x = 1)$ で極大 (極小) となる.

**定理 5.9.**
$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, $f$ が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

**定理 5.10** (極大・極小の判定)**.**
$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して

$$c - \delta < x < c \text{ ならば } f'(x) > 0$$
$$c < x < c + \delta \text{ ならば } f'(x) < 0$$

が成り立つとする. このとき, $f$ は $x = c$ で極大となる.

### 5.2.4. 微分積分学の基本定理の応用.

**定理 5.11.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ かつ $\dfrac{df}{dx} \in C([a,b])$ のとき

$$f(b) - f(a) = \left( \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a)\, dt \right)(b-a)$$

が成り立つ.

**定理 5.12.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ は $\dfrac{df}{dx} \in C([a,b])$ であるとする. このとき

$$|f(b) - f(a)| \le \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right| |b-a|$$

が成り立つ.

## 5.3. 高階導関数と Taylor の定理

詳細は白岩 [Shi, p.80—93], 吹田・新保 [SuiShi, p.41–43, p.45–54, p.56–59] を参照せよ.

**定義 5.3.**

$f \in C^1(a,b)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ が $x_0 \in (a,b)$ で微分可能なとき,

$$f''(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{df}{dx}(x_0+h) - \frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく. $f''(x_0)$ を $f$ の $x_0$ における**第 2 次微分係数**という. また, $\dfrac{df}{dx}$ が $(a,b)$ 上微分可能なとき, $x \in (a,b)$ に対し

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := f''(x)$$

と書く. $\dfrac{d^2 f}{dx^2} : (a,b) \to \mathbb{R}$ を $f$ の **2 階導関数**という.

3 次微分係数, 3 階導関数なども同様にして定義する. 以下, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^n(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R},\ f \text{ は } (a,b) \text{ 上 } n \text{ 回微分可能, } \frac{d^n f}{dx^n} \text{ は } (a,b) \text{ 上連続} \right\}$$

と書く.

**例 5.3.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\dfrac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める.

**定理 5.13** (Taylor の定理)**.**

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a,b)$ は $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $\dfrac{d^k f}{dx^k} \in C([a,b])$ をみたすとする. このとき

$$f(b) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

と書いたときに, ある $a < \theta < b$ が存在して

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$$

が成り立つ.

**注意 5.6.**
定理 5.13 で $n=1$ とすると, $a<\theta<b$ が存在して
$$f(b)=f(a)+f'(\theta)(b-a)$$
となるが, これは平均値の定理 (定理 5.7) である.

**定理 5.14** (Taylor-Maclaurin 展開)**.**
$n\in\mathbb{N}$, $f\in C^n(-1,1)$, $x\in(-1,1)$ に対して
$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)x^n$$
と書くと $R_n(x)\to 0\quad(x\to 0)$ が成り立つ.

**例 5.4.**
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ となる.

**例 5.5.**
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}=2$ となる.

## 5.4. de l'Hospital の定理

**例 5.6.**
$f,g\in C^1(-1,1)$ が, $f(0)=g(0)=0$ かつ $g'(0)\neq 0$ とする. このとき
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**定理 5.15** (de l'Hospital の定理)**.**
$a\in\mathbb{R}$ に対し, $f,g\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{a\})$ とする.

(1) $f(x),g(x)\to 0$ $(x\to a)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

(2) $f(x),g(x)\to \infty$ $(x\to a)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

標語的にいうと, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば,
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
が成り立つ.

**例 5.7.**

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ となることを de l'Hospital の定理を用いて示す.

**注意 5.7.**

例 5.7 で

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない. de l'Hospital の定理は極限が**不定形のときにしか使ってはいけない.**

## 5.5. 凸関数

**定義 5.4** (凸関数)**.**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上**凸関数**であるとは, 任意の $x,y\in[a,b]$ と $0<\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

が成り立つことをいう.

**定理 5.16.**

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$ とする. このとき, $f$ が $[a,b]$ 上凸関数であることと $\dfrac{df}{dx}$ が $(a,b)$ 上単調増加であることは同値である.

**系 5.4.**

$f\in C^2(a,b)$ が $\dfrac{d^2f}{dx^2}\ge 0$ をみたすならば, $f$ は $[a,b]$ 上凸関数である.

**例 5.8.**

$p>1$ に対して, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x):=x^p$ で定めると, $f$ は凸関数である. この事実から, $a,b>0$ に対して, $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ が成り立つ. これから, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty|b_n|^p<\infty$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty|a_n+b_n|^p<\infty$ がわかる.

# 第 6 章

# 広義積分

詳細は白岩 [Shi, p.129—136], 吹田・新保 [SuiShi, p.113–120] を参照せよ.

## 6.1. 広義積分と例

### 6.1.1. 非有界な関数の積分.

**例 6.1.**
$f : (0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0,1])$$

で定義する. このときに $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ をどう定めるのがよいだろうか？

**定義 6.1** (広義積分)**.**
$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ は $(a,b]$ 上連続とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

で定義する. この積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**広義積分**といい, 極限が存在するときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**収束する**という. 極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**発散する**という.

**例 6.2.**
$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ を求める.

**例 6.3.**
$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ は発散する.

**注意 6.1.**

例 6.3 で正しそうに見える次の計算

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{1} = \log|1| - \log|-1| = 0$$

や

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) = 0$$

は正しくないことに注意せよ.

### 6.1.2. 無限区間の積分.

**例 6.4.**

$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

で定義する. このときに $\displaystyle\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ をどう定めるのがよいだろうか？

**定義 6.2** (広義積分)**.**

$f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ は $[a,\infty)$ 上連続とする. このとき,

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx$$

で定義する. この積分 $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)$ は**広義積分**といい, 極限が存在するときは, $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)$ は**収束する**という. 極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)$ は**発散する**という.

**定理 6.1.**

$\alpha > 0$ とすると, 次が成り立つ

(1) $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} < \infty & (0 < \alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

(2) $$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \leq 1) \end{cases}$$

**例 6.5.**

$\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は収束する.

**注意 6.2.**
実は
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
となることが知られている．この広義積分は偏差値など確率・統計, 偏微分方程式などいろいろなことに関係のある積分である．

## 6.2. 絶対収束と条件収束

**例 6.6.**
$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,\infty)$ に対して
$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$
とおく．このとき $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束するが, $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する．

**定義 6.3** (絶対収束, 条件収束)**.**
$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．
(1) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ が収束するとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は**絶対収束**するという．
(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するが, 絶対収束しないとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は**条件収束**するという．

**定理 6.2.**
$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束する．

**定理 6.3.**
$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．$\lambda>1$ に対して, $K>0$ が存在して, すべての $x\in[0,\infty)$ に対して, $x^\lambda|f(x)|\le K$ が成り立つと仮定する．このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束する．

**系 6.1.**
$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．ある $\lambda>1$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が存在するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する．

**例 6.7.**
$s>0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する (絶対収束する).

**定義 6.4** (Γ-関数)**.**
$s>0$ に対して
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$
と定義する. $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を **Γ-関数**という.

**命題 6.1.**
Γ-関数について, 次が成り立つ.
(1) $\Gamma(1)=1$;
(2) $s>0$ に対して $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

# 参考文献

[Iid] 飯高 茂, 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方, 講談社, 1999.
[Uch1] 内田 伏一, 集合と位相, 裳華房, 1986.
[Uch2] 内田 伏一, 位相入門, 裳華房, 1997.
[Kas] 笠原 晧司, 微分積分学, サイエンス社, 1974.
[Kur] 黒田 成俊, 微分積分, 共立出版, 2002.
[Koi] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.
[Kod] 小平 邦彦, 軽装版 解析入門 I, 岩波書店, 2003.
[Kob] 小林 昭七, 微分積分読本 1 変数, 裳華房, 2000.
[Shi] 白岩 謙一, 解析学入門, 学術図書, 2002.
[SuiShi] 吹田 信之, 新保 経彦, 理工系の微分積分, 学術図書, 1996.
[Sug] 杉浦 光夫, 解析入門 (1), 東京大学出版会, 1980.
[Tak] 高木 貞治, 定本 解析概論, 岩波書店, 2010.
[Mzn] 水野 将司, 数学入門 AB 集合論と論理学, 2014 年度講義ノート.
[HaiWan1] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (上), 丸善, 2006.
[HaiWan2] E. Hainar, G. Wanner, 蟹江幸博 訳, 解析教程 (下), 丸善, 2006.
[Ste] Ian Stewart, 芹沢 正三 (翻訳), 現代数学の考え方, 筑摩書房, 2012.