第3章　高校の微分積分

§3.1　微分とその応用

例3.1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x):=\sqrt{x^2+1}$　$(x\in\mathbb{R})$ で定めるとき、$f'(x)$ を求める。

(やり方1)　$g(x):=x^2+1,\ h(y)=\sqrt{y}$ とすると $f(x)=h\circ g(x)$ だから、合成関数の微分法より

$$f'(x)=h'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(やり方2)　$\log f(x)=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}$$

より $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　となる。

(やり方3)　$(f(x))^2=x^2+1$　を微分すると

$2f(x)f'(x)=2x$　より　$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　となる。

※ 微分するにもやり方はいろいろある。 ▨

<Taylor-Macburin展開>

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \qquad (*)$$

とかけたとして、$a_0, a_1, a_2, \ldots$ を求めよう。

1. $(*)$ に $x=0$ を代入すると $\boxed{a_0=f(0)}$ がわかる。

2. $(*)$ を x で微分すると

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots \qquad (**)$$

となるから、$(**)$ に $x=0$ を代入すると $\boxed{a_1=f'(0)}$ がわかる。

3. (**) を x で微分すると

$$f''(x) = 2\times1\, a_2 + 3\times2\, a_3 x + 4\times3\, a_4 x^2 + \cdots \quad (***)$$

となるから、(***) に $x=0$ を代入すると $\boxed{a_2 = \frac{f''(0)}{2!}}$ がわかる。

4. (***) を x で微分すると

$$f'''(x) = (3\times2\times1)a_3 + (4\times3\times2)a_4 x + \cdots \quad (****)$$

となるから、(****) に $x=0$ を代入すると $\boxed{a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}}$ がわかる。

以下くり返すことで

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

と推測できる。

例3.2

e^x について $(e^x)^{(n)} = \frac{d^n(e^x)}{dx^n} = e^x$ より

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

となる。 □

例3.3

$\cos x$ について

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x & n=1,5,9,13,\ldots \\ -\cos x & n=2,6,10,14,\ldots \\ \sin x & n=3,7,11,15,\ldots \\ \cos x & n=4,8,12,16,\ldots \end{cases}$$

より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

となる。 □

例3.4

$\log(1+x)$について $(\log(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ より

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

となる。 □

この展開はどこまで正しいのだろうか？

定理3.1 (Taylor-Maclaurin展開)

無限回微分可能な $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し、

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R(x)$$

とかくと、 $\dfrac{R(x)}{x^k} \to 0 \quad (x \to 0)$ が成り立つ。 □

Taylor-Maclaurin展開を用いると、極限が計算できることがある。

例3.5

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x}$ を求める。定理3.1より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + R_1(x), \quad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$$

とかくと $\dfrac{R_1(x)}{x^2}, \dfrac{R_2(x)}{x^2} \to 0 \quad (x \to 0)$ となる。よって

$$\frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + R_1(x)\right) - 1}{\left(x - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)\right) - x}$$

$$= \frac{1 - \frac{2R_1(x)}{x^2}}{1 - \frac{2R_2(x)}{x^2}} \to 1 \quad (x \to 0)$$

がわかる。 □

〈凸不等式〉

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が凸関数であるとは $^\forall x\in(a,b)$ に対して

$f''(x)\geq 0$ となることである．

例3.6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x):=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めると，f は凸関数である．

$\boxtimes$

定理3.2

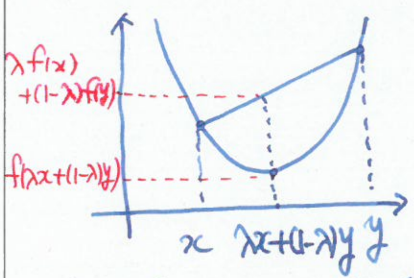
無限回微分可能な $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ に対し，次は同値．

(1) f が凸関数

(2) $^\forall x,y\in(a,b)$, $0<{}^\forall\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

$\boxtimes$



定理3.2 (2) は，グラフをかくと，$(x,f(x))$, $(y,f(y))$ を結ぶ線分が常にグラフの上側にあることを主張している．

例3.7 (相加・相乗平均とYoungの不等式)

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x):=-\log x$ $(x\in(0,\infty))$ で定めると，

$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}\geq 0$ となるから，f は凸関数である．よって，

$1<p<\infty$ に対し，$\lambda=\dfrac{1}{p}$ として，定理3.2を用いると

$^\forall x,y>0$ に対して

$$-\log\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)y\right)\leq -\frac{1}{p}\log x-\left(1-\frac{1}{p}\right)\log y$$

となる．$\dfrac{1}{q}:=1-\dfrac{1}{p}$ とおき，両辺 exp をとると

$$\exp\left(\frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y\right) \leq \exp\left(\log\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)\right)$$

より

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \qquad \text{—}(*)$$

となる．$p=2$とすれば $q=2$ となり，相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

が得られる．また，$a, b > 0$ に対して，$(*)$で $x = a^p$, $y = b^q$ とすると

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \text{—}(**)$$

が得られる．$(**)$ を Young の不等式という．　$\boxtimes$

例3.8

$f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^3$ $(x \in (0,\infty))$ で定めると，

fは凸関数である(各自)．よって $\forall a, b > 0$ に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

だから

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3$$

となり，

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$$

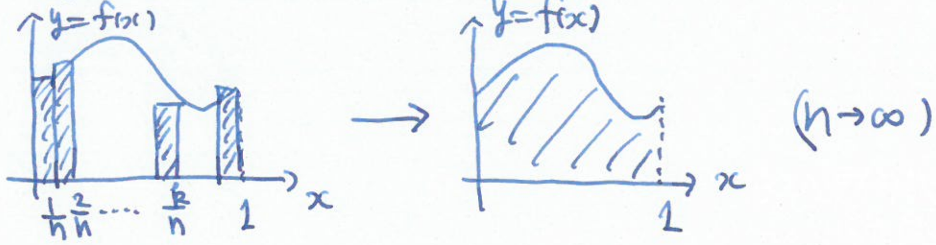
がわかる．　$\boxtimes$

§3.2 積分とその応用

〈区分求積法〉

連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対し、

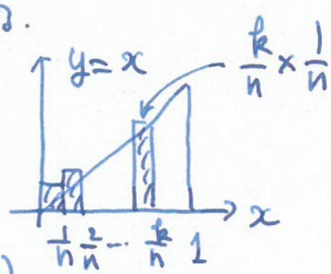
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n\to\infty)$$



$f(x)\geq 0$ のとき、$\int_0^1 f(x)dx$ は $[0,1]$ 上のグラフの下側の面積

例13.9

$\int_0^1 x\,dx$ を微分を考えることなしに求める。



右図より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

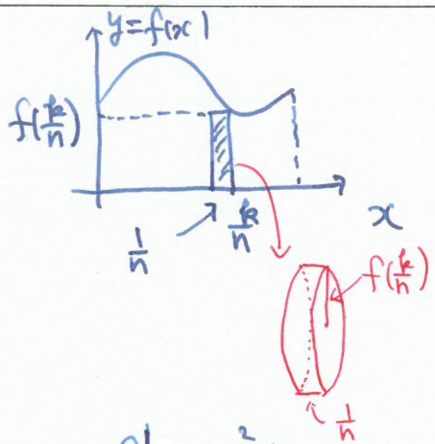
$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

だから $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ となる。 ☒

例13.10 (x軸回転体の体積)

連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は、$\forall x\in[0,1]$ に対して $f(x)\geq 0$ をみたすとする。このとき、曲線 $y=f(x)$ と x軸および2直線 $x=0, x=1$ で囲まれた部分を x軸まわりに1回転させてできる立体の体積 V を求める。

右図の斜線部分をx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は



$$\pi\underbrace{\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}_{半径}\underbrace{\frac{1}{n}}_{円板の厚さ}$$

だから，和をとって $n\to\infty$ とすると

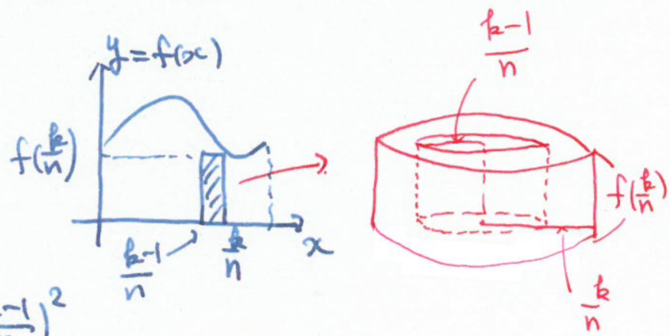
$$\sum_{k=1}^{n}\pi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\frac{1}{n}=\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\frac{1}{n}\to\pi\int_0^1(f(x))^2\,dx\quad(n\to\infty)$$

となる．よって $V=\pi\int_0^1(f(x))^2\,dx$ となる． 図

例13.11（y軸回転体の体積）

連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は $\forall x\in[0,1]$ に対して $f(x)\geq 0$ をみたすとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ と x軸および2直線 $x=0, x=1$ で囲まれた部分を y軸まわりに1回転させてできる立体の体積 V を求める．

右図の斜線部分をy軸まわりに1回転させてできる立体の体積は



$$\underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{高さ}\pi\underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{外周の半径}-\underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{高さ}\pi\underbrace{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}_{内周の半径}$$

$$=\pi f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{2k}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

となるから，和をとって $n\to\infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 2\pi \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}}_{\to \int_0^1 x f(x)\,dx} - 2\pi \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}}_{\downarrow\, \int_0^1 f(x)\,dx}$$

$$\to 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx \quad (n \to \infty)$$

となる. よって $V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx$ となる. ☑

〈曲線の長さ〉

パラメータ $0 \leq t \leq 1$ で表された曲線 C $(x(t), y(t))$ の長さを(少し形式的に)求める. $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ に対し, Taylor-Maclaurin展開より

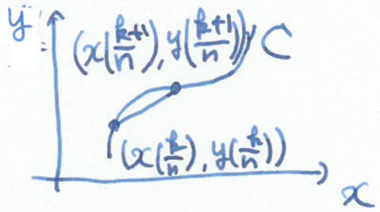
$$x\left(t + \frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right) = x'\left(\frac{k}{n}\right) t + R_1(t),$$

$$y\left(t + \frac{k}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right) = y'\left(\frac{k}{n}\right) t + R_2(t)$$

とかくと $\frac{R_1(t)}{t}, \frac{R_2(t)}{t} \to 0 \quad (t \to 0)$ より. $t = \frac{1}{n}$ とすると

$$n R_1\left(\frac{1}{n}\right),\ n R_2\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ となる.}$$

$\left(x\left(\frac{k}{n}\right), y\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ と $\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right), y\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$ の距離は三平方の定理より



$$\sqrt{\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 + \left(y\left(\frac{k+1}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x'\left(\frac{k}{n}\right) + n R_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \left(y'\left(\frac{k}{n}\right) + n R_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\ \frac{1}{n}$$

より k について和をとって $n \to \infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'\left(\frac{k}{n}\right) + n R_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \left(y'\left(\frac{k}{n}\right) + n R_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\ \frac{1}{n} \to \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \quad (n \to \infty)$$

となる. 従って曲線Cの長さℓは

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

で与えられる.

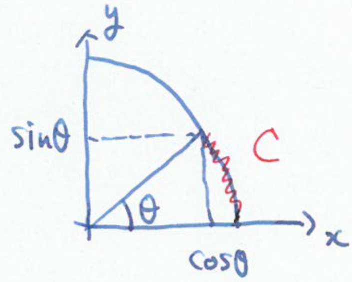
例3.12

単位円は第一象限で

$(\sqrt{1-y^2}, y) \quad (0 < y < 1)$

で表せる. 角度 θ (rad) は

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$のとき, 右図の曲線C



の長さである. よって

$$\theta = \int_0^{\sin\theta} \sqrt{\left((\sqrt{1-y^2})'\right)^2 + ((y)')^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sin\theta} \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + 1}\, dy = \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

となる. $\theta = \arcsin x$ とおくと, $\sin\theta = x$ より

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \qquad -(*)$$

が得られる. 特に, 円周率の微分積分を用いた定式化

$\pi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$ が得られる. ☒

注意3.1

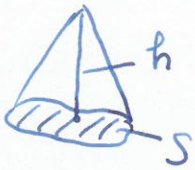
例3.12の(*)は三角関数の定義そのものである. この定義から, 微分積分学の基本定理より

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy - \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy}{x} \to \left.\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|_{y=0} = 1 \quad (x \to 0)$$

が正当化できる.

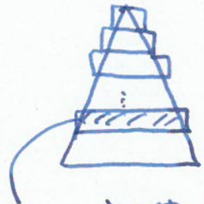
〈錐の体積〉

右図のような底面積S, 高さhの錐の体積Vを求める.



アイデア1

hを右図のようにn等分する. 上からk番目のブロックの体積V_kは, 相似比$h : \frac{k}{n}h = 1 : \frac{k}{n}$に注意して



$$V_k = \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 S\right)\left(\frac{1}{n}h\right) = \frac{k^2}{n^3}Sh$$

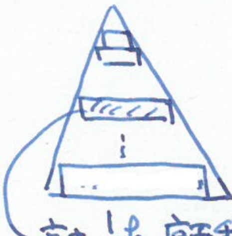
となる. kについて和をとり, $n \to \infty$とすると

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \to \frac{1}{3}Sh \quad (n \to \infty)$$

となる.

アイデア2

hを右図のようにn等分する. 上からk番目のブロックの体積v_kは



$$v_k = \left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 S\right)\left(\frac{1}{n}h\right) = \frac{(k-1)^2}{n^3}Sh$$

となる. kについて和をとり, $n \to \infty$とすると

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{Sh}{n^3}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) \to \frac{1}{3}Sh \quad (n \to \infty)$$

となる. どちらのアイデアでも同じ値に収束した.

$\boxed{\text{疑問}}$

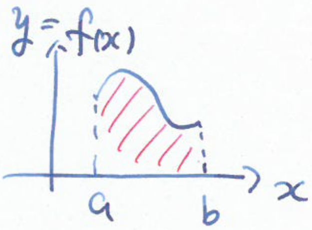
アイデア1とアイデア2は常に同じ値に収束するのか?

$\boxed{\text{答え}}$

ちがう! 大雑把にいうと, 同じ値に収束 $\Longleftrightarrow$ (Riemann)積分可能.

第4章　Riemann 積分

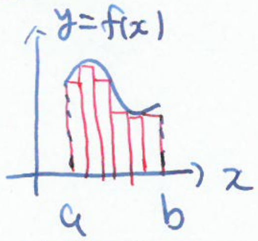
〈目標〉



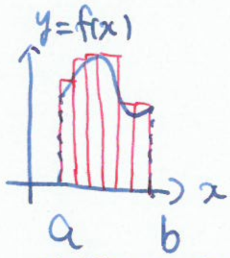
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して

面積を定義したい．

困ること



内側から近づける



外側から近づける

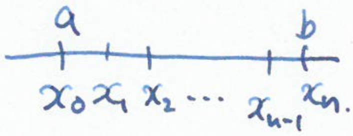
これらは一致するのか？

以下 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ とする．

§4.1　Riemann積分の定義

定義4.1（分割）

$\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_n : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ を $[a,b]$ の分割という．

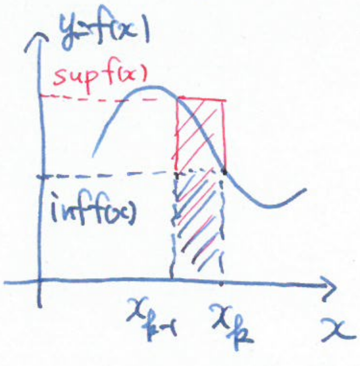


☒

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ に対して

$$s_\Delta(f):=\sum_{k=1}^{n}\left(\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1}),$$

$$S_\Delta(f):=\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1})$$



とおく。右図で ☒ の面積をあつめて和をとったものが $s_\Delta(f)$，☒ の面積をあつめて和をとったものが $S_\Delta(f)$ である．

定義4.2（Riemann積分）

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{s_\Delta(f) : \Delta は[a,b]の分割\}$$ ← 内側から近づける

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{S_\Delta(f) : \Delta は[a,b]の分割\}$$ ← 外側から近づける

とおき，Riemann下積分，Riemann上積分という．

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ のとき，f は $[a,b]$ 上 Riemann積分可能であるといい

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx \left(= \overline{\int_a^b} f(x)dx\right)$$

と定める． ☑

〈Riemann積分可能のイミ〉

「内側からどんな分割を考えても」，「外側からどんな分割を考えても」その極限が同じ値になるとき，面積（積分）が定められる．ということ．

☑ Riemann積分を求めるにはどうしたらよいか？

定義4.3（分割の長さ）

$[a,b]$ 上の分割 $\{x_0,\dots,x_n\}$ に対して $|\Delta| := \max_{k=1,\dots,n}\{x_k - x_{k-1}\}$ を分割 Δ の長さという。 ☑

定理4.1（Darboux）

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，$\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists\delta>0$ s.t. $[a,b]$ 上の $\forall$分割 $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ に対し，$|\Delta|<\delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < s_\Delta(f),\quad \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon > S_\Delta(f)$$

が成り立つ． ☑

〈Darbouxの定理のよいところ〉

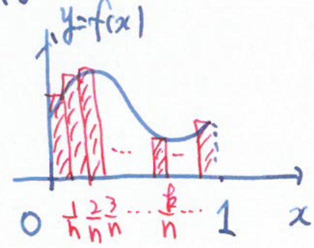
∃分割なら上限，下限の定義から従う。∀分割Δで$|\Delta|<\delta$で成り立つことが非自明.

系4.1（区分求積法）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$がRiemann積分可能ならば

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

が成り立つ. ☑



定理4.1の証明はwebノートをみよ.

系4.1の証明

$\forall\varepsilon>0$に対して，定理4.1の$\delta>0$について，$N\in\mathbb{N}$を$\frac{1}{N}<\delta$となるようにとる. $\forall n\in\mathbb{N}$に対し$n\geq N$ならば$\Delta:=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$とすれば$|\Delta|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$だから，定理4.1より

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon < s_\Delta(f) \leq \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon > S_\Delta(f) \geq \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

となる. fが$[a,b]$上Riemann積分可能なことから

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

が従う. □

注意4.1

区分求積法はfがRiemann積分可能でないと成り立たない. ☑

Q Riemann積分可能な関数はどんな関数か？

定義4.4 (振動量)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $A\subset[a,b]$ に対し

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x) := \sup_{x,x'\in A}|f(x)-f(x')|$$

を f の A における振動量という. □

命題4.1

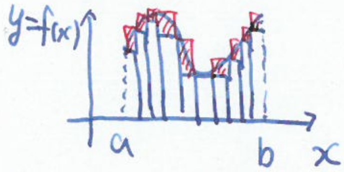
有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について

${}^\forall\varepsilon>0$ に対して ${}^\exists\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$: $[a,b]$上の分割 s.t.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon \implies f\text{はRiemann積分可能.}$$

□

〈命題4.1のイミ〉



▨ の和が小さい

$\implies f$ はRiemann積分可能

証明は web ノート

定理4.2 (Riemann積分の基本定理)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上連続 $\implies$ f はRiemann積分可能. □

証明

f は $[a,b]$ 上連続より一様連続となる (定理2.10). よって, ${}^\forall\varepsilon>0$ に対して, ${}^\exists\delta>0$ s.t. ${}^\forall x, x'\in[a,b]$ に対して,

$$|x-x'|<\delta \implies |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

とできる. $N\in\mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{N}<\delta$ をみたすようにとり,

$[a,b]$ の N 等分割 ↓

$$\Delta:=\left\{x_0=a,\ x_1=a+\frac{1}{N}(b-a),\ x_2=a+\frac{2}{N}(b-a),\ \dots,\ x_k=a+\frac{k}{N}(b-a),\ \dots,\ x_N=b\right\}$$

を$[a,b]$の分割とすると, $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{N} < \delta$ だから

$$\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) = \sup_{x_{k-1}\le x, x'\le x_k} |f(x)-f(x')| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

となり

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{N} = \varepsilon$$

が得られる. 命題4.1より f はRiemann積分可能である. □

定理4.3

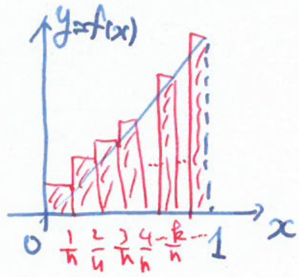
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が有界で単調減少 (or 単調増加)

$\Longrightarrow$ f はRiemann積分可能 □

証明はwebノート.

例4.1

$\int_0^1 x\,dx$ を区分求積法で求める.



$f(x)=x$ とおくと. f は$[0,1]$上連続だからRiemann積分可能である.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

より

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

と微分(原始関数)を用いずに求められる. □

§4.2 Riemann積分の性質

以下．関数は有界なもののみ考える．

定理4.4（区間加法性）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界，$a<c<b$.

〈仮定〉

f は $[a,c]$，$[c,b]$ 上 Riemann 積分可能.

〈結論〉

f は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能で $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

㊙

証明 $^\forall\varepsilon>0$ を固定する.

1（下積分の評価）．$\underline{\int_a^c} f(x)dx$，$\underline{\int_c^b} f(x)dx$ の定義より

$^\exists\Delta:[a,c]$ の分割，$^\exists\Delta':[c,b]$ の分割 s.t

$\underline{\int_a^c} f(x)dx-\varepsilon<s_\Delta(f)$，$\underline{\int_c^b} f(x)dx-\varepsilon<s_{\Delta'}(f)$

とできる．$\Delta\cup\Delta'$ は $[a,b]$ の分割だから

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx+\underline{\int_c^b} f(x)dx-2\varepsilon\leq s_\Delta(f)+s_{\Delta'}(f)$$
$$\leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f)\leq\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad —(*)$$

が成り立つ.

2.（上積分の評価） 1. と同様にして

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx\geq\overline{\int_a^b} f(x)dx \quad —(**)$$

が得られる.

3. fは$[a,c]$, $[c,b]$上 Riemann 積分可能より

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

が成り立つ. (*)と(**)より

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + 2\varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + 4\varepsilon$$

となる. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, それぞれの積分がεに依らないことに注意すれば

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \text{---(***)}$$

が得られる. 他方 $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ だから (***) の不等号はすべて等号になる. よってfは$[a,b]$上 Riemann 積分可能で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

となる. □

定理4.4の $a<c<b$ は 積分の向きを考えることで仮定せずに示すことができる.

定義4.5

Riemann積分可能な関数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$に対して

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める. ▨

定理4.5 (区間加法性)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は有界, $[a,c]$, $[c,b]$ 上 Riemann 積分可能

$\Rightarrow$ f は $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能 で

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

証明は a, b, c についての場合わけと定理4.5を用いる.

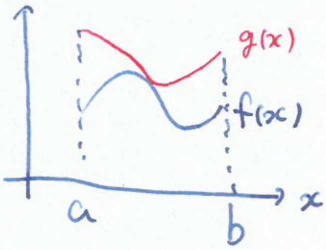
定理4.6 (積分の順序保存性)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は Riemann 積分可能,

$\forall x\in[a,b]$ に対して $f(x)\le g(x)$ ($f\le g$ とかく)

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$\blacksquare$



証明

$[a,b]$ の $\forall$分割 Δ に対して

$$\begin{aligned} s_\Delta(f) &\le s_\Delta(g) \quad (\because f\le g) \\ &\le \underline{\int}_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b g(x)\,dx \quad (\because g \text{ は Riemann 積分可能}) \end{aligned}$$

より Δ について上限をとると. f が Riemann 積分可能なことから

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

となる.

$\square$

定理4.7 (積分の線形性)

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ はRiemann積分可能, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ は Riemann 積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

☑

証明

線形性を示すには $f+g$ と αf が Riemann積分可能であることを示せばよい。

1. $f+g$ が Riemann 積分可能であることを示す.

$\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\exists \Delta, \Delta' : [a,b]$ の分割 s.t.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s_\Delta(f), \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx - \varepsilon < s_{\Delta'}(g)$$

とできる. $s_\Delta(f) \leq s_{\Delta \cup \Delta'}(f)$ と $s_{\Delta\cup\Delta'}(f) + s_{\Delta\cup\Delta'}(g) \leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f+g)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx - 2\varepsilon &< s_\Delta(f) + s_{\Delta'}(g) \\
&\leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f) + s_{\Delta\cup\Delta'}(g) \\
&\leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f+g) \\
&\leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx
\end{aligned}$$

となる. よって $\varepsilon \downarrow 0$ とすると f, g はRiemann積分可能より

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx$$

が得られる．同様にして

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \geq \bar{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx$$

も成り立つから，$f+g$はRiemann積分可能となる．

2. $\alpha=0$のとき，αfがRiemann積分可能なことは明らかなので

$\alpha\neq0$のときに示す．${}^\forall\varepsilon>0$に対し，${}^\exists\Delta$：$[a,b]$の分割 s.t

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx-\varepsilon<s_\Delta(f) \qquad (*)$$

とできる．ここで$\alpha>0$と$\alpha<0$の場合にわける．

3. $\alpha>0$のとき，$(*)$より

$$\alpha\underline{\int_a^b} f(x)dx-\alpha\varepsilon<\alpha s_\Delta(f)=s_\Delta(\alpha f)\leq\underline{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$$

だから$\varepsilon\downarrow0$とするとfがRiemann積分可能より

$\alpha\int_a^b f(x)dx\leq\underline{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$が得られる．同様に，

$\alpha\int_a^b f(x)dx\geq\bar{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$も得られるので$\alpha f$はRiemann

積分可能である．

4. $\alpha<0$のとき，$(*)$より

$$\alpha\underline{\int_a^b} f(x)dx-\alpha\varepsilon>\alpha s_\Delta(f)=S_\Delta(\alpha f)\geq\bar{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$$

より$\varepsilon\downarrow0$とするとfがRiemann積分可能より

$\alpha\int_a^b f(x)dx\geq\bar{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$が得られる．同様に，

$\alpha\int_a^b f(x)dx\leq\underline{\int_a^b}(\alpha f(x))dx$も得られるので$\alpha f$は

Riemann積分可能である．

$\square$

定理4.8 (積分平均値定理)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界.

(1) f が $[a,b]$ 上 Riemann積分可能

$$\Rightarrow \inf_{a\le x\le b} f(x) \le {}^{\exists}\lambda \le \sup_{a\le x\le b} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

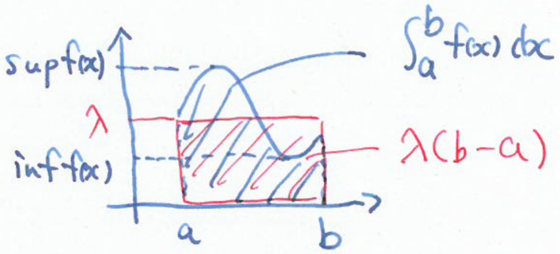
(2) f が $[a,b]$ 上連続

$$\Rightarrow {}^{\exists}x_0 \in [a,b] \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

$\boxtimes$

〈定理4.8のイミ〉

▨と▨の面積が等しくなるように λ をとることができる.



定理4.8の証明

(1) ${}^{\forall}x\in[a,b]$ に対し

$$m := \inf_{a\le y\le b} f(y) \le f(x) \le \sup_{a\le y\le b} f(y) =: M$$

だから $[a,b]$ 上で積分すると、定理4.6 (積分の順序保存性) より

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx,$$

すなわち

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

となる. よって $\lambda := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とおけば $m\le\lambda\le M$

であり $\lambda(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ となる.

(2) (1)において，fが$[a,b]$上連続ならば Mは最大値，mは最小値となる（定理2.9，Weierstrassの定理）．中間値の定理（定理2.8）より，$^{\exists}x_0\in[a,b]$ s.t. $\lambda=f(x_0)$ とできるので $\int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)(b-a)$ となる．

□

§4.3 不定積分

高校の教科書では，不定積分（or 原始関数）を先に学んでから定積分を学んだ．しかし，この講義では積分は面積を求めるための計算であることを重視するため，定積分（Riemann積分）を先に扱った．そこで不定積分とは何か？を考える．

定義4.6（不定積分）

有界でRiemann積分可能な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を

$$F(x):=\int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad (x\in[a,b])$$

で定義する．この関数 F を f の不定積分という．

□

注意4.2

上端と下端のない積分記号 $\int f(x)\,dx$ は原始関数と呼ぶのが正確である

□

定義4.7（原始関数）

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ に対し $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ が f の原始関数

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \quad ({}^{\forall}x\in(a,b))$$

このとき，$F(x)=\int f(x)\,dx$ とかく．

□

注意4.3

定義4.7で極限 $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ はFのxにおける微分係数である。つまり $F'(x)=f(x)$ ということである。 ☒

定理4.9

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界，Riemann積分可能，Fはfの不定積分，

i.e. $F(x)=\int_a^x f(z)\,dz \quad (x\in[a,b])$.

$\Longrightarrow$ Fは$[a,b]$上連続 ☒

証明

$M:=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|<\infty$ とおく。$\forall x,y\in[a,b]$ に対して

$$
\begin{aligned}
|F(y)-F(x)| &= \left|\int_a^y f(z)\,dz-\int_a^x f(z)\,dz\right| \\
&= \left|\int_a^y f(z)\,dz+\int_x^a f(z)\,dz\right| && (\because \text{定義}4.5) \\
&= \left|\int_x^y f(z)\,dz\right| && (\because \text{区間加法性 定理}4.5) \\
&\le \left|\int_x^y |f(z)|\,dz\right| && (\because \text{積分の三角不等式}) \\
&\le M|y-x| && (\because |f(x)|\le M\text{と順序保存性 定理}4.6) \\
&\to 0 \quad (y\to x)
\end{aligned}
$$

だから $F(y)\to F(x)$ $(y\to x)$ となる。従ってFはxで連続となり，$x\in[a,b]$ は任意よりFは$[a,b]$上連続となる。 □

定理4.10（微分積分学の基本定理 その1）

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続，F は f の不定積分 i.e.

$F(x)=\int_a^x f(z)dz \quad (x\in[a,b])$.

$\Rightarrow {}^\forall x\in(a,b)$ に対し $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ ▨

〈定理4.10 のイミ〉

◎ 連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し，(a,b) 上で定義された原始関数 $\int f(x)dx$ が存在する。しかも，それは不定積分 $\int_a^x f(z)dz$ に等しい。つまり

$$\to \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(z)dz\right)=f(x) \quad (x\in(a,b))$$

あとでやる

となる．高校教科書では「微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の不定積分または原始関数という」とあるが，f が連続でないと不定積分と原始関数を同じものとはみなせない．

◎ 連続関数の不定積分は端点を除いて微分可能になる．つまり，不定積分はもとの関数より滑らかになることがわかる。

証明

${}^\forall\varepsilon>0$ に対して f が x で連続なので，${}^\exists\delta>0$ s.t. ${}^\forall z\in[a,b]$ に対して

$$|z-x|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(x)|<\varepsilon \quad -(*)$$

とできる．そこで，${}^\forall h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して，$0<|h|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(z)dz-f(x)\right|$$

（∵ 区間加法性 定理4.5）

$$= \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(\zeta)-f(x))\,d\zeta \right| \quad \left(\because \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,d\zeta = f(x)\right)$$

$$\le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(\zeta)-f(x)|\,d\zeta\right| \quad \left(\because \text{積分の三角不等式}\right)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{|h|}\left|\int_x^{x+h} d\zeta\right| \quad \left(\because (*) \text{ と順序保存性 定理4.6}\right)$$

$$= \varepsilon$$

すなわち $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon$ となるので

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x) \quad (h \to 0)$$

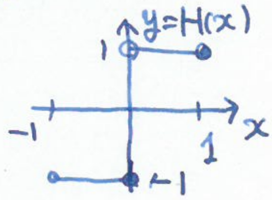
となる. □

注意4.4

定理4.10 は f が連続でないと成り立たない.

(反例) $H:[-1,1]\to\mathbb{R}$ を $H(x) := \begin{cases} -1 & (-1 \le x \le 0) \\ 1 & (0 < x \le 1) \end{cases}$

により定めると H は $x=0$ で連続ではない。



$$\int_{-1}^{x} H(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases} -\int_{-1}^{x} d\zeta = -1-x & (-1 \le x \le 0), \\ -\int_{-1}^{0} d\zeta + \int_0^x dx = -1+x & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

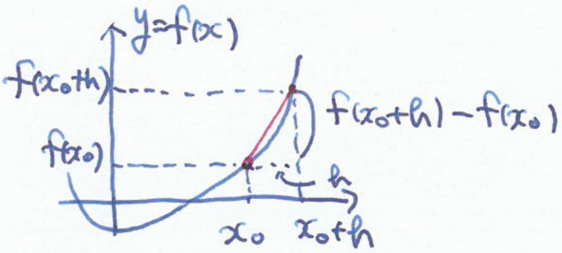
より

$$\int_{-1}^{x} H(\zeta)\,d\zeta = -1+|x| \quad (-1 \le x \le 1)$$

である. よって H の不定積分は $x=0$ で微分できないことがわかる. ▨

第5章　微分

§5.1　微分とその性質



$0<|h|<1$ に対し

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

はグラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ での接線の傾きの近似.

定義5.1（微分）

$x_0\in(a.b)$ に対し, $f:(a.b)\to\mathbb{R}$ が $x=x_0$ で微分可能

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在する.

このとき $\displaystyle f'(x_0):=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ とかき, f の x_0 における微分係数という.

f が $(a.b)$ 上微分可能

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ f は $\forall x\in(a.b)$ について微分可能.

このとき, $x\in(a.b)$ に対して, $\dfrac{df}{dx}(x):=f'(x)$ とかく.

$\dfrac{df}{dx}:(a.b)\to\mathbb{R}$ を f の導関数という　☒

以下 $I\subset\mathbb{R}$ に対し

$C(I):=\{f:I\to\mathbb{R}$, I 上連続$\}$,

$C^1(a.b):=\{f:(a.b)\to\mathbb{R}$, f は $(a.b)$ 上微分可能,

$\underline{\dfrac{df}{dx}\in C(a.b)}(=C((a,b)))\}$

↑ $\dfrac{df}{dx}$ は $(a.b)$ 上連続

とかく.

〈微分と接線〉

$f \in C^1(a.b)$, $x_0 \in (a.b)$ に対して

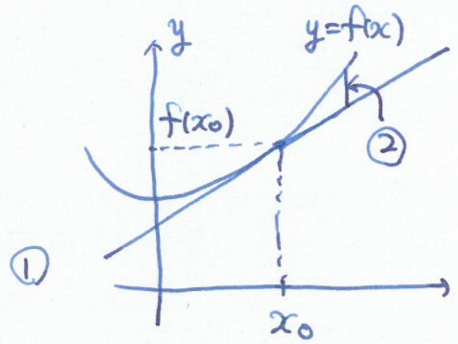
$$R(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \qquad (x \in (a.b))$$

とおく。このとき,

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{①} + \underbrace{R(x)(x-x_0)}_{②}$$

となるが $x \to x_0$ とすると

$R(x) \to 0$ がわかる。



① グラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ での接線

② $(x-x_0)$ より速く0に近づく.

← $x-x_0$ で割っても 0に収束する.

定理5.1

$f:(a.b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a.b)$

f が $x=x_0$ で微分可能

$\Longleftrightarrow$ (同値) $^\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$

とかいたときに. $R(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$ となる.

さらにこのとき、$\lambda = f'(x_0)$ となる. $\boxed{}$

証明

$(\Rightarrow)$ $\lambda = f'(x_0)$ とおくと. $x \neq x_0$ に対し

$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

となるから, 微分の定義より $R(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$ となる.

$(\Leftarrow)$ $R(x)\to 0\quad (x\to x_0)$ より

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lambda\right| = |R(x)| \to 0 \qquad (x\to x_0)$$

すなわち $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to 0\quad (x\to x_0)$ となるので

fはx_0で微分可能で $f'(x_0)=\lambda$となる. □

<u>系5.1</u>

$f:(a.b)\to\mathbb{R}$ が $x_0\in(a.b)$ で微分可能

$\Longrightarrow$ fは x_0で連続. ☒

<u>証明</u>

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$ とかくと

定理5.1より $R(x)\to 0\quad (x\to x_0)$ となる. よって

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |f'(x_0)(x-x_0)+R(x)(x-x_0)| \\ &\leq |f'(x_0)|\underbrace{|x-x_0|}_{\to 0}+\underbrace{|R(x)|}_{\to 0}\underbrace{|x-x_0|}_{\to 0} \quad (\because 三角不等式) \\ &\to 0 \qquad (x\to x_0)\end{aligned}$$

となるから. fはx_0で連続となる. □

〈微分の公式〉

<u>定理5.2</u>

$f.g\in C^1(a.b)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x_0\in(a.b)$

(1) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(2) $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$

(3) (積の微分公式)

$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

☒

注意5.1

定理5.2 (1),(2)より微分は線形である。 ☑

証明

(3)のみ示す。 $x\in(a,b)$ に対し

$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=\left(f(x)-f(x_0)\right)g(x)+f(x_0)\left(g(x)-g(x_0)\right)$$

より

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)\ (\because 系5.1)}+f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$$\to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\quad (x\to x_0)$$

となる。 □

定理5.3 (合成関数の微分公式, Chain rule)

$\underline{f=f(x)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=g(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能

↖「f の変数は x とする」の意

$$\Rightarrow \frac{d(g\circ f)}{dx}(x_0)=\frac{dg}{dx}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)\qquad (x_0\in\mathbb{R})$$

☑

注意5.2

定理5.3は $y=f(x)$, $z=g(y)$ とすると形式的に

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$ とかける。 ☑

定理5.3の証明

$x_0\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_f(x)(x-x_0)\qquad (*)$$

$$g(y)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(y-f(x_0))+R_g(y)(y-f(x_0))\qquad (**)$$

とかくと定理5.1より

$$R_f(x)\to 0\quad (x\to x_0),\quad R_g(y)\to 0\quad (y\to f(x_0))$$

となる．(**)で $y=f(x)$ とすると

$$g(f(x))=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+R_g(f(x))(f(x)-f(x_0))$$

より (*)を代入して

$$g\circ f(x)=g\circ f(x_0)+g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)$$
$$\qquad +(g'(f(x_0))R_f(x)+R_g(f(x)))(f'(x_0)+R_f(x))(x-x_0)$$

となる．ここで

$$\underbrace{g'(f(x_0))R_f(x)}_{\to 0}+\underbrace{R_g(\underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)})}_{\to 0}(f'(x_0)+\underbrace{R_f(x)}_{\to 0})\to 0 \qquad (x\to x_0)$$

となるから．定理5.1より $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ となる．

□

<u>例5.1</u>

$x>0$，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 例

<u>証明</u>（高校では対数微分法で示すが本質的に同じ）

$$x^\alpha=\exp(\log x^\alpha)=\exp(\alpha\log x)$$

より $g(y):=e^y$，$f(x):=\alpha\log x$ とすれば

$$x^\alpha=e^{f(x)}=g(f(x)),\ g'(y)=e^y,\ f'(x)=\frac{\alpha}{x}$$

だから．

$$(x^\alpha)'=g'(f(x))f'(x)$$
$$=\exp(\alpha\log x)\left(\frac{\alpha}{x}\right)$$
$$=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

となる．

□

定理5.4（逆関数の微分公式）

$f:(a.b)\to(c.d)$ 全単射，微分可能，$x_0\in(a.b)$.

$f'(x_0)\neq 0$，$y_0:=f(x_0)$

$\Longrightarrow$ f^{-1} は y_0 で微分可能であり $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ ▨

注意5.3

定理5.4は $y=f(x)$ とかくと形式的に $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ となる. ▨

注意5.4

f^{-1} が y_0 で微分可能であることがわかれば，$f^{-1}(f(x))=x$ で $x=x_0$ の微分係数を考えれば，合成関数の微分公式より

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)=1$$

となるので $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ がわかる. ▨

定理5.4の証明

$y\in(c.d)$ に対し．$y=f(x)$ となる $x\in(a.b)$ をとる.

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

となる．$y\to y_0$ とすると $f(x)\to y_0=f(x_0)$ となるから．

$x\to x_0$ となる（厳密には背理法で示す）。従って $f'(x_0)\neq 0$ より

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\to\frac{1}{f'(x_0)}\quad(y\to y_0)$$

がわかる. □

定理5.5 (パラメータ微分)

$\varphi, \psi \in C^1(a,b)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. φは狭義単調増加 (すなわち $t<t' \Rightarrow \varphi(t)<\varphi(t')$), $x_0=\varphi(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$ ☒

注意5.5

定理5.5は形式的に $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ とかける. ☒

証明

φが狭義単調増加なので $\varphi^{-1}(x)=t$ とかける. よって $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ となるので合成関数. 逆関数の微分公式を用いればよい □

これらの具体的計算は高校で習っているはず.

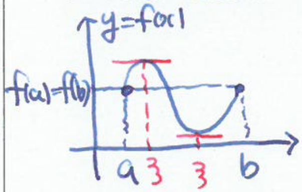
§5.2 平均値定理

定理5.6 (Rolleの定理)

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$, $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow {}^\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$ ☒

〈Rolleの定理の心〉



$f(a)=f(b)=0$ なら. 左図のように "接線の傾き"$=0$ となる点が あるということ.

定理5.6の証明

fが定数関数のときは ${}^\forall x\in(a,b)$ に対して $f'(x)=0$ となるから. たとえば $\xi=\frac{a+b}{2}$ とすればよい. 以下fは定数関数でないとする.

1. ${}^\exists c \in (a,b)$ s.t. $f(a)<f(c)$ となる場合を考える。このとき、
fは$[a,b]$上連続なので定理2.4 (Weierstrass の定理) より
${}^\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(\xi)$ とできるが、
$f(a)=f(b)$ かつ $f(a)<f(c)\le f(\xi)$ より $\xi\ne a,\ \xi\ne b$ となる.

2. $f'(\xi)\le 0$ を示す. $\xi < {}^\forall x < b$ に対して
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le 0 \qquad (\because x-\xi>0,\ f(x)-f(\xi)\le 0)$$
より $x\to\xi+0$ とすると $f'(\xi)\le 0$ となる.

3. $f'(\xi)\ge 0$ を示す. $a < {}^\forall x < \xi$ に対して
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0 \qquad (\because x-\xi<0,\ f(x)-f(\xi)\le 0)$$
より $x\to\xi-0$ とすると $f'(\xi)\ge 0$ となる. 2. 3. より
$f'(\xi)=0$ がわかる.

4. ${}^\exists c \in (a,b)$ s.t. $f(a)>f(c)$ のときも同様にできる

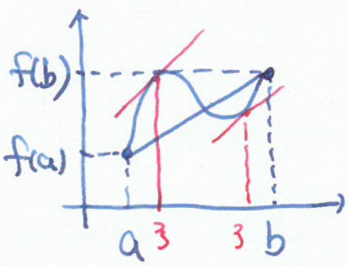
□

定理5.7 (微分平均値定理)

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b) \Rightarrow {}^\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

☒

〈平均値定理の心〉



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は左の斜め線の傾き.
これと同じ傾きを接線にもつ点 が (a,b) 内にあるということ.

証明

$\varphi:[a.b]\to\mathbb{R}$を $x\in[a.b]$ に対して

$$\varphi(x):=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$$

と定めると，$\varphi\in C([a.b])\cap C^1(a.b)$ かつ.

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0,\quad \varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる. Rolle の定理(定理5.6)より $^\exists\xi\in(a.b)$ s.t.

$\varphi'(\xi)=0$ となるので $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる. □

〈微分積分の基本定理〉

定理5.8 (微分積分の基本定理 その2)

$f\in C([a.b])\cap C^1(a.b)$, $\dfrac{df}{dx}\in C([a.b])$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{df}{dx}(x)\,dx=f(b)-f(a)$$

証明

$\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$を$[a.b]$の分割とすると，$1\leq k\leq n$に対して

微分平均値定理 (定理5.7)より，$x_{k-1}<{}^\exists\xi_k<x_k$ s.t.

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

とできるので，kについて和をとると

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

となる。$\inf\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k}f'(x)\leq f'(\xi_k)\leq\sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k}f'(x)$ より

$$s_\Delta(f)\leq f(b)-f(a)\leq S_\Delta(f).$$

だから 分割 Δ についてそれぞれ上限，下限をとると

$$\underline{\int_a^b} f'(x)\,dx \leq f(b)-f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)\,dx$$

となる．$f' = \frac{df}{dx}$ は $[a.b]$ 上連続だから Riemann 積分可能であり（定理4.2）

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(b)-f(a)$$

がわかる． $\square$

微積分の基本定理

$f \in C([a.b])$ とする．

(1) $F : [a.b] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) := \int_a^x f(z)\,dz \qquad (x \in [a.b])$$

と定めると．$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ $({}^{\forall}x \in (a.b))$ が成り立つ．つまり f の原始関数が存在する．

(2) F を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

$\square$

定理4.6（順序保存）　定理4.5（区間加法性）　定理4.2（Riemann積分の基本定理）　定理5.7（微分平均値定理）

定義4.2（Riemann積分）　定理2.10（一様連続性）　定理5.6（Rolle）

定理1.3（上限の存在）　定理2.9（Weierstrass）

定理1.9（Bolzano-Weierstrass）

$\boxed{\mathbb{R}とは何か?}$

（途中サボりまくっている）

〈平均値定理の応用〉

系5.2

$f \in C^1(a.b)$

fが$(a.b)$上単調増加 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}x \in (a.b)$ に対して $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$

証明

$(\Rightarrow)$ ${}^{\forall}x \in (a.b)$ と $h>0$ に対し $f(x+h)-f(x) \geq 0$ だから

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 .$$

$(\Leftarrow)$ ${}^{\forall}x, x' \in (a.b)$ に対し．$x<x'$ ならば平均値定理(定理5.1)と仮定より $x < {}^{\exists}\xi < x'$ s.t.

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = f'(\xi) \geq 0$$

となるから $f(x') \geq f(x)$ となる． □

系5-3

$f \in C^1(a.b)$

fが定数関数，すなわち ${}^{\exists}c \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall}x \in (a.b)$ に対して $f(x)=c$

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}x \in (a.b)$ に対して $\frac{df}{dx}(x) = 0$

証明

$(\Rightarrow)$は各自考えよ．$(\Leftarrow)$を示す．系5.2よりfは単調増加かつ単調減少になるので，${}^{\forall}x, x' \in (a.b)$に対し $x<x'$ ならば

$$f(x) \leq f(x') \quad \text{かつ} \quad f(x) \geq f(x')$$

となる．従って $f(x) = f(x')$ となる． □

〈極大・極小〉

定義5.2 (極大, 極小)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$

f が $x=c$ で 極大 (極小)

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(a,b)\setminus\{c\}$ に対して

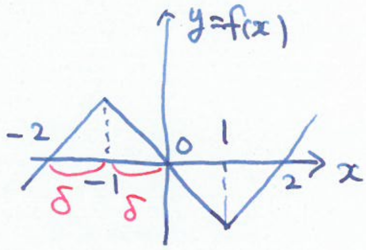
$$0<|x-c|<\delta \implies f(x)<f(c)\quad (f(x)>f(c))$$

▨

例5.2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\begin{cases} x+2 & (-\infty<x\leq -1)\\ -x & (-1\leq x\leq 1)\\ x-2 & (1\leq x<\infty)\end{cases}$$



とおくと, f は $x=-1$ $(x=1)$ で極大(極小) となる

▨

証明

極大のみ示す. 極小は各自考えよ.

$\delta=1$ とおく. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ に対し $0<|x+1|<\delta=1$

ならば, $-2<x<-1$ または $-1<x<0$ であり

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2<x<-1)\\ -x & (-1<x<0)\end{cases} <1=f(-1)$$

となるので f は $x=-1$ で極大となる ($0<\delta<4$ であれば δ はどれをえらんでもよい)

□

極大．極小はもともと微分とは関係ない．しかし，微分できれば，次のわかりやすい判定法がある．

定理 5.9

$f \in C^1(a,b)$ は $c \in (a,b)$ で極大（or 極小）

$\Rightarrow f'(c) = 0$ ☒

証明

f が $x=c$ で極大のときに示す．定義でとれる $\delta > 0$ に対して，$0 < h < \delta$ ならば $f(c+h) < f(c)$ だから

$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ となるので $h \to +0$ として

$f'(c) \leq 0$ がわかる．他方，$-\delta < h < 0$ ならば

$f(c+h) < f(c)$ だから $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ となる

ので $h \to -0$ として $f'(c) \geq 0$ がわかる．

よって $f'(c) = 0$ となる． □

定理 5.10（極大・極小の判定）

$f \in C^1(a,b)$，$c \in (a,b)$

〈仮定〉

$\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall x \in (a,b)$ に対して

$c - \delta < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

$c < x < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0$

〈結論〉

f は $x=c$ で極大． ☒

証明

${}^\forall x \in (a.b)\setminus\{c\}$ に対し．$0<|x-c|<\delta$ を仮定する．

1. $c-\delta<x<c$ ならば平均値定理より $x<{}^\exists\xi_1<c$ s.t.

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'(\xi_1)>0$$ となるから．$f(x)<f(c)$ となる．

2. $c<x<c+\delta$ ならば．平均値定理より $c<{}^\exists\xi_2<x$ s.t.

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(\xi_2)<0$$ となるから $f(x)<f(c)$ となる．

どちらの場合も $f(x)<f(c)$ となるので f は $x=c$ で極大となる．

□

〈微積分の基本定理の応用〉

定理5.11

$f\in C([a.b])\cap C'(a.b)$, $\frac{df}{dx}\in C([a.b])$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=\left(\int_0^1\frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt\right)(b-a)$$

▨

証明

$tb+(1-t)a$ は $t=0$, 1 を代入するとそれぞれ $a.b$ となることに注意しておく．$f(tb+(1-t)a)$ を t について微分すると合成関数の微分公式により

$$\frac{d}{dt}\bigl(f(tb+(1-t)a)\bigr)=\frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)(b-a)$$

となる．両辺 $0\leq t\leq 1$ で積分すると

$$(\text{左辺})=\int_0^1\frac{d}{dt}\bigl(f(tb+(1-t)a)\bigr)dt=\Bigl[f(tb+(1-t)a)\Bigr]_0^1=f(b)-f(a)$$

$$(\text{右辺}) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)(b-a)\,dt = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt\right)(b-a)$$

より $f(b)-f(a) = \left(\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt\right)(b-a)$ が得られる

$\square$

定理5.11で $\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt$ に積分平均値定理(定理4.8)を用いると $0 \le {}^\exists t_0 \le 1$ s.t. $\frac{df}{dx}(t_0 b+(1-t_0)a) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt$ となるので $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{df}{dx}(t_0 b+(1-t_0)a)$. つまり微分平均値定理(定理5.7)が得られる. 定理5.11は定理5.7より仮定が強いが. 応用上はこれで十分なことが多い.

定理5.12

$f \in C([a.b]) \cap C^1(a.b)$, $\frac{df}{dx} \in C([a.b])$.

実は「$\frac{df}{dx}$ は $(a.b)$ 上有界」で十分

$$\Rightarrow |f(b)-f(a)| \le \sup_{x\in[a.b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| |b-a|$$

$\square$

証明

定理5.11より

$$\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &= \left|\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\,dt\right| |b-a| \\
&\le \int_0^1 \left|\frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)\right| dt\, |b-a| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&\le \int_0^1 \sup_{x\in[a.b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| dt\, |b-a| \quad (\because \text{順序保存性}) \\
&= \sup_{x\in[a.b]} \left|\frac{df}{dx}(x)\right| |b-a|.
\end{aligned}$$

$\square$

§5.3 高階導関数とTaylorの定理

定義5.3

$f\in C^1(a,b)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能なとき、

$$f''(x_0):=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{df}{dx}(x)-\frac{df}{dx}(x_0)}{x-x_0}$$

とかく。$f''(x_0)$ を f の x_0 における第2次微分係数という。

また $\frac{df}{dx}$ が (a,b) 上微分可能なとき、

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x):=f''(x)\quad(x\in(a,b))$$

とかく。$\frac{d^2f}{dx^2}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の2階導関数という。 □

3次微分係数、3階導関数 etc… も同様に定義する。

以下 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$C^n(a,b):=\left\{f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{は}(a,b)\text{上}n\text{回微分可能},\ \underline{\frac{d^nf}{dx^n}\in C(a,b)}\right\}$$

とかく。

$\frac{d^nf}{dx^n}$ が (a,b) 上連続

例5.3

$n\in\mathbb{N}$ に対し、$\frac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$ を求める。$x\in(-1,1)$ に対し

$$\frac{d(\arcsin)}{dx}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

より

$$\frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x)=\frac{x}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{1-x^2}\frac{d(\arcsin)}{dx}(x)$$

だから $f:=\arcsin$ とおくと $(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}(x)=x\frac{df}{dx}(x)$

となる．両辺を n 回微分すると

$$(\text{左辺}) = (1-x^2)\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) - 2nx\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) - n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(x),$$

$$(\text{右辺}) = x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + n\frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

となるから．$x=0$ を代入すると

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) - n(n-1)\frac{d^nf}{dx^n}(0) = n\frac{d^nf}{dx^n}(0),$$

すなわち $\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) = n^2\frac{d^nf}{dx^n}(0)$ となる．$f(0)=0$，$\frac{df}{dx}(0)=1$

より漸化式をとくことで．$m\in\mathbb{N}$ に対し

$$\frac{d^{2m}f}{dx^{2m}}(0)=0, \quad \frac{d^{2m+1}f}{dx^{2m+1}}(0) = 1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2m-1)^2$$

が得られる． $\boxed{証}$

定理5.13 (Taylorの定理)

$n\in\mathbb{N}$，$f\in C^n(a.b)$，$\frac{d^kf}{dx^k}\in C([a.b])$ $(k=0,1,\dots,n)$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

とかいたときに．$a<{}^\exists\theta<b$ s.t. $R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$ とかける． $\boxed{証}$

注意5.6

定理5.13で $n=1$ とすると，$a<{}^\exists\theta<b$ s.t.

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となる．これは微分平均値定理 (定理5.7) である． $\boxed{証}$

定理5.13の証明

$n=2$で示す. $\varphi:[a.b]\to\mathbb{R}$を

$$\varphi(x):=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\left(f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}$$
$$(x\in[a.b])$$

とおくと. $\varphi(a)=\varphi(b)=f(b)$, $\varphi\in C^1(a,b)\cap C([a.b])$と

なるから. Rolleの定理(定理5.6)より. $a<{}^{\exists}\theta<b$ s.t. $\varphi'(\theta)=0$

となる. 一方

$$\varphi'(x)=f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-\frac{f'(x)}{1!}-2\left(f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{b-x}{(b-a)^2}$$

となるから

$$0=\varphi'(\theta)=\frac{f''(\theta)}{1!}(b-\theta)-2\left(f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)\right)\frac{b-\theta}{(b-a)^2}$$

より

$$\frac{f''(\theta)}{2!}(b-a)^2=f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)$$

がわかる. □

定理5.14 (Taylor-Maclaurin展開)

$n\in\mathbb{N}$, $f\in C^n(-1,1)$, $x\in(-1,1)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)x^n$$

$$\Longrightarrow\quad R_n(x)\to 0\quad(x\to 0)$$ ▨

証明

${}^{\forall}x\in(-1,1)\setminus\{0\}$に対して. Taylorの定理から. $0<|\theta_x|<|x|$

となる$\theta_x\in\mathbb{R}$がとれて

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}x^n$$

とできる．このとき．$x \to 0$ とすると $\theta_x \to 0$ となる．よって

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)\right)x^n$$

から．

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)\right) \to 0 \quad (x \to 0)$$

となる． □

例5.4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$ 四

証明

Taylor-Maclaurin展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3$$

を考えると．$R_3(x) \to 0 \quad (x \to 0)$．よって

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} - R_3(x) \to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)$$

□

例5.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}=2$$

▨

証明

$$(\log(1+x))'=\frac{1}{1+x},\quad (\log(1+x))''=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad (\log(1+x))'''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

より

$$\begin{aligned}\log(1+x)&=\log(1)+x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+R_3(x)x^3\\&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_3(x)x^3\end{aligned}$$

とTaylor-Maclaurin展開すると $R_3(x)\to 0\ (x\to 0)$.

他方,

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+R_3'(x)x^3$$

とTaylor-Maclaurin展開すると $R_3'(x)\to 0\ (x\to 0)$.

従って

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}&=\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_3(x)x^3\right)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+R_3'(x)x^3\right)}\\&=\frac{\frac{1}{3}+R_3(x)}{\frac{1}{6}-R_3'(x)}\to 2\quad (x\to 0)\end{aligned}$$

となる. □

§5.4 de l'Hospital の定理

例 5.6

$f, g \in C^1(-1,1)$, $f(0)=g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

証明

Taylor-Maclaurin展開

$f(x)=f(0)+f'(0)x+R_f(x)x$, $g(x)=g(0)+g'(0)x+R_g(x)x$

を考えると $R_f(x), R_g(x)\to 0 \quad (x\to 0)$ となる. 従って

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(0)+f'(0)x+R_f(x)x}{g(0)+g'(0)x+R_g(x)x}$$

$$=\frac{f'(0)+R_f(x)}{g'(0)+R_g(x)} \qquad (\because f(0)=g(0)=0)$$

$$\to \frac{f'(0)}{g'(0)} \qquad (x\to 0)$$

□

例5.6より $f(0)=g(0)=0$, つまり $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形 ならば

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となっているようにみえる. このことが正しいことを主張するのがde l'Hospitalの定理である.

定理5.15 (de l'Hospitalの定理)

$a\in\mathbb{R}$, $f, g\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{a\})$

(1) $f(x), g(x)\to 0 \quad (x\to a)$ ← 不定形の条件

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

(2) $f(x), g(x) \to \infty \quad (x \to a)$ ← 不定形の条件

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$ ☑

標語的にいうと $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形ならば

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる.

例5.7

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を de l'Hospital の定理を用いて示す.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \quad (\because \tfrac{0}{0}\text{の不定形}) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \quad (\because \tfrac{0}{0}\text{の不定形}) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} \quad (\because \tfrac{0}{0}\text{の不定形}) \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$ ☑

注意5.7

例5.7で $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{0}$ としてはいけない.

de l'Hospital の定理は極限が不定形のときしか使ってはいけない. ☑

定理5.15 (de l'Hospital の定理) の直観的理由 ((1)について)

Taylor-Maclaurin 展開より

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_f(x)(x-a),$$
$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + R_g(x)(x-a)$$

とかけば. $R_f(x), R_g(x) \to 0 \quad (x\to a) \quad (x\to a)$ となる.

$f(a) = g(a) = 0$ となるから

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)(x-a)+R_f(x)(x-a)}{g(a)+g'(a)(x-a)+R_g(x)(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)+R_f(x)}{g'(a)+R_g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる. □

(注) $f(a)$, $g(a)$, $f'(a)$, $g'(a)$ が存在するかわからないので、Taylor-Maclaurin展開も正しくない. 実際には、Cauchyの平均値定理を用いて、これらの議論を正当化する必要がある.

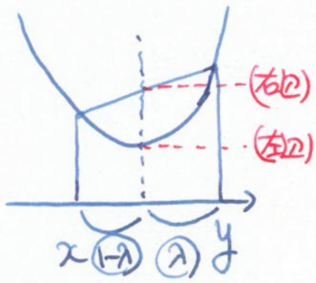
§5.5 凸関数

定義5.4 (凸関数)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上凸関数

$\overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}}$ ${}^\forall x, y\in[a,b]$, $0<{}^\forall\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$



■

定理5.16

$f\in C([a,b])\cap C^1(a,b)$. $[a,b]$ 上凸関数

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{df}{dx}$ が (a,b) 上単調増加. ■

系5.4

$f\in C([a,b])\cap C^2(a,b)$, $\frac{d^2f}{dx^2}\ge 0$

$\Longrightarrow$ f は $[a,b]$ 上凸関数 ■

$\because$ $\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0$ より $\frac{df}{dx}$ は (a,b) 上単調増加となるので
定理5.16を用いればよい. $\square$

定理5.16の証明

$(\Leftarrow)$ のみ示す. $x, y \in (a,b)$ が $x<y$ ならば $0<{}^{\forall}\lambda<1$
に対して

$$
\begin{aligned}
&\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-(\lambda+(1-\lambda))f(\lambda x+(1-\lambda)y) \\
&= \lambda(f(x)-f(\lambda x+(1-\lambda)y) \\
&\quad +(1-\lambda)(f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y) \\
&= \lambda f'(\theta_1)(x-(\lambda x+(1-\lambda)y))+(1-\lambda)f'(\theta_2)(y-(\lambda x+(1-\lambda)y)) \\
&\qquad (x<{}^{\exists}\theta_1<\lambda x+(1-\lambda)y<{}^{\exists}\theta_2<y)\ (\because \text{平均値定理}) \\
&= \lambda(1-\lambda)(f'(\theta_1)(x-y)+f'(\theta_2)(y-x)) \\
&= \underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{(f'(\theta_2)-f'(\theta_1))}_{\geq 0} \geq 0 \quad (\because \tfrac{df}{dx}\text{は単調増加})
\end{aligned}
$$

となる. 従って $\lambda+(1-\lambda)=1$ に注意すると

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

がわかる. $x>y$ のときも同じように計算すればよい

$\square$

例5.8

$p>1$ に対して. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x):=x^p \ (x\in[0,\infty))$
で定めると. $x>0$ に対して

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x)=p(p-1)x^{p-2}\geq 0 \quad (\because p, p-1\geq 0)$$

となるから、系 5.4 より f は $[0,\infty)$ 上凸関数である。
従って、$a,b>0$ と $0<\lambda<1$ に対して

$$(\lambda a+(1-\lambda)b)^p \leq \lambda a^p+(1-\lambda)b^p$$

が成り立つ。とくに $\lambda=\frac{1}{2}$ とすると $1-\lambda=\frac{1}{2}$ より

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$$

となるから $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ が得られる。
これから、数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ に対して
$\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p, \sum_{n=1}^\infty |b_n|^p<\infty$ ならば $\sum_{n=1}^\infty |a_n+b_n|^p<\infty$
となることがわかる。実際 $n\in\mathbb{N}$ に対して

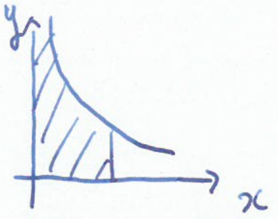
$$|a_n+b_n|^p \leq (|a_n|+|b_n|)^p \leq 2^{p-1}(|a_n|^p+|b_n|^p)$$

より

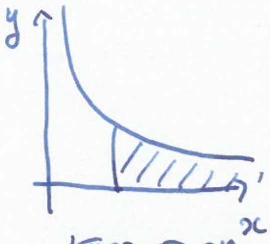
$$\sum_{n=1}^\infty |a_n+b_n|^p \leq 2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p+\sum_{n=1}^\infty |b_n|^p\right)<\infty$$

がわかる。 $\square$

第6章　広義積分



有界でない関数



無限区間

どうやって積分(面積)を定義するのが妥当か?

§6.1　広義積分

<u>例 6.1</u>

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x):=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x\in(0,1])$ で定めるとき,

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ をどう定めればよいか?を考える.

$x=0$ で $f(x)$ は定義できない(発散する)ことに注意せよ.

しかし, $\forall\varepsilon>0$ に対し $\int_\varepsilon^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ は定まるから

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

と定めるのが一つの方法だろう.

$$\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1=2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

より

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)=2$$

とすればよいだろう. 終

このアイデアを一般化する.

定義6.1（広義積分）

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ は $(a,b]$ 上連続とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

と定義する．$\int_a^b f(x)\,dx$ を広義積分といい，極限が存在するとき，$\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという．極限が存在しないとき，$\int_a^b f(x)\,dx$ は発散するという． ☑

例6.2

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ を求める．$\frac{1}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$$

と2つにわけて広義積分を求めなければいけない．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 2 \quad (\text{各自})$$

より $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx = 4$ となる． ☑

例6.3

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ は発散する．

証明

$\frac{1}{x}$ は $x=0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx + \int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

と2つにわける．

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon_1\downarrow 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon_1\downarrow 0}\left[\log|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon_1}=\lim_{\varepsilon_1\downarrow 0}\log\varepsilon_1=-\infty,$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon_2\downarrow 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon_2\downarrow 0}\left[\log|x|\right]_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_2\downarrow 0}(-\log\varepsilon_2)=+\infty$$

となり、それぞれの広義積分は収束しない. □

注意6.1

例6.3 で正しそうにみえる次の計算は正しくない

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\left[\log|x|\right]_{-1}^{1}=\log|1|-\log|-1|=0$$

($x=0$ で $\frac{1}{x}$ が定義できないことを認識していない)

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right)=0$$

(2つの広義積分を同じ ε で表している)

例6.4

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x):=\frac{1}{x^2}$ $(x\in[1,\infty))$ で定めるとき,

$\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ をどう定めればよいか?を考える.

$^\forall M>1$ に対し $\int_1^M\frac{1}{x^2}dx$ は定まるから

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{1}{x^2}dx$$

と定めるのが一つの方法であろう.

$$\int_1^M\frac{1}{x^2}dx=\int_1^M x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_1^M=1-M^{-1}=1-\frac{1}{M}$$

より

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{1}{x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right)=1$$ とすればよいだろう. ☒

定義6.2（広義積分）

$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ は $[a,\infty)$ 上連続とする．このとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

で定義する．$\int_a^\infty f(x)dx$ を広義積分といい，極限が存在するとき，$\int_a^\infty f(x)dx$ は収束するという．極限が存在しないとき，$\int_a^\infty f(x)dx$ は発散するという． ☒

$\alpha>0$ に対し $\frac{1}{x^\alpha}$ の広義積分は重要である．

定理6.1

$\alpha>0$ に対して，次が成り立つ．

(1) $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & (0<\alpha<1) \\ \infty & (\alpha\geq 1) \end{cases}$$

(2) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha>1) \\ \infty & (0<\alpha\leq 1) \end{cases}$$ ☒

証明は演習とする．$\alpha=1$ のときに注意せよ．

例6.5（Gauss積分）

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する． ☒

証明

1. $x\geq 0$ に対し $e^{-x^2}\geq 0$ より $\int_0^M e^{-x^2}dx$ は $M>0$ について単調増加である．従って $\int_0^M e^{-x^2}dx$ が $M>0$ について有界であることをいえばよい．

2. $\xi \geq 1$ に対し. $\xi e^{-\xi} \leq 1$ だから(各自), とくに
$\xi = x^2$ として $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ $(x \geq 1)$ がわかる.

従って $M > 1$ に対して

$$\int_1^M e^{-x^2}dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2}dx$$
$$\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad \left(\because \frac{1}{x^2} \geq 0\right)$$
$$= 1 \quad (\because 定理6.1)$$

だから

$$\int_0^M e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^M e^{-x^2}dx$$
$$\leq 1 + 1 \quad (\because 第1項は e^{-x^2} \leq 1 を使う)$$

より $\int_0^M e^{-x^2}dx$ は M について有界となるので
$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する. □

注意6.2

実は $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる. この広義積分は, 偏差値などの確率・統計, 温度分布や濃度分布を表す微分方程式など, 様々な分野で関係のある積分である. なお. 不定積分 $\int_0^x e^{-y^2}dy$ は x の初等関数(積分を含まない関数)でかくことはできないことが知られている. ▨

§6.2 絶対収束と条件収束

以下. 連続関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ のみを考える. このとき.

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \quad と \quad \int_0^\infty f(x)\,dx$$

の収束・発散を調べる.

例6.6

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,\infty)$ に対し.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

とおくと. f は $[0,\infty)$ 上連続となる. このとき. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し, $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する. ▨

証明.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示す. $M, M'>0$ に対し

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{M'} \frac{\sin x}{x}dx\right| \\
&= \left|\int_{M'}^M \frac{\sin x}{x}dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_{M'}^M - \int_{M'}^M \frac{1}{x^2}\cos x\,dx\right| \quad (\because 部分積分) \\
&\leq \frac{1}{M}+\frac{1}{M'} + \left|\int_{M'}^M \frac{1}{x^2}dx\right| \quad (\because 三角不等式) \\
&\leq 2\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M'}\right) \to 0 \quad (M, M'\to\infty)
\end{aligned}$$

だから, Cauchy の収束判定条件より $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx$ は存在する. すなわち $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する.

2. $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ が発散することを示す. $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (各自)$$

となる. $l\in\mathbb{N}$ に対し, $n=2^l$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2コ}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4コ=2^{3-1}コ}$$
$$+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{2^l}}_{2^{l-1}コ}$$
$$= 1+\frac{1}{2}l$$

となるので $l\to\infty$ とすると $n\to\infty$ となり,

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}l\right)\to\infty \quad (l\to\infty)$$

だから $\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ は発散する. □

定義6.3 (絶対収束, 条件収束)

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ 上連続

(1) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束 $\overset{}{\underset{定義}{\Longleftrightarrow}}$ $\int_0^\infty |f(x)|dx$ が収束

(2) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が条件収束 $\underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $\int_0^\infty f(x)dx$ は収束するが絶対収束しない

例6.6は条件収束する例である。$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$ は絶対収束する（例6.5を参照）

定理6.2

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $[0,\infty)$上連続.

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束 $\Longrightarrow$ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束 ☒

証明

$M, M'>0$ に対し. $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束するから

$$\left|\int_0^M f(x)\,dx-\int_0^{M'} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{M'}^M f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \left|\int_{M'}^M |f(x)|\,dx\right| \quad (\because \text{三角不等式})$$
$$\to 0 \quad (M, M'\to\infty)\ \left(\because \int_0^\infty |f(x)|dx<\infty\right)$$

より Cauchyの収束判定条件より $\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)\,dx$ は収束する □

定理6.3（絶対収束の判定条件）

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. $[0,\infty)$上連続

〈仮定〉

$\exists\lambda>1$, $\exists K>0$ s.t. $\forall x\in[0,\infty)$ に対して $x^\lambda|f(x)|\leq K$.

〈結論〉

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束

☒

証明

$M>0$ に対し $\int_0^M |f(x)|dx$ は単調増加 ($\because |f(x)|\geq 0$) だから、$\int_0^M |f(x)|dx$ が $M>0$ について有界であることをいえばよい。仮定より

$$|f(x)| \leq \frac{K}{x^\lambda} \quad ({}^\forall x \in [1,\infty))$$

だから、$M \geq 1$ に対し

$$\int_1^M |f(x)|dx \leq \int_1^M \frac{K}{x^\lambda}dx \leq \int_1^\infty \frac{K}{x^\lambda}dx \quad \left(\because \frac{1}{x^\lambda}\geq 0\right)$$

$$= \frac{K}{\lambda-1} \quad (\because 定理6.1)$$

だから、

$$\int_0^M |f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_1^M |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{K}{\lambda-1}$$

に注意すれば $\int_0^M |f(x)|dx$ は $M>0$ について有界となる。 □

系6.1

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$、$[0,\infty)$ 上連続、$\lambda>1$

$\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が存在 $\Rightarrow$ $\int_0^\infty f(x)dx$ は絶対収束

$\because$ $\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が存在するので $x^\lambda f(x)$ は $[0,\infty)$ 上有界となる。従って定理6.3の仮定をみたす。 □

例6.7

$s>0$ に対して $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束(絶対収束)する

証明

1. $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ を考える。$0<s<1$ のとき、$e^{-x}x^{s-1}\to\infty$ $(x\downarrow 0)$

である．$0<x\leq 1$ に対し $e^{-x}\leq 1$, $x^{s-1}\geq 0$ より

$$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx \leq \int_0^1 x^{s-1}dx = \frac{1}{1-s} < \infty$$

だから $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する．$s\geq 1$ のとき，$e^{-x}x^{s-1}$ は $x\to 0$ で発散しない．($\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する)．

2. $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ を考える．

$$x^2(e^{-x}x^{s-1}) = e^{-x}x^{s+1} \to 0 \quad (x\to\infty)$$

より系6.1から $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する． □

定義6.4 (Γ-関数)

$s>0$ に対し $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ を Γ関数という ▨

命題6.1

Γ関数について次が成り立つ

(1) $\Gamma(1)=1$． (2) $s>0$ に対し $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ ▨

命題6.1より

$\Gamma(1)=1=0!$, $\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=\Gamma(1)=1!$

$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\Gamma(2)=2!$

$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3!$ ...

となるので

$n\in\mathbb{N}$ に対して $\Gamma(n)=(n-1)!$

がわかる．つまり，Γ関数は階乗を $(0,\infty)$ に拡張したものである．