微分積分学 B 演習問題　(2016 年 9 月 15 日)

問題 1.1.
次の関数を微分せよ.

(1) x^x
(2) $(x^2+1)^{\frac{p}{2}}$ (p は定数)
(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ (a, b, c, α, β, γ は定数)
(4) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ (神奈川 2016 改)

例 1.1.
$\log x$ の微分を知っているものとして, e^x の微分を求める. $y=e^x$ とおくと, 逆関数の性質により, $x=\log y$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\log y)'}=y=e^x$$

となる.

問題 1.2.
逆関数の微分公式を利用して, 次の関数の微分を求めよ.

(1) $\arcsin x$
(2) $\arccos x$
(3) $\arctan x$

問題 1.3.
$\sin x$ の形式的な Taylor-Maclaurin 展開

$$\sin x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$$

に対して, a_0 から a_5 を求めよ.

問題 1.4.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ を求めよ (ヒント: sin の Taylor-Maclaurin 展開を 4 次まで使う).

問題 1.5.
$p>1$ に対して, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x):=x^p$ で定める.
(1) f が凸関数であることを示せ.
(2) $a,b>0$ に対して, $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ となることを示せ.

問題 1.6.
無限回微分可能な関数 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ に対して中心差分公式

$$\frac{f(h)-f(-h)}{2h}\to f'(0)\quad(h\to 0)$$

を示せ.

問題 1.7.

次の関数を微分せよ.

(1) $\sinh x$
(2) $\cosh x$
(3) $\tanh x$
(4) $\dfrac{1}{\tanh x}$

問題 1.8.

数学的帰納法を用いて, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

を示せ.

問題 1.9 (埼玉 2016)**.**

$a > 0$ とする. 関数 $f(x) = \dfrac{a\cos x}{\sin x - 2}$ $(0 \leq x \leq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるような a の値を求めよ.

問題 1.10 (熊本 2014)**.**

関数

$$y = \frac{\log x + 1}{x} \tag{1.1}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 関数 (1.1) の増減, グラフの凹凸を調べ, グラフを書け. 必要ならば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい.
(2) 関数 (1.1) のグラフ, x 軸および直線 $x = p$ $(p > e^{-1})$ で囲まれた部分の面積を S とするとき, 面積 S を p を使った式で表しなさい. また, $S = 18$ となるような p の値を求めなさい.

問題 1.11.

$\sqrt{1+x}$ の形式的な Taylor-Maclaurin 展開

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

に対して, a_0 から a_5 を求めよ. さらに $n, k \in \mathbb{N}$ に対して定義されていた二項係数 ${}_nC_k$ を $n > 0$ に対して

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

と拡張することによって何が成り立ちそうかを考えてみよ (ヒント: $(1+x)^n$ を二項係数を用いてどう書けていたかを思い出してみよ).

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 9 月 29 日)

問題 2.1.

$n, m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を求めよ (ヒント: 積和公式を用いる. $n = m$ のときに注意せよ).

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta - \theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta$　(埼玉 2016)

問題 2.2.

$\alpha, \beta > 0$, $M > 0$ に対して,

$$I_M := \int_0^M e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$$

を考える. 部分積分を 2 回用いることにより, I_M を M, α, β を用いて表せ.

問題 2.3.

$-1 < x < 1$ に対して, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$ となることを示せ. 次に, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ を高校で計算する方法 (つまり, arcsin を用いずに計算する方法) と, arcsin を用いて計算する方法の両方で求めよ. また, 高校で学んだときにどうして変数変換が出てくるのかについて説明せよ.

問題 2.4.

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を区分求積法を用いて求めよ.

問題 2.5.

次の曲線の長さを求めよ.

(1) $r > 0$ に対して

$$x(t) = r(2\pi t - \sin(2\pi t)), \quad y(t) = r(1 - \cos(2\pi t)) \qquad (0 \le t \le 1)$$

で表示されるサイクロイド $(x(t), y(t))$.

(2) 懸垂線 $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$　$(0 \le x \le 1)$. (ヒント: まず, パラメータ表示 $(x(t), y(t))$ がどうなるかを考えよ)

問題 2.6 (神奈川 2016)**.**

放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

問題 2.7.

次の問いに答えよ.

(1) $-1 < x < 1$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dx}\arctan x$ に注意して $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k\,dx$ を求めよ.

(3) 形式的な計算 (積分と極限の交換や, $x = \pm 1$ でも実は等式が成立すること) を認めることにして,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

を導け.

問題 2.8.

$\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ に対して $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ を求めよ. 次に $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ が収束するための $\alpha > 0$ の条件を求めよ ($\alpha = 1$ のときに注意せよ).

問題 2.9.

$\alpha > 0$, $M > 0$ に対して $\displaystyle\int_{1}^{M}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ を求めよ. 次に $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_{1}^{M}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ が収束するための $\alpha > 0$ の条件を求めよ ($\alpha = 1$ のときに注意せよ).

問題 2.10 (神奈川 2016)**.**

放物線 $y = x^2$ と点 $(-1, 3)$ を通る直線で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.

問題 2.11 (千葉 2016)**.**

関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ について考える.

(1) $f(0)$, $f(1)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における法線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と (2) で求めた直線, および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ.

微分積分学 B 演習問題　　(2016 年 10 月 6 日)

問題 3.1.

区分求積法を用いて $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ を求めよ.

問題 3.2.

区分求積法を用いて $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示せよ. ただし, 分割数を n とすること ($2n$ としないこと).

問題 3.3.

区分求積法を用いて $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示せよ.

問題 3.4.

連続な関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0,1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x = 1$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\displaystyle\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 3.5.

連続な関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0,1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x = 1$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\displaystyle 2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 3.6.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が有界な単調増加関数であれば, Riemann 積分可能であることを証明せよ.

問題 3.7.

次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は書かなくてよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ (ヒント: $t = \sqrt{x+1}$)

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. ただし, a は定数 (ヒント: $t = \sqrt{x^2+a} + x$)

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (ヒント: $t = \tan(\frac{x}{2})$)

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+be^x}$. ただし, a, b は零でない定数 (ヒント: $t = e^x$)

問題 3.8.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

を示したい.

(1) $\displaystyle\operatorname*{osc}_{x\in[a,b]} f(x) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\operatorname*{osc}_{x\in[a,b]} f(x) \ge \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ を示せ (ヒント: 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $x_0, x_1\in[a,b]$ が存在して, $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} f(x)-\varepsilon < f(x_0)$, $\displaystyle\inf_{x\in[a,b]} f(x)+\varepsilon > f(x_1)$ とできることを使う).

問題 3.9.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x\,\text{が有理数} \\ 0 & x\,\text{が無理数} \end{cases}$$

で定義する (f を Dirichlet の関数という).

(1) f の $[0,1]$ 上の Riemann 下積分を求めよ (ヒント: $\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$ を $[0,1]$ の分割としたときに $\displaystyle\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$ がどうなるか考えよ).

(2) f の $[0,1]$ 上の Riemann 上積分を求め, f が $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能でないことを示せ.

問題 3.10.

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,1]$ に対して

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x\,\text{が有理数} \\ 1 & x\,\text{が無理数} \end{cases}$$

で定義する.

(1) $n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

注意.

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ とならない. 実際, g は Riemann 積分可能でない (問題 3.9). また, Riemann 積分を拡張した Lebesgue 積分を考えると, g は Lebesgue 積分可能となるが, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 1$ となることが知られている.

微分積分学 B 演習問題 (2016 年 10 月 20 日)

問題 4.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + 2\varepsilon \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

を示せ.

問題 4.2 (積分の三角不等式)**.**

$a < b$ とし, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする[1]. このとき

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{4.2}$$

を示せ (ヒント: $-|f| \leq f \leq |f|$ に定理 4.5 を使う). なお, (4.2) を**積分の三角不等式**という.

注意.

問題 4.2 で $a < b$ と断っているのには意味がある. $a < b$ の大小関係が逆になっている, すなわち $b < a$ のときでも (4.2) を考えることはできるが, このときに (4.2) の右辺は 0 以下になってしまうので, 不等式は一般には成立しない. $b < a$ のことも考えると

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

とするのが正しい.

問題 4.3 (積分の Schwarz の不等式)**.**

$a < b$ とし, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする[2]. このとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right) \tag{4.3}$$

を示せ (ヒント: $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b (f(x) + tg(x))^2\,dx \geq 0$$

に注意して, t に関する判別式を考えよ). なお, (4.3) を**積分の Schwarz の不等式**という.

問題 4.4.

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha f + \beta g$ が $[0, 1]$ 上 Riemann 積分可能であることを認めて,

$$\int_0^1 (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + \beta \int_0^1 g(x)\,dx$$

を示せ (ヒント: 左辺について区分求積法を考える).

---

[1] f の仮定は Riemann 積分可能でもよいが, $|f|$ が Riemann 積分可能となることを示さないといけない.

[2] f の仮定は Riemann 積分可能でもよいが, fg が Riemann 積分可能となることを示さないといけない.

問題 4.5.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で,「すべての $x\in[a,b]$ に対して, $f(x)\geq 0$」かつ「$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$」を仮定する. このとき, 任意の $x\in[a,b]$ に対して, $f(x)=0$ となることを示せ.

問題 4.6.

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ は連続で, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$ となるが, $f\not\equiv 0$ となる例をあげよ (ヒント: 問題 4.5 の仮定とどう違うのか注意せよ).

問題 4.7.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で,「すべての $x\in[a,b]$ に対して, $f(x)\geq 0$」かつ「ある $x_0\in(a,b)$ が存在して $f(x_0)>0$」とする. このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx>0 \tag{4.4}$$

を示せ. さらに, f が連続でないとき (4.4) が成立しない反例をあげよ.

問題 4.8.

次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

問題 4.9.

次の各問いに答えよ.

(1) 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx\leq\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx\leq\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx.$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を計算せよ. さらに電卓を用いることで, 円周率がおよそ 3.14 であることを確かめよ.

問題 4.10.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$, $\Delta'=\{x_0,x'_1,x_2\}$ に対して

$$s_\Delta(f)\leq s_{\Delta\cup\Delta'}(f)$$

を示せ (ヒント: $x_{k-1}<x'_1<x_k$ となる k があるときに $s_\Delta(f)$ と $s_{\Delta\cup\Delta'}(f)$ の対応する係数がどうなるかを考えよ).

問題 4.11.

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$, に対して

$$s_\Delta(f)+s_\Delta(g)\leq s_\Delta(f+g)$$

を示せ (ヒント: $\displaystyle\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f+\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} g\leq\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k}(f+g)$ を示せ).

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 10 月 27 日)

問題 5.1 (積分の第二平均値定理)**.**

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ は Riemann 積分可能で, $g\geq 0$ (つまり, すべての $x\in[a,b]$ に対して $g(x)\geq 0$) かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx>0$ とする．このとき, $\displaystyle\inf_{x\in[a,b]} f(x)\leq\lambda\leq\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\lambda\int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ (ヒント: $\displaystyle g(x)\inf_{y\in[a,b]} f(y)\leq f(x)g(x)\leq g(x)\sup_{y\in[a,b]} f(y)$ に注意して, 定理 4.8 のように示す).

問題 5.2 (Riemann 和)**.**

有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,\ldots,x_n\}$, $x_{k-1}\leq\xi_k\leq x_k$ に対して

$$R[\Delta:\{\xi_k\}_{k=1}^n]:=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

を Δ, $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ に関する f の **Riemann 和**という.

(1) グラフを用いて, Riemann 和がどのようなものかを説明せよ.

(2) f が Riemann 積分可能であるとき, $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ の取り方に関係なく

$$R[\Delta:\{\xi_k\}_{k=1}^n]\to\int_a^b f(x)\,dx\quad(|\Delta|\to 0)$$

となることを説明せよ (ヒント: $s_\Delta(f)\leq R[\Delta:\{\xi_k\}_{k=1}^n]\leq S_\Delta(f)$ となることを確かめたあとに, Darboux の定理を用いる).

問題 5.3 (会津大 '07, 北九州市大 '06, 同志社大・工 '04)**.**

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{\pi k}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n+2k}{n^2+nk+k^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

問題 5.4.

$-1\leq x\leq 1$ に対して不定積分 $\displaystyle F(x)=\int_{-1}^x|\xi|\,d\xi$ を求めよ．次に F が原点で微分可能であること, すなわち $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ が存在することを示せ.

問題 5.5.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対し

$$f_n(x) := \begin{cases} 4n^2 x & 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 4n - 4n^2 x & \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

と定める.

(1) f_n のグラフを書け (ヒント: それぞれの場合わけは一次関数だから...).

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ (まじめに計算してもいいし, グラフを用いてもよい).

問題 5.6.

問題 5.5 の記号をそのまま用いる.

(1) $x \in (0,1)$ に対して, $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを説明せよ.

(2) 積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

をしてはいけないことを説明せよ.

問題 5.7.

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = \dfrac{1}{2},\ a_4 = \dfrac{1}{3},\ a_5 = \dfrac{2}{3},\ a_6 = \dfrac{1}{4},\ a_7 = \dfrac{2}{4},\ a_8 = \dfrac{3}{4},\ a_9 = \dfrac{1}{5},\ a_{10} = \dfrac{2}{5}, \ldots$
として, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in \{a_1, a_2 \ldots, a_n\} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく.

(1) f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 について, それぞれグラフを書け.

(2) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ.

問題 5.8.

問題 5.7 の記号をそのまま用いる. また, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を問題 3.9 で定めた Dirichlet の関数とする. すなわち

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

である.

(1) すべての $x \in [0,1]$ に対して, $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となることを説明せよ.

(2) 積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

をしてはいけないことを説明せよ.

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 11 月 10 日)

問題 6.1.

定義に基づいて, 微分を求めよ.

(1) $x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
(2) $\sin x$
(3) e^x
(4) $\log x \quad (x > 0)$

問題 6.2.

$f, g \in C^1(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, 次を示せ.

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

問題 6.3.

$f, g \in C^1(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ に対して, 積の微分公式

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

を差分を用いずに示せ. つまり講義ノートの定理 5.1 を用いて示せ.

問題 6.4.

$f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする. このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して合成関数の微分公式

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)$$

を (高校の教科書のように) 差分を用いて説明せよ. このときに, 何に注意しないといけないかを指摘せよ.

問題 6.5.

講義の例 5.1 は定理 5.3 を直接適用できない意図的な間違いがある. その部分を指摘し, 定理 5.3 を例 5.1 にも適用可能になるようにするにはどうすればよいかを説明せよ.

問題 6.6.

次の関数 $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ について, 定義に基づいて $x = 0$ での微分可能性を調べよ.

(1) $f(x) = |x|$
(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

問題 6.7.

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $xf(x)$ は $x = 0$ で微分可能となることを定義に基づいて示せ.

問題 6.8.

$f, g, h \in C^1(a,b)$ に対して, 次を示せ.

$$\frac{d(fgh)}{dx} = \frac{df}{dx}gh + f\frac{dg}{dx}h + fg\frac{dh}{dx}.$$

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 11 月 17 日)

問題 7.1.

$r > 0$ に対して

$$x = r\cos\frac{\theta}{r} \quad y = r\sin\frac{\theta}{r}$$

とおく.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)^2$ を求めよ.

問題 7.2 (曲率)**.**

問題 7.1 の記号をそのまま用いる.

(1) ベクトル $\left(\dfrac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \dfrac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right)$ とベクトル $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ が θ に関係なく直交することを示せ.

(2) $\left(-\dfrac{dy}{d\theta}(\theta), \dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$ は $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ と直交するので, $\kappa = \kappa(\theta)$ を用いて

$$\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \frac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right) = \kappa(\theta)\left(-\frac{dy}{d\theta}(\theta), \frac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$$

と書ける. $\kappa(\theta)$ を求めよ.

注意.

$\kappa(\theta)$ は曲線の曲がり具合をあらわす量である. この量を**曲率**という. また, $R = \dfrac{1}{\kappa(\theta)}$ を**曲率半径**という. 曲率半径は高速道路や鉄道の (急な) カーブに表示されていることがある.

問題 7.3.

次の関数の微分を逆関数の微分公式を用いて計算せよ.

(1) $\sqrt{x}$ $(x > 0)$

(2) e^x ($y > 0$ に対して $\dfrac{d\log}{dy}(y) = \dfrac{1}{y}$ は用いてよい)

問題 7.4.

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $a < b$ とする. 次を証明せよ.

(1) (置換積分法) $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\xi)\,d\xi$

(2) (部分積分法) $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$

問題 7.5 (Cauchy の平均値定理)**.**

$f, g \in C^1(a,b) \cap C([a,b])$ はすべての $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. このとき, $a < \theta < b$ が存在して
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$
とできることを示せ (ヒント: $\phi(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ とおく)

問題 7.6.

$f \in C^1(\mathbb{R})$ は導関数が有界, すなわち, ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して
$$\left| \frac{df}{dx}(x) \right| \leq K$$
をみたすとする. このとき, f は Lipschitz 連続であること, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
とできることを示せ.

問題 7.7.

Rolle の定理について, 「$c \in (a,b)$ が存在して, $f(a) > f(c)$ の場合」の証明を与えよ.

問題 7.8.

$\phi \in C^1(-1,1) \cap C([-1,1])$ は $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ とする. $|x|$ は $x = 0$ の点で微分できないが, それでも
$$H(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$
と定めると, 部分積分の公式
$$-\int_{-1}^{1} |x| \phi'(x)\, dx = \int_{-1}^{1} H(x)\phi(x)\, dx$$
が成り立つことを示せ.

問題 7.9.

次が正しいか正しくないか, 理由をつけて答えよ.

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ は $x = 0$ で微分できる.

(2) $\sqrt{x} \in C([0,1]) \cap C^1(0,1)$

(3) $\log x \in C^1(0,1)$

(4) $\log x \in C([0,1]) \cap C^1(0,1)$

微分積分学B 演習問題　(2016年11月24日)

問題 8.1.

$f \in C^1(a,b)$ とする.

(1) 「f が (a,b) 上単調減少」ならば「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \leq 0$」を示せ.

(2) 「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \leq 0$」が成り立つならば「f が (a,b) 上単調減少」が成り立つことを示せ.

問題 8.2.

$f \in C^1(a,b)$ とする. f が定数関数ならば, すべての $x \in (a,b)$ に対して, $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ となることを微分の定義に従って示せ.

問題 8.3.

$-1 < x < 1$ とする.

(1) $\arcsin x + \arccos x$ の微分を計算せよ.

(2) $\arcsin x + \arccos x$ を求めよ.

問題 8.4.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

を示せ.

問題 8.5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, ある $K > 0$, $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{1+\alpha}$$

をみたすとする. このとき, f は定数関数となることを示せ (ヒント: 微分が 0 になることを示せばよい).

問題 8.6.

$f \in C(-1,1)$ は $x = 0$ 以外で微分可能であるとする. このとき有限な極限 $\lim_{x \to 0} f'(x) = l$ が存在するならば, f は $x = 0$ でも微分可能となり, $f'(0) = l$ となることを証明せよ.

問題 8.7.

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする.

(1) $x \geq 0$ に対して, $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ となることを示せ.

(2) 上を利用して, $a, b > 0$ ならば

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{8.5}$$

を示せ. (8.5) の不等式を **Young の不等式**という. $p = q = 2$ のときは, 相加・相乗の不等式である.

問題 8.8 (Hölder の不等式)**.**

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする．$f, g \in C([a,b])$ は $|f(x)| \not\equiv 0,\ |g(x)| \not\equiv 0$ をみたすとする．このとき

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つことを示せ．この不等式を **Hölder の不等式**という (ヒント: $\dfrac{|f(x)|}{(\int_a^b |f(y)|^p\,dy)^{\frac{1}{p}}}$, $\dfrac{|g(x)|}{(\int_a^b |g(y)|^q\,dy)^{\frac{1}{q}}}$ に Young の不等式を用いて, $a \le x \le b$ で積分してみよ).

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 12 月 8 日)

問題 9.1.

$n=3$ のときに Taylor の定理を証明せよ.

以下

$$C^\infty(a,b) := \{f:(a,b)\to\mathbb{R}, f \text{ は } (a,b) \text{ 上で何回でも微分可能}\}$$

とおく.

問題 9.2.

$f,g\in C^\infty(a,b)$ とする. 次の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2(fg)}{dx^2}(x) \quad x\in(a,b)$

(2) $\dfrac{d^3(fg)}{dx^3}(x) \quad x\in(a,b)$

(3) $\dfrac{d^4(fg)}{dx^4}(x) \quad x\in(a,b)$

問題 9.3 (Leibniz rule)**.**

$f,g\in C^\infty(a,b)$, $x\in(a,b)$, $n\in\mathbb{N}$ とする. $\dfrac{d^n(fg)}{dx^n}(x)$ を推測し, 数学的帰納法を用いて証明を与えよ.

問題 9.4.

$-1<x<1$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $n\in\mathbb{N}$ に対して $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{1+x}$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ. すなわち, $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + R_n(x)x^n, \quad R_n(x)\to 0 \quad (x\to 0)$$

が成り立つときの a_n を求めよ.

(3) 形式的に積分を計算することで, $\log(1+x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ.

問題 9.5.

$-1<x<1$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x))$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x))$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ (ヒント: $\dfrac{1}{1+x^2}$ は初項 1, 公比 $-x^2$ の等比級数の和).

(3) 形式的に積分を計算することで, $\arctan(x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ. そして, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\dfrac{d^n(\arctan)}{dx^n}(0)$ を求めよ.

問題 9.6.

$a > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ を示せ (ヒント: 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq [2a]+1$ ならば

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[2a]}\cdot\frac{a}{[2a]+1}\cdots\frac{a}{n} \leq \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[2a]}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2a]}$$

となる (理由を書くこと). $n \to \infty$ とするとどうなるか？).

問題 9.7.

(簡単のため)$x > 0$ とする[3]. 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して, n と x に依存する定数 $0 < \theta_n < x$ が存在して

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

と書けることを示せ.

(2) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ となることを示せ. すなわち

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \to e^x \quad (n \to \infty)$$

となることを示せ.

問題 9.8.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ となることを示せ.

問題 9.9.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ となることを示せ.

注意.

問題 9.7, 9.8, 9.9 は証明は別にして, 結果を覚えておくこと (巾級数の性質を用いると, もう少し簡単に証明ができる).

問題 9.10.

次の極限を求めよ. ただし, ロピタルの定理を使ってはいけない.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$ (ヒント: Taylor の定理を用いて, $x > 0$ に対して

$$e^x \geq 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

を示せ)

[3]以下の問題は $x < 0$ でも成立する.

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 12 月 8 日)

問題 10.1.

de l'Hospital の定理を用いて, 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

定理 (de l'Hospital の定理)**.**

$f, g \in C(\mathbb{R})$ は $x \to \infty$ のときに $f(x), g(x) \to 0$ (または ∞) とする. このとき, $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

問題 10.2.

上記 de l'Hospital の定理を示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ に対して, $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}$ に注意して, $f(x), g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ のときに, 上記の de l'Hospital の定理を示せ.

問題 10.3.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^4}$

(2) $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$

問題 10.4.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to +0} x \log(\tan x)$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to +0} (\sin x)^{\sin x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x^x - e^x)$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

問題 10.5.

$p \geq 1$ に対して, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^p \quad (x \in [0, \infty))$ で定義する.

(1) f が $[0, \infty)$ 上の凸関数であることを示せ.

(2) $a, b > 0$ に対して

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

を示せ.

問題 10.6.

凸関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と, $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$ に対して, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ならば

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3))$$

となることを示せ (ヒント: まず, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)\left(\dfrac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{1 - \lambda_1}\right)$ と変形してから, 凸関数の定義を用いる. つぎに, $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ に注意して, 定義をもう一度使う).

問題 10.7 (相加相乗平均)**.**

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -\log x \quad (x \in (0, \infty))$ で定義する.

(1) f が $(0, \infty)$ 上の凸関数であることを示せ.

(2) $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式 $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ を示せ.

問題 10.8.

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

を示せ (ヒント: Taylor-Maclaurin 展開を使う).

問題 10.9.

次の極限を求めよ. de l'Hospital の定理を用いる方法と, Taylor-Maclaurin 展開を使う方法の両方で示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}\right)$ (ヒント: $y = \dfrac{1}{x}$ とおく)

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

微分積分学B 演習問題　　(2016 年 12 月 15 日)

問題 11.1.

次の問いに答えよ.

(1) $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ は $[a, b)$ 上連続とする. このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の定義を与えよ.

(2) 定義にもとづいて $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx$ を求めよ.

問題 11.2.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

問題 11.3.

次の問いに答えよ.

(1) $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ は $(-\infty, a]$ 上連続とする. このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ の定義を与えよ.

(2) 定義にもとづいて $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ を求めよ.

問題 11.4.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

問題 11.5.

$x > 0$ に対して,

$$F(x) := \int_1^x \frac{1}{\xi}\,d\xi$$

と定義する[4].

(1) $a, b > 0$ に対して, $F(ab) = F(a) + F(b)$ となることを示せ. ただし, $F(x) = \log(x)$ となることを用いてはいけない.

(2) $x \leq 0$ に対して,

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{\xi}\,d\xi$$

と定義することはできない. この理由を説明せよ.

---

[4] この講義では, 初等関数 (指数関数や三角関数, 対数関数) の厳密な定義を与えていないが, $F(x) = \log(x)$ である.

問題 11.6.

$\lambda > 0$ に対して
$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda}$$
を考える. $t = \log x$ と変数変換することにより, 次を示せ.

(1) $\lambda \leq 1$ のとき, 広義積分は発散する.

(2) $\lambda > 1$ のとき, 広義積分は収束する.

問題 11.7.

$\alpha, \beta > 0$, $M > 0$ に対して,
$$I_M := \int_0^M e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$$
を考える.

(1) 部分積分を 2 回用いることにより, I_M を M, α, β を用いて表せ.

(2) $M \to \infty$ とすることにより, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$ を求めよ.

問題 11.8.

$\alpha, \beta > 0$ に対して, 広義積分
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$
を求めよ.

問題 11.9.

次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$

微分積分学 B 演習問題　(2016 年 12 月 22 日)

問題 12.1.

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$ は $(0,1]$ 上連続とする.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を与えよ.

(2) $0<\lambda<1$ と $K>0$ が存在して, すべての $x\in(0,1]$ に対して

$$x^\lambda|f(x)|\le K$$

を仮定する. このとき, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は絶対収束することを証明せよ.

問題 12.2.

Γ-関数について, 次を示せ.

(1) $\Gamma(1)=1$.

(2) $s>0$ に対して, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ (ヒント: 部分積分法を用いる).

定理 (正項級数の収束判定法)**.**

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は単調減少かつ「すべての $x\ge 0$ に対して, $f(x)>0$」 であるとする. このとき, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$ も収束する[5].

問題 12.3.

正項級数の収束判定法を証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(k)\le\int_{k-1}^k f(x)\,dx$$

であることを示せ (ヒント: グラフを書いてみよ).

(2) $M\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^M f(k)\le\int_0^M f(x)\,dx$$

となることを示せ.

(3) $M\to\infty$ とすることで定理を証明せよ.

問題 12.4 (Riemann の zeta 関数)**.**

$s>1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$ が収束することを示せ (ヒント: $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x^s} & x\ge 1\end{cases}$ として, 正項級数の収束判定法を用いる).

[5] 実は逆も成立する

問題 12.5 (Beta 関数)**.**

$p, q > 0$ とするとき,

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束することを示せ. この関数 B を **Beta 関数**という.

問題 12.6.

B を Beta 関数とする. 次を示せ.

(1) $p, q > 0$ に対して $B(p, q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1, q)$

(2) $p, q \in \mathbb{N}$ に対して $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

問題 12.7.

次の広義積分が収束することを示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

問題 12.8.

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ はすべての $x \geq 0$ に対して $f(x) \geq 0$ とし, 広義積分

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

は収束するとする.

(1) f が単調減少のとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を示せ (ヒント: 背理法を用いる. 単調減少なことから, lim は inf におきかえられることを使う).

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ とならない例を作れ (ヒント: 不連続な関数で作る方が簡単).

問題 12.9 (形式的な広義積分の計算)**.**

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ を求めたい. 次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ に対して, $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ を t の式で表せ (問題 11.8 も参照せよ).

(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ を求めよ.

(3) 形式的に, 積分の順序を交換して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\,dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty \sin x\left(\int_0^\infty e^{-tx}\,dt\right)dx\end{aligned}$$

と変形することで[6], $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ を求めよ.

[6]この変形を実際にやってよいかどうかをきちんと証明するのはかなり難しい (3 年生の解析学 A(Lebesgue 積分論) を使う) が, とりあえず計算してみるという気持ちはとても大切である.