微分積分学 **B** 中間試験問題

2018 年 12 月 6 日 第 1 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ. 問題 2 以降のそれぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 **1.**

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $a > 0$ に対して a^{x^2} を微分せよ

(2) $\arccos x$ を微分せよ.

(3) 次の関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. ただし, $a > 0$ は定数とする. 結果は t の関数でよい.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

(4) 曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ を C とする.

(a) 曲線 C の接線で原点を通るものを l とする. 接線 l の方程式を求めよ.

(b) 曲線 C, 接線 l, x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+2}{n}} + \sqrt{\frac{n+3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)$ を求めよ.

(7) 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ の増減表を書き, 極値を求めよ. なお, $x \to \pm\infty$ と関数の凹凸については言及しなくてよい.

(8) $f(x) = xe^{3x}$ とする. $-1 < a < 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = a$, $x = a + 1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を $S(a)$ とする.

(a) xe^{3x} の原始関数を一つもとめよ.

(b) $S(a)$ を求めよ.

(c) $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ.

(9) $x \geq 0$ とする. 曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = \dfrac{2}{\pi}x$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(10) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ. なお, **仮定をきちんと書くこと.**

(11) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ が Rimeann 積分可能となるための十分条件 (だが必要条件ではないもの) を一つ述べよ. なお, **Riemann 下積分や Riemann 上積分を用いてはいけない.**

(12) $[0,1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？主張を述べよ.

(13) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ は $[0,2]$ 上 Riemann 積分可能とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(14) $f : (-1,3) \to \mathbb{R}$ が $x = 1$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(15) $f : (1,2) \to \mathbb{R}$ に対して, $F : (1,2) \to \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べよ.

(16) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする. このとき, Rolle の定理を述べよ.

(17) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ が $x = 0$ で極大であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ は $[-2,3]$ 上連続とする. このとき, f の $[-2,3]$ 上の Riemann 積分 $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ の定義を述べよ. ただし,「分割」,「Riemann 下積分」,「Riemann 上積分」の定義を書くこと.

問題 3.

Riemann 積分 $\displaystyle\int_{1}^{3} x^2\,dx$ を考える.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{3} x^2\,dx$ を求めよ (答えのみでよい).

(2) 区分求積法を用いて, (1) で求めた値になることを示せ. ただし, 分割数を n とすること (分割数が n でない場合は採点しない).

問題 4.

$F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を $-1 \le x \le 1$ に対して, $F(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} |\xi|\,d\xi$ で定める.

(1) $F(x)$ を x の式で積分を用いずに表せ.

(2) F が $x = 0$ で微分可能であることを証明し, $F'(0)$ を求めよ.

問題 5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする.

(1) f が $\mathbb{R}$ 上微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0)$ となることを, 上の同値条件を用いて証明せよ.

問題 6.

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{(\log x)^3}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\,dx$ (ヒント: $t = \tan x$ とおく)

(3) $x > 0$ に対して $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,dy$ (ヒント: $\sqrt{y^2+1} = t - y$ とおく)

(4) $x > 0$ に対して $\displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{y^2+1}\,dy$ (ヒント: 部分積分)

問題 7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上連続な偶関数とする.

(1) f が偶関数であることの定義を述べよ.

(2) 任意の $a > 0$ に対して, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ を示せ.

(3) f は $x = 0$ で微分可能であるとする. このとき, $f'(0) = 0$ を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

6 Dec 2018 微分積分学B

学生番号　　　名前　　　得点

問題番号 1

(1) $2x a^{x^2} \log a$　(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(3) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

(4) (a) $y = \dfrac{1}{2e}x$　(b) $\dfrac{1}{8}$　(5) $-\dfrac{1}{6}\pi$　(6) $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(7)

x		0		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘	0 極小	↗	$4e^{-2}$ 極大	↘

(8) (a) $\dfrac{1}{9}(3x-1)e^{3x}$

(b) $\dfrac{1}{9}(3a-1)e^{3a} + \dfrac{1}{9}(3a+2)e^{3(a+1)} + \dfrac{2}{9}$

(c) $a = -\dfrac{e^3}{(1+e^3)}$

(9) $\dfrac{1}{12}\pi^2$

(10) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が Riemann積分可能ならば $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(11) f は $[0,2]$ 上連続 or f は $[0,2]$ 上単調増加/減少.

(12) 連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$,

$\displaystyle\int_0^1 (\alpha f(x))\,dx = \alpha\int_0^1 f(x)\,dx$

(13) $\displaystyle\inf_{x\in[0,2]} f(x) \leq {}^{\exists}\lambda \leq \sup_{x\in[0,2]} f(x)$　s.t. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 2\lambda$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ が存在する. $\left(\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \text{ が存在する}\right)$

(15) $\dfrac{dF}{dx} = f$

(16) $f(a)=f(b) \Rightarrow {}^{\exists}\theta\in(a,b)$ s.t. $f'(\theta)=0$

(17) ${}^{\exists}\delta>0$ s.t. ${}^{\forall}x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ に対して

$0<|x-0|<\delta \Rightarrow f(x)<f(0)$

($0<|x-0|<\delta$ か $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ のどちらかによって $x\neq 0$ となっていればよい)

問題番号
2

$\Delta=\{x_0, x_1, \ldots, x_n : -2=x_0<x_1<\cdots<x_n=3\}$ を $[-2,3]$ の分割という.

$$\underline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1}) : \Delta=\{x_0,\ldots,x_n\} \text{は} [-2,3] \text{の分割}\right\}$$

$$\overline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\right)(x_k-x_{k-1}) : \Delta=\{x_0,\ldots,x_n\} \text{は} [-2,3] \text{の分割}\right\}$$

をそれぞれ (f の $[-2,3]$ 上における) Riemann 下積分, Riemann 上積分

という。

$$\underline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx = \overline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx$$

となるとき, f は $[-2,3]$ 上 Riemann 積分可能であるといい

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx := \underline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx \left(= \overline{\int}_{-2}^{3} f(x)\,dx\right)$$

と定める.

学生番号　　　名前　　　得点

問題番号 3

(1) $\frac{26}{3}$

(2) $$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}k+\frac{8}{n^3}k^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2+4\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 2+4+\frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$

問題番号 4

(1) $x \leq 0$ のとき.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |\xi| \, d\xi$$
$$= \int_{-1}^{x} (-\xi) \, d\xi$$
$$= -\int_{-1}^{x} \xi \, d\xi$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\xi^2\right]_{-1}^{x}$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$x > 0$ のとき.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |\xi| \, d\xi$$
$$= \int_{-1}^{0} |\xi| \, d\xi + \int_{0}^{x} |\xi| \, d\xi$$
$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \xi \, d\xi$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\xi^2\right]_{0}^{x}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$$

$\therefore$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & (x \leq 0) \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

(2)

$$\lim_{x \to 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0-} \left(-\frac{1}{2}x\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{2}x\right) = 0$$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$ より

F は $x = 0$ で微分可能であり.

$F'(0) = 0$.

学生番号　　　　名前　　　　得点

問題番号 5

(1) $^\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t.

$$f(x) = f(0) + \lambda(x-0) + R(x)(x-0)$$

とかいたとき，$R(x) \to 0 \quad (x \to 0)$　となる．

(このとき，$f'(0) = \lambda$ となる)

(2) f, g は $x=0$ で微分可能なので

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_f(x)x,$$
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + R_g(x)x$$

とかくと，$R_f(x), R_g(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる．

従って

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= f(0) + g(0) + (f'(0) + g'(0))x + (R_f(x) + R_g(x))x \\ &= (f+g)(0) + (f'(0) + g'(0))x + (R_f(x) + R_g(x))x\end{aligned}$$

となり，$R_f(x) + R_g(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となるから，

$(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0)$ が得られる．

問題番号 6

(1) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\log x)^3}{x}dx = \int_0^2 y^3 dy$ $\left(\begin{array}{l} y=\log x \text{と変数変換} \\ dy = \frac{1}{x}dx, \\ \begin{array}{c|c} x & 1 \to e^2 \\ \hline y & 0 \to 2 \end{array} \end{array} \right)$

$$= \frac{1}{4}\left[y^4\right]_0^2$$

$$= 4$$

(2) $t=\tan x$ とおくと. $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ で

$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \pi/4 \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$, $\dfrac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \dfrac{1}{1+4\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

だから

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+4t^2}dt.$$

$s=2t$ とおくと $ds=2dt$, $\begin{array}{c|c} t & 0 \to 1 \\ \hline s & 0 \to 2 \end{array}$ より

$$\int_0^1 \frac{1}{1+4t^2}dt = \int_0^2 \frac{1}{1+s^2}\frac{1}{2}ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan s\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\arctan 2$$

(3) $\sqrt{y^2+1} = t-y$ とおくと.

$$y^2+1 = (t-y)^2 = t^2-2ty+y^2$$

より

$$y = \frac{1}{2t}(t^2-1) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{2t}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$\begin{array}{c|c} y & 0 \to x \\ \hline t & 1 \to \sqrt{x^2+1}+x \end{array}$$

となる. よって

$$\sqrt{y^2+1} = t-y = t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

より

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy = \int_1^{\sqrt{x^2+1}+x} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\cdot\frac{1}{2t}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \int^{\sqrt{x^2+1}+x} \frac{1}{t}dt$$

$$= \log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

となる

(4) 部分積分より

$$\int_0^x \sqrt{y^2+1}\,dy = \left[y\sqrt{y^2+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}}dy$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int_0^x \frac{y^2+1-1}{\sqrt{y^2+1}}dy$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int_0^x \sqrt{y^2+1}\,dy + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy$$

$\therefore$

$$2\int_0^x \sqrt{y^2+1}\,dy = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

だから

$$\int_0^x \sqrt{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

学生番号　　　名前　　　得点

問題番号
7

(1) $^\forall x \in \mathbb{R}$に対して $f(x) = f(-x)$

(2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ である.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\,dy$$

($x = -y$ と変数変換
$dx = (-1)dy$

x	$-a \to 0$
y	$a \to 0$

)

$$= \int_{0}^{a} f(-y)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(y)\,dy \quad (\because f は偶関数)$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

だから

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

となる.

(3) $f(x) = f(-x)$ を両辺 x で微分すると

$$f'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$$

となる. $x=0$ を代入すると

$$f'(0) = -f'(-0) = -f'(0)$$

より $2f'(0) = 0$ だから $f'(0) = 0$ となる.