微分積分学 B 試験問題

2019 年 1 月 24 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f(x) = e^{2\sqrt{3}(\sin x + \cos x)^2} \cos 2x \quad (-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ とする. ただし, e は自然対数の底とする.

(a) $f'(0)$ を求めよ.

(b) 増減表を書き, 極値とそれを与える x の値を求めよ.

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ を計算せよ.

(2) 平面上の曲線 $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sqrt{3}\sin\theta\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を C とする.

(a) 曲線 C を x, y の方程式で表せ.

(b) 曲線 C の $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線 l の方程式を求めよ.

(c) 曲線 C の $y \geq 0$ の部分, 接線 l, および直線 $x = -2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(3) f, g は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能な関数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{d^9(fg)}{dx^9}(x)$ の $\dfrac{d^3 f}{dx^3}(x)\dfrac{d^6 g}{dx^6}(x)$ の係数を求めよ.

(4) $\dfrac{d^5}{dx^5}(e^x \sin x)$ に $x = 0$ を代入した値を求めよ.

(5) e^x の Taylor-Maclaurin 展開を $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いたとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して a_n を求めよ.

(6) $\sin x$ の Taylor-Maclaurin 展開を $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いたとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して a_n を求めよ.

(7) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|\sin x|^3}}{|x|^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような $\alpha \in \mathbb{R}$ の値を求めよ.

(8) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}$ を求めよ.

(9) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$ を求めよ.

(10) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^8}$ を求めよ.

(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$ を求めよ (ヒント: $y=\dfrac{1}{x}$ とおく).

(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ を求めよ.

(13) $\lambda>0$ に対して $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx$ を求めよ.

(14) $x>0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dt$ を x の式で表せ.

(15) $t>0$ に対して, $\displaystyle f(t):=\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $f(t)$ を 積分を用いない式で表せ.

(16) $t>0$ に対して, $\displaystyle f(t):=\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ とおく. $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 **2.**

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+6x)-6x+18x^2-72x^3}{1-18x^2-\cos(6x)}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めたい.

(1) $\log(1+6x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^4 の項まで

$$\log(1+6x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+R_{4,1}(x)x^4$$

の形で答えよ (答えのみでよい).

(2) $\cos(6x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を x^4 の項まで

$$\cos(6x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+R_{4,2}(x)x^4$$

の形で答えよ (答えのみでよい).

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+6x)-6x+18x^2-72x^3}{1-18x^2-\cos(6x)}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めよ.

問題 **3.**

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x):=-\log x$ と定める.

(1) f が凸関数であることの定義を述べよ.

(2) f が凸関数であることを示せ.

(3) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ をみたす $p,q>1$ と $a,b\geq 0$ に対して $ab\leq\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$ を示せ.

問題 **4.**

$\lambda>0$ とする.

(1) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^{3\lambda}}\,dx$ の定義を述べよ.

(2) 定義に基づいて $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^{3\lambda}}\,dx$ が収束する $\lambda>0$ の必要十分条件を求め, 積分の値を求めよ.

問題 **5.**

$\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$ が絶対収束することを示したい.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$ が絶対収束することを示せ (ヒント : $x\geq 0$ に対して $\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$ である).

問題 6.

関数 $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を, 次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in [2N-1, 2N)), \\ -1 & (\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in [2N, 2N+1)). \end{cases}$$

(1) f のグラフを $1 \leq x \leq 5$ の範囲で書け.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ は絶対収束しないことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$a_n = \int_1^{2n} f(x)dx, \qquad b_n = \int_1^{2n+1} f(x)dx$$

で定義する. この時, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ は存在するか? 証明をつけて答えよ.

問題 7.

$p, q > 0$ に対し, $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(2-x)^{q-1}\,dx$ を考える.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(2-x)^{q-1}\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(2-x)^{q-1}\,dx$ が絶対収束することを示せ.

学生番号　　　　名前　　　　　　　　得点

問題番号 1

(1) (a) $4\sqrt{3}\,e^{2\sqrt{3}}$

(b)

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{2}e^{2\sqrt{3}+3}$	$\searrow$	0

$x=\frac{\pi}{6}$ のときに極大値

$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}e^{2\sqrt{3}+3}$ をとる

(c) $\frac{1}{4\sqrt{3}}(e^{4\sqrt{3}}-1)$

(2) (a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$

(b) $y=-3x+4\sqrt{3}$

(c) $12+8\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$

(3) 84

(4) -4

(5) $a_n=\frac{1}{n!}$

(6) $a_n=\begin{cases}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} & (n=2m-1,\ m\in\mathbb{N})\\ 0 & (n=2m,\ m\in\mathbb{N})\end{cases}$

(7) $\alpha=\frac{3}{2}$

(8) -2

(9) 1

(10) $+\infty$

(11) $\frac{1}{6}$

(12) $-\frac{1}{3}$

(13) $\begin{cases}\frac{1}{\lambda-1} & (\lambda>1)\\ +\infty & (0<\lambda\leq 1)\end{cases}$

(14) $\frac{1}{x}$

(15) $\frac{1}{1+t^2}$

(16) $\frac{\pi}{2}$

問題番号
2

(1) $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots$ に $t=6x$ を代入すると

$$\log(1+6x) = 6x - 18x^2 + 72x^3 - 324x^4 + R_{4.1}(x)x^4$$

が得られる。ここで $R_{4.1}(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ である。

(2) $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots$ に $t=6x$ を代入すると

$$\cos(6x) = 1 - 18x^2 + 54x^4 + R_{4,2}(x)x^4$$

が得られる。ここで $R_{4.2}(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ である

(3) 上記を代入して $x \to 0$ とすれば

$$\frac{\log(1+6x) - 6x + 18x^2 - 72x^3}{1-18x^2 - \cos(6x)} = \frac{(6x - 18x^2 + 72x^3 - 324x^4 + R_{4.1}(x)x^4) - 6x + 18x^2 - 72x^3}{1-18x^2 - (1-18x^2+54x^4+R_{4.2}(x)x^4)}$$

$$= \frac{-324x^4 + R_{4.1}(x)x^4}{-54x^4 - R_{4.2}(x)x^4}$$

$$= \frac{-324 + R_{4.1}(x)}{-54 - R_{4.2}(x)}$$

$$\to \frac{-324}{-54} = 6 \qquad (x \to 0)$$

が得られる。

24 Jan 2019 微分積分学B

学生番号　　　名前　　　得点

問題番号 3

(1) $\forall x, y \in (0, \infty)$, $0 < {}^\forall \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(2) $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ より

$f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ がわかる.

(3) fは凸だから. $0 < \lambda < 1$ と

$0 < x, y < \infty$ に対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

が成り立つ. よって

$$-\log(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq -\lambda \log x - (1-\lambda) \log y$$

より

$$\lambda \log x + (1-\lambda) \log y \leq \log(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

が得られる. expをとれば

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$$

がわかる.

↗.

ここで $x = a^p$, $y = b^q$,

$\lambda = \frac{1}{p}$ とおけば $1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

だから

$$(a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

つまり

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

がわかる.

問題番号 4

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3\lambda}}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M} \frac{1}{x^{3\lambda}}dx$

(2) $\lambda \neq \frac{1}{3}$ のとき.

$$\int_1^M \frac{1}{x^{3\lambda}}dx = \left[\frac{1}{1-3\lambda}x^{1-3\lambda}\right]_1^M$$

$$= \frac{1}{1-3\lambda}M^{1-3\lambda} - \frac{1}{1-3\lambda}$$

であり, $\lambda = \frac{1}{3}$ のとき.

$$\int_1^M \frac{1}{x^{3\lambda}}dx = \int_1^M \frac{1}{x}dx$$

$$= \left[\log x\right]_1^M$$

$$= \log M$$

となる.

(a) $1-3\lambda > 0$ のとき、つまり

$\lambda < \frac{1}{3}$ のとき.

$M^{1-3\lambda} \to \infty \quad (M\to\infty)$

だから

$$\int_1^M \frac{1}{x^{3\lambda}}dx \to \infty \quad (M\to\infty)$$

となる ↗

(b) $1-3\lambda < 0$ のとき. つまり

$\lambda > \frac{1}{3}$ のとき.

$M^{1-3\lambda} \to 0 \quad (M\to\infty)$

だから

$$\int_1^M \frac{1}{x^{3\lambda}}dx \to -\frac{1}{1-3\lambda}$$

$$= \frac{1}{3\lambda-1} \quad (M\to\infty)$$

となる.

(c) $\lambda = \frac{1}{3}$ のとき.

$\log M \to \infty \quad (M\to\infty)$

だから

$$\int_1^M \frac{1}{x^{3\lambda}}dx \to \infty \quad (M\to\infty)$$

となる.

以上より

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3\lambda}}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{3\lambda-1} & \lambda > \dfrac{1}{3} \\ +\infty & \lambda \leq \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

がわかる.

学生番号　　名前　　得点

問題番号
5

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\right| dx$ が収束する.

(2) $M>0$ に対して $\displaystyle\int_0^M \left|\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\right| dx$

が有界であることを示せばよい. $x>0$ に対し

$$\left|\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\right| \leq e^{-x}$$

だから

$$\int_0^M \left|\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\right| dx \leq \int_0^M e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^M$$

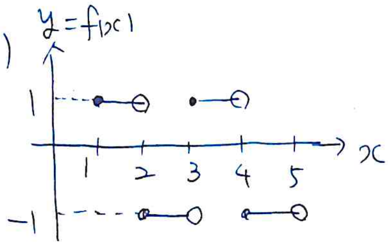
$$= 1-e^{-M} \leq 1$$

となるので $\displaystyle\int_0^M \left|\frac{e^{-x}\cos(2x)}{1+x^2}\right| dx$ は

有界となる.

問題番号
6

(1)



(2) $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|dx$

$\displaystyle = \int_1^\infty 1\, dx$

$\displaystyle = \lim_{M\to\infty}\int_1^M 1\, dx$

$\displaystyle = \lim_{M\to\infty}(M-1) = \infty$

だから $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ は

絶対収束しない

(3) $\displaystyle a_n = \int_1^{2n} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{2n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\int_{2\ell-1}^{2\ell} f(x)\,dx + \int_{2\ell}^{2\ell+1} f(x)\,dx\right)$

$\displaystyle + \int_{2n-1}^{2n} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\int_{2\ell-1}^{2\ell}(+1)\,dx + \int_{2\ell}^{2\ell+1}(-1)\,dx\right)$

$\displaystyle + \int_{2n-1}^{2n}(+1)\,dx$

$\displaystyle = \left(\sum_{\ell=1}^{n-1}(+1-1)\right) + 1 = 1$

$\displaystyle b_n = \int_1^{2n+1} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{2n+1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\int_{2\ell-1}^{2\ell} f(x)\,dx + \int_{2\ell}^{2\ell+1} f(x)\,dx\right)$

$\displaystyle = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\int_{2\ell-1}^{2\ell}(+1)\,dx + \int_{2\ell}^{2\ell+1}(-1)\,dx\right)$

$\displaystyle = \sum_{\ell=1}^{n}(+1-1) = 0$

(4) $\displaystyle\int_1^{2n} f(x)\,dx \to 1 \quad (n\to\infty)$,

$\displaystyle\int_1^{2n+1} f(x)\,dx \to 0 \quad (n\to\infty)$

より $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)\,dx$ が存在しない

ので $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ は存在しない.

24 Jan 2019 微分積分学B

学生番号　　名前　　得点

問題番号 7

(1) $\int_0^1 |x^{p-1}(2-x)^{q-1}|\,dx$ が収束する.

(2) $0<x\leq 1$ に対し

$$|x^{p-1}(2-x)^{q-1}| = x^{p-1}(2-x)^{q-1}$$

である. さらに $0\leq x\leq 1$ に対し

$$(2-x)^{q-1} \leq \begin{cases} 2^{q-1} & q-1>0 \\ 1 & q-1\leq 0 \end{cases}$$

$$= \max\{1, 2^{q-1}\}$$

だから

$$x^{p-1}(2-x)^{q-1} \leq (\max\{1,2^{q-1}\})\,x^{p-1}$$

である. よって

$$\int_0^1 |x^{p-1}(2-x)^{q-1}|\,dx$$

$$\leq \max\{1,2^{q-1}\}\int_0^1 x^{p-1}\,dx$$

となるので $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ が

収束することを示せばよい.

$p>0$ より.

$$\int_0^1 x^{p-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 x^{p-1}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\frac{1}{p}x^p\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\varepsilon^p\right)$$

$$= \frac{1}{p}$$

となるから $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ は収束する.

よって $\int_0^1 x^{p-1}(2-x)^{q-1}\,dx$ は

絶対収束する.