微分積分学 B 中間試験問題

2019 年 11 月 14 日 第 1,2 時限施行 (120 分)　　担当 水野 将司

学生番号　　　　　名前

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
問題用紙, 解答用紙の両方を提出すること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ. 問題 2 以降のそれぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおくとき, $f'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ を求めよ.

(2) $\arcsin(x^2)$ を微分せよ.

(3) 曲線 $y = 3x^2 - 2x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y = \cos x$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を, x 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ.

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\cos(2x)\,dx$ を求めよ.

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ を求めよ.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k^2}$ を求めよ.

(8) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 + 2x - 3|\,dx$ を求めよ.

(9) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(x)\,dx$ を求めよ (ヒント: $\log x$ の積分の計算法と同様).

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ を求めよ.

(11) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x\cos(2x) + 1)\sqrt{4 - x^2}\,dx$ を求めよ.

(12) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ を求めよ.

(13) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\,dx$ を求めよ.

(14) $y = x^x$ $(x > 0)$ の $x = 2$ における接線の方程式を求めよ.

(15) $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸まわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ.

(16) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - t\sin x)^2\, dx$, $(t \in \mathbb{R})$ で定義する.

(a) $f(t)$ を積分を用いない式で表せ.

(b) f の最小値を求めよ.

(17) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx$ を求めよ.

(18) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\log x} dx$ を求めよ.

(19) 曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ $(0 \le x \le 1)$ の長さを求めよ.

(20) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \dfrac{x^2}{x-1}$ で定める.

(a) $f'(x)$ を求めよ.

(b) 増減表を書け.

(21) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ. なお, 仮定をきちんと書くこと.

(22) $[2,3]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の順序保存性とは何か？ 主張を述べよ.

(23) $[0,4]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？ 主張を述べよ.

(24) $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ は $[1,2]$ 上 Riemann 積分可能とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(25) $f : (1,3) \to \mathbb{R}$ が $x = 2$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(26) $F : (0,3) \to \mathbb{R}$ に対して, $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ が F の原始関数であることの定義を述べよ.

(27) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする. このとき, Rolle の定理を述べよ.

(28) $f : (-5,5) \to \mathbb{R}$ が $x = 3$ で極大であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

学生番号　　　　　　名前

問題 2.

$f : [1,4] \to \mathbb{R}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $[1,4]$ の分割の定義を述べよ.

(2) f の $[1,4]$ 上の Riemann 下積分, Riemann 上積分の定義を述べよ.

(3) f が $[1,4]$ 上 Riemann 積分可能であることの定義と $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

問題 3.

$f : [2,5] \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3$ で定義する. $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$ を区分求積法を用いて求めよ. ただし, 分割数を n とすること.

問題 4.

$f, g : (-2,2) \to \mathbb{R}$ は $x = 0$ で微分可能であるとする.

(1) f が $x = 0$ で微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) 積の微分公式

$$(fg)'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

を上の同値条件を用いて証明せよ.

問題 5.

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$ とする. 次を示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 f'(x)g(x)\,dx = -\int_0^3 f(x)g'(x)\,dx + [f(x)g(x)]_0^3$
(部分積分法の公式を示せということ).

(2) $\displaystyle\int_0^5 g'(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(0)}^{f(5)} g'(\xi)\,d\xi$
(置換積分法の公式を示せということ).

(3) f が $x = -2$ で最小となるならば $f'(-2) = 0$.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

微分積分学 B 中間試験問題

2019 年 11 月 14 日 第 3,4 時限施行 (120 分)　　担当 水野 将司

学生番号　　　　　　名前

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
問題用紙, 解答用紙の両方を提出すること.

問題 1 は全員が 1 枚目の解答用紙を用いて答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ. 問題 2 以降のそれぞれの問題について, 解答用紙の片面のみを使い, 問題番号を指定の枠内に書くこと.

問題 1.
次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f(x) = 7^{x^2}$ とおくとき, $f'(1)$ を求めよ.
(2) $\arccos(e^x)$ を微分せよ.
(3) 曲線 $y = 2x^2 + 3x - 4$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
(4) $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y = \cos x$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を, x 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ.
(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\cos(3x)\,dx$ を求めよ.
(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を求めよ.
(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k) - \log n\right)$ を求めよ.
(8) $f(x) = \log_3(x^2)$ とおくとき, $f'(2)$ を求めよ.
(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin(x)\,dx$ を求めよ (ヒント： $\log x$ の積分の計算法と同様).
(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$ を求めよ.
(11) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (\sin(2x)+2)\sqrt{4-x^2}\,dx$ を求めよ.
(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$ を求めよ.
(13) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx$ を求めよ.
(14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$ を求めよ.
(15) 曲線 $y = x^x$ $(x > 0)$ の $x = 2$ における法線の方程式を求めよ.

(16) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - t\sin x)^2\,dx$, $(t \in \mathbb{R})$ で定義する.

(a) $f(t)$ を積分を用いない式で表せ.

(b) f の最小値を求めよ.

(17) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(18) $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸まわりに一回転させてできる立体の体積を求めよ.

(19) 曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の $0 \le x \le 1$ の部分の長さを求めよ.

(20) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ で定める.

(a) $f'(x)$ を求めよ.

(b) 増減表を書け.

(21) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して, 区分求積法とは何かを述べよ. なお, 仮定をきちんと書くこと.

(22) $F : (0,2) \to \mathbb{R}$ に対して, $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ が F の原始関数であることの定義を述べよ.

(23) $[0,\pi]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の順序保存性とは何か？ 主張を述べよ.

(24) $[0,1]$ 上の連続関数に対する Riemann 積分の線形性とは何か？主張を述べよ.

(25) $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ は $[-1,3]$ 上 Riemann 積分可能とする. このとき, 積分の平均値定理を述べよ.

(26) $f : (1,3) \to \mathbb{R}$ が $x = 2$ で微分可能であることの定義を述べよ.

(27) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとする. このとき, Rolle の定理を述べよ.

(28) $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$ が $x = -1$ で極大であることの定義を述べよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

学生番号　　　　　　名前

問題 2.

$f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $[-2,3]$ の分割の定義を述べよ.

(2) f の $[-2,3]$ 上の Riemann 下積分, Riemann 上積分の定義を述べよ.

(3) f が $[-2,3]$ 上 Riemann 積分可能であることの定義と $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

問題 3.

$f : [1,4] \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := 2x^3$ で定義する. $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)\,dx$ を区分求積法を用いて求めよ. ただし, 分割数を n とすること.

問題 4.

$f, g : (-3,3) \to \mathbb{R}$ は $x = 1$ で微分可能であるとする.

(1) f が $x = 1$ で微分可能であることの, 割り算 (分数) を用いない同値条件を述べよ.

(2) 積の微分公式

$$(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

を上の同値条件を用いて証明せよ.

問題 5.

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$ とする. 次を示せ.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{4} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(1)}^{g(4)} f'(\xi)\,d\xi$

(置換積分法の公式を示せということ).

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} f'(x)g(x)\,dx = -\int_{-1}^{3} f(x)g'(x)\,dx + [f(x)g(x)]_{-1}^{3}$

(部分積分法の公式を示せということ).

(3) f が $x = 3$ で最大となるならば $f'(3) = 0$.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

学生番号　　　　名前 1-2限　　　　得点

問題番号
1

(1) $\dfrac{\pi^2}{4}$	(2) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$	(3) $\dfrac{28\sqrt{7}}{27}$
(4) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}$	(5) $\dfrac{3}{5}$	(6) $\log\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
(7) $\dfrac{\pi}{2}$	(8) $\dfrac{23}{3}$	(9) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$
(10) $\dfrac{3}{16}\pi$	(11) 2π	(12) $2\log 2-\log 3$
(13) $\dfrac{\pi}{2}$	(14) $y=4(1+\log 2)x-4-8\log 2$	
(15) $2\pi^2$	(16)(a) $\pi t^2-4\pi t+\dfrac{2}{3}\pi^3$	
(16)(b) $\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi$	(17) $\log(\sqrt{2}+1)$	(18) $\log 2$
(19) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$	(20)(a) $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	

(20)(b)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$		$\searrow$	極小 4	$\nearrow$

裏面へ続く

学生番号　　名前　3-4限　　得点

問題番号 1

(1) $14\log 7$	(2) $-\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	(3) $\dfrac{41\sqrt{41}}{24}$
(4) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}$	(5) $-\dfrac{4}{5}$	(6) $\dfrac{1}{2}\log 3$
(7) $2\log 2-1$	(8) $\dfrac{1}{\log 3}$	(9) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi-\dfrac{1}{2}$
(10) $\dfrac{3}{16}\pi$	(11) 4π	(12) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
(13) $-\dfrac{2}{3}\log 2$	~~(14)~~ (15) $y=\dfrac{-1}{4(\log 2+1)}x+\dfrac{1}{2(\log 2+1)}+4$	
~~(15)~~ (14) $4\sqrt{3}-\dfrac{14}{3}\sqrt{2}$	(16)(a) $\pi t^2-4\pi t+\dfrac{2}{3}\pi^3$	
(16)(b) $\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi$	(17) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$	(18) $2\pi^2$
(19) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$	(20)(a) $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$	

(20)(b)

x	…	1	…	2	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗

裏面へ続く