第 4 章

微分積分の基礎理論

4.1. 微分係数, 導関数とその性質

関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して, $x_0 \in (a,b)$ の微分係数 $f'(x_0)$ を求める操作を「微分する」という. 定義を正確に述べると次のようになる.

定義 4.1 (微分係数と導関数)**.**
$x_0 \in (a,b)$ に対して, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が $x = x_0$ で**微分可能**であるとは,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

が存在することである. このとき, $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ と書き, f の x_0 における**微分係数**という.

f が (a,b) **上微分可能**であるとは, すべての $x \in (a,b)$ に対して, f が x で微分可能であることをいう. このとき, $x \in (a,b)$ に対して

$$\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$$

と書く. このようにして定めた関数 $\dfrac{df}{dx} : (a,b) \to \mathbb{R}$ を f の**導関数**という.

以下, $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$C(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ は } I \text{ 上連続} \right\}$$

$$C^1(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R},\ f \text{ は } (a,b) \text{ 上微分可能}, \frac{df}{dx} \in C((a,b)) \right\}$$

と書くことにする.

4.1.1. 微分係数と接線. 関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して, $x_0 \in (a,b)$ の微分係数 $f'(x_0)$ はいろいろな解釈があるが, グラフ $y = f(x)$ の $x = x_0$ での接線の傾きになるということはよく知られているであろう. このことを, 定式化する.

定理 4.2.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と $x_0\in(a,b)$ に対して, f が $x=x_0$ で微分可能であることと,「ある定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して,

$$f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$$

と書いたときに $R(x)\to 0\ (x\to x_0)$」は同値である. このとき, $\lambda=f'(x_0)$ となる.

証明.
f が $x=x_0$ で微分可能であるとする. このとき, $\lambda=f'(x_0)$ として,

$$R(x):=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

とおく. すると, $x-x_0$ をはらうと

$$f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$$

となる. f が $x=x_0$ で微分可能であることから, $R(x)\to 0\ (x\to x_0)$ となることがわかる.

逆に, ある定数 $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して, $f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$ と書いたときに $R(x)\to 0\ (x\to x_0)$ が成り立つとしよう. $x\neq x_0$ として $x-x_0$ で割れば

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lambda+R(x)$$

となる. $R(x)\to 0\ (x\to x_0)$ だから

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lambda$$

となるので, $f'(x_0)=\lambda$ となることがわかる. □

このことから, 微分可能であることは連続より強い条件であることがわかる. すなわち,

系 4.3.
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能ならば, x_0 で連続になる.

証明.

定理 4.2 より $f(x) = f(x_0) +' (x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$ と書いたときに $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ が成り立つ. 従って

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)| \\ &\le |f'(x_0)||x - x_0| + |R(x)||x - x_0| \\ &\to 0 \quad (x \to x_0)\end{aligned}$$

となるので, $f(x) \to f(x_0)$ $(x \to x_0)$, すなわち f は $x = x_0$ で連続となることがわかる.

□

4.1.2. 微分公式. 高校で学んだ微分公式を証明しよう.

定理 4.4.
$f, g \in C^1(a, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ に対して, 次が成り立つ.
(1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
(3) (積の微分公式) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

注意 4.5.
定理 4.4 の (1), (2) より, 微分は線形である.

定理 4.2 の証明.
(1) $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

である. $x \to x_0$ とすれば, (4.1) の右辺は $f'(x_0) + g'(x_0)$ に収束するので, $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ が成り立つ.
(2) $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.2}$$

である. $x \to x_0$ とすれば, (4.2) の右辺は $\lambda f'(x_0)$ に収束するので, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ が成り立つ.
(3) $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ に対して

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{4.3}$$

である. $x \to x_0$ とすれば, 系 4.3 より (4.2) の右辺は $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ に収束するので, $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ が成り立つ. □

定理 4.4 は定理 4.2 を用いて証明することもできる. 以下, 定理 4.4 の別証を与える.

定理 4.4 の別証.

(1) $x \in (a,b)$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_f(x)(x - x_0) \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

と書くと, $R_f(x), R_g(x) \to 0\ (x \to x_0)$ が成り立つ. よって,

$$(f+g)(x) = (f+g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + (R_f(x) + R_g(x))(x - x_0)$$

となり, $x \to x_0$ としたときに $R_f(x) + R_g(x) \to 0$ が成り立つので, $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ が成り立つ.

(2) $x \in (a,b)$ に対して

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_f(x)(x - x_0)$$

と書くと, $R_f(x) \to 0\ (x \to x_0)$ が成り立つ. よって,

$$(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x_0) + (\lambda f'(x_0))(x - x_0) + \lambda R_f(x)(x - x_0)$$

となり, $x \to x_0$ としたときに $\lambda R_f(x) \to 0$ が成り立つので, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ が成り立つ.

(1) $x \in (a,b)$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_f(x)(x - x_0) \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

と書くと, $R_f(x), R_g(x) \to 0\ (x \to x_0)$ が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} (fg)(x) = (fg)(x_0) &+ (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) \\ &+ \Big(f(x_0)R_g(x) + f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)R_g(x)(x - x_0) \\ &\quad + g(x_0)R_f(x) + g'(x_0)R_f(x)(x - x_0) + R_f(x)R_g(x)(x - x_0) \Big)(x - x_0) \end{aligned}$$

となり, $x \to x_0$ としたときに

$$f(x_0)R_g(x) + f'(x_0)g'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)R_g(x)(x - x_0) \\ + g(x_0)R_f(x) + g'(x_0)R_f(x)(x - x_0) + R_f(x)R_g(x)(x - x_0) \to 0$$

が成り立つので, $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ が成り立つ. □

定理 4.6 (合成関数の微分公式, chain rule)**.**
$f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能ならば $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)$$

が成り立つ.

注意 4.7.
定理 4.6 は $y = f(x)$, $z = g(y)$ と書くと, 形式的に

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

と書ける.

定理 4.6 の証明.
$x, y \in \mathbb{R}$ に対して, f が $x = x_0$ で微分可能, g が $y_0 = f(x_0)$ で微分可能なので, 定理 4.2 から,

$$f(x) = f(x_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + R_f(x)(x - x_0)$$
$$g(y) = g(f(x_0)) + g_y(f(x_0))(y - f(x_0)) + R_g(y)(y - f(x_0))$$

と書くと, $R_f(x) \to 0$ $(x \to x_0)$, $R_g(y) \to 0$ $(y \to f(x_0))$ が成り立つ. ただし, $f_x(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$, $g_y(f(x_0)) = \dfrac{dg}{dy}(f(x_0))$ である. $y = f(x)$ を代入すると

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g_y(f(x_0))f_x(x_0)(x - x_0) \\ + \left(g_y(f(x_0))R_f(x) + R_g(f(x))f_x(x_0) + R_g(f(x))R_f(x)\right)(x - x_0)$$

となる. 系 4.3 より $f(x) \to f(x_0)$ $(x \to x_0)$ となるから, $R_g(f(x)) \to 0$ $(x \to x_0)$ となることに注意すると, $x \to x_0$ としたときに

$$g_y(f(x_0))R_f(x) + R_g(f(x))f_x(x_0) + R_g(f(x))R_f(x) \to 0$$

が成り立つ. よって, $(g \circ f)'(x_0) = g_y(f(x_0))f_x(x_0)$ が成り立つ. □

定理 4.6 では記述を簡単にするために f, g の定義域を $\mathbb{R}$ としたが, 定義域を開区間として記述すると, 次のようになる. 証明は定理 4.6 と同様なので省略する.

定理 4.8 (合成関数の微分公式, chain role)**.**
$f = f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : (c, d) \to \mathbb{R}$ は $f((a, b)) \subset (c, d)$ をみたすとする. f, g がそれぞれ $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0)$ で微分可能ならば,

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0))\frac{df}{dx}(x_0)$$

が成り立つ.

例 4.9.
$x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

を示す. $x^\alpha = \exp(\log x^\alpha) = \exp(\alpha \log x)$ と変形する. $f(x) := \alpha \log x$, $g(y) := \exp(y)$ とおけば, $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ であり, 合成関数の微分公式より

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = g_y(f(x))f_x(x) = \exp(f(x))(\alpha x^{-1}) = \alpha x^{\alpha-1}$$

が得られる.

定理 4.10 (逆関数の微分公式)**.**
$f : (a, b) \to (c, d)$ は全単射で微分可能であるとする. $x_0 \in (a, b)$ にたいして $f'(x_0) \neq 0$ ならば $y_0 = f(x_0)$ としたときに, f の逆関数 f^{-1} は y_0 で微分可能であり,

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

となる.

注意 4.11.
定理 4.10 は $y = f(x)$ と書いたときに, 形式的に

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

と書ける.

注意 4.12.

f^{-1} が微分可能であることがわかれば, $f^{-1}(f(x)) = x$ の $x = x_0$ における微分係数を考えれば, 合成関数の微分公式により

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

となるので, $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ がわかる.

証明.

$y \in (c, d)$ に対して $x = f^{-1}(y)$ とおく.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$$

と書くと, $R(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ である. $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$ より

$$y = y_0 + f'(x_0)(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) + R(f(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

だから

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + \frac{-R(x)}{f'(x_0)(f'(x_0) + R(x))}(y - y_0)$$

が成り立つ. $y \to y_0$ とすると, $x \to x_0$ となるので (注意 4.13 を参照) $R(x) \to 0$ だから, $\frac{-R(x)}{f'(x_0)(f'(x_0)+R(x))} \to 0$ が従う. よって, f^{-1} は $y = y_0$ で微分可能であって, $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ が成り立つ. □

注意 4.13.

定理 4.10 の証明で, $x \to x_0$ となることを示す. f^{-1} が $y = y_0$ で連続となることを示せばよい. $\delta > 0$ を $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ をみたすようにとると, f は (a, b) 上連続だから, $f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = [m, M]$ とかけ, $y_0 \in [m, M]$ となる.

$y_0 \in (m, M)$ となることを示す. $y_0 = M$ ならば, $x' < x_0 < x''$ なる $x', x'' \in (a, b)$ をとれば, f が全単射であることから, $f(x')$, $f(x'') < M$ となる. $f(x')$ と $f(x'')$ の大きい方を c とおくと, 中間値の定理より, $x' < \tilde{x}' < x_0$, $x_0 < \tilde{x}'' < x''$ なる $\tilde{x}'$, $\tilde{x}''$ がとれて, $f(\tilde{x}') = f(\tilde{x}'') = \frac{M+c}{2}$ が成り立つ. これは f が単射であることに反する.

このことにより, $y_j \in [m, M]$ の条件のもとで $y_j \to y_0$ $(j \to \infty)$ を考えると, $x_j = f^{-1}(y_j) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ となる. $x_j \to x_0$ $(j \to \infty)$ でないとすると, Bolzano-Weierstrass の定理より, 部分列 $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ がとれて $x_{j_k} \to \tilde{x}_0 \neq x_0$ $(k \to \infty)$ とできる. f は連続だから $f(x_{j_k}) \to f(\tilde{x}_0)$ $(k \to \infty)$ となるが, $y_{j_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$ も成り立つから, $y_0 = f(\tilde{x}_0)$, すなわち $f(x_0) = f(\tilde{x}_0)$ となる. f は単射だったから $x_0 = \tilde{x}_0$ となるが, これは $\tilde{x}_0$ の定め方に反する.

定理 4.14 (パラメータ微分)**.**
$\varphi, \psi \in C^1(a,b)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ とする. φ は狭義単調増加で $x_0 = \varphi(t_0)$ とし, $\varphi'(t_0) \neq 0$ とする. このとき,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

となる.

注意 4.15.
定理 4.14 は, 形式的に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

と書ける.

定理 4.14 の証明.
ϕ は狭義単調増加なので逆関数を構成でききて, $t = \varphi^{-1}(x)$ と書ける. 従って, 逆関数の微分公式と合成関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=x_0} \Big(\psi(\varphi^{-1}(x))\Big) = \psi'(\phi^{-1}(x_0))(\phi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}$$

となる. □

4.2. 平均値の定理

平均値の定理 (定理 1.7) の証明を Weierstrass の定理 (定理 1.7, 3.47) を用いて証明した. 標準的な教科書では, 平均値の定理の特殊な場合である Rolle の定理を先に証明することが多いので, Rolle の定理を紹介し, その証明を与えよう.

定理 4.16 (Rolle の定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ が $f(a) = f(b)$ ならば, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ が成り立つ.

Rolle の定理は $f(a) = f(b)$ であれば, グラフを書いたときに "接線の傾き" $= 0$ となる点があるということである.

定理 4.16 の証明.

f が定数関数のときは, すべての $x \in (a,b)$ に対して, $f'(x) = 0$ となるので, 例えば, $\xi = \dfrac{a+b}{2}$ ととればよい. 以下, f は定数関数ではないとする.

1. $c \in (a,b)$ が存在して $f(a) < f(c)$ となる場合を考える. このとき, f は $[a,b]$ 上連続だから Weierstrass の定理 (定理 3.47) より, $\xi \in [a,b]$ が存在して, $f(\xi) = \max_{a \le \xi \le b} f(x)$ とできるが, $f(a) = f(b)$ かつ $f(a) < f(c) \le f(\xi)$ だから, $\xi \neq a, \xi \neq b$ となる.

2. $f'(\xi) \le 0$ を示す. $\xi < x < b$ に対して $f(x) \le f(\xi)$, $x - \xi > 0$ より

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0$$

だから, $x \to \xi + 0$ とすると $f'(\xi) \le 0$ となる.

3. $f'(\xi) \ge 0$ を示す. $a < x < \xi$ に対して $f(x) \le f(\xi)$, $x - \xi < 0$ より

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0$$

だから, $x \to \xi - 0$ とすると $f'(\xi) \ge 0$ となる.

2., **3.** より $f'(\xi) = 0$ がわかる. $c \in (a,b)$ が存在して $f(a) > f(c)$ のときも同様にできる. □

Rolle の定理を用いて, 微分平均値定理を証明しよう.

定理 4.17 (微分平均値定理)**.**
$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ に対して, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

が成り立つ.

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線の傾きである. 平均値の定理は, グラフを書いたときに, この直線の傾きと同じ傾きをもつ接線があるということである

定理 4.17 の証明.
$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対して

$$\varphi(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$$

とおく. すると, $\varphi \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ かつ

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる. Rolle の定理 (定理 4.16) より, $\xi \in (a,b)$ が存在して $\varphi'(\xi) = 0$ となるので, $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ が成り立つ. □

4.2.1. 平均値の定理の応用. 平均値の定理の応用として, 導関数の符号と関数の増減について説明しよう.

系 4.18.
$f \in C^1(a,b)$ に対して,「f が (a,b) 上単調増加」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \geq 0$」は同値となる.

証明.
f が (a,b) 上単調増加であるとする. すべての $x \in (a,b)$ と $h > 0$ に対して, $f(x+h) \geq f(x)$ だから $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$ となる. $h \to 0+0$ とすれば $f'(x) \geq 0$ がわかる.

すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) \geq 0$ が成り立つとする. $x < x' \in (a,b)$ が $x < x'$ ならば, 平均値の定理 (定理 4.17) よりある $x < \xi < x'$ が存在して, $\dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(\xi) \geq 0$ が成り立つ. $x' - x > 0$ だから $f(x') \geq f(x)$ が成り立つ. □

$-f$ が単調増加であるとき, f は単調減少となる. これを組み合わせると, 次の結果が得られる.

系 4.19.
$f \in C^1(a,b)$ に対して,「f が (a,b) 上定数関数, すなわち, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f(x) = c$」であることと「すべての $x \in (a,b)$ に対して $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$」は同値となる.

証明.
f が (a,b) 上定数関数であるとき, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f'(x) = 0$ がなることは明らかである.

すべての $x \in (a,b)$ に対して $f'(x) = 0$ が成り立つとする. このとき, $f, -f$ が (a,b) 上単調増加となるので, f は (a,b) 上単調増加, かつ単調減少となる. 従って, $x, x' \in (a,b)$ に対して, x, x' ならば $f(x) \leq f(x')$ かつ $f(x') \leq f(x)$ となるので $f(x) = f(x')$ が成り立つ. □

4.2.2. 極大・極小. 高校で学んだ極大・極小の定義を再確認しよう.

定義 4.20 (極大・極小)**.**
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ とする. f が $x = c$ で**極大** (**極小**) であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ に対して

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ならば } f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

が成り立つことをいう.

例 4.21.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (-\infty < x \leq -1) \\ -x & (-1 < x \leq 1) \\ x - 2 & (1 < x < \infty) \end{cases}$$

とおくと, f は $x = -1$ $(x = 1)$ で極大 (極小) となる.

証明.
極大のみ示す. $\delta = 1$ ととる. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ に対して $0 < |x + 1| < \delta = 1$ ならば $-2 < x < -1$ または $-1 < x < 0$ であり

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & (-2 < x \leq -1) \\ -x & (-1 < x < 0) \end{cases} < 1 = f(-1)$$

となるので $x = -1$ で極大となる[1]. □

極大, 極小はもともと微分積分とは関係がない. しかし, 微分可能な関数には次のような簡単な判定法がある.

定理 4.22.
$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, f が $x = c$ で極大 (極小) ならば $f'(c) = 0$ となる.

[1] $0 < \delta < 4$ であれば, δ はどれを選んでもよい

証明.

f が $x = c$ で極大のときに示す. 定義でとれる $\delta > 0$ に対して, $0 < h < \delta$ ならば $f(c+h) < f(c)$, $f(c-h) < f(c)$ であり

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

だから $h \to 0+0$ とすると $f'(c) \leq 0$, $f'(c) \geq 0$ が成り立つ. よって $f'(c) = 0$ がわかる. □

定理 4.22 の逆である, 微分係数が 0 であることから極大, 極小を判断することはできない (例えば, $f(x) = x^3$ を考えよ). 極大・極小を判断する一つの方法は, 増減表を書くことである. 増減表による極大・極小の判定法を定理としてまとめよう.

定理 4.23 (極大・極小の判定)**.**

$f \in C^1(a,b)$, $c \in (a,b)$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ に対して

$$c - \delta < x < c \text{ ならば } f'(x) > 0$$

$$c < x < c + \delta \text{ ならば } f'(x) < 0$$

が成り立つとする. このとき, f は $x = c$ で極大となる.

証明.

$x \in (a,b) \setminus \{c\}$ に対して, $0 < |x-c| < \delta$ を仮定する.

1. $c - \delta < x < c$ であれば, 平均値定理 (定理 4.17) より, $x < \xi_1 < c$ が存在して, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_1) > 0$ が成り立つので, $x - c < 0$ に注意すれば $f(x) < f(c)$ が成り立つ.

2. $c < x < c + \delta$ であれば, 平均値定理 (定理 4.17) より, $c < \xi_2 < x$ が存在して, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_2) < 0$ が成り立つので, $x - c > 0$ に注意すれば $f(x) < f(c)$ が成り立つ.

どちらの場合でも $f(x) < f(c)$ となるので, f は $x = c$ で極大となる. □

4.3. 原始関数

微分の逆演算ともいえる, 原始関数を定義しよう. あとで, この原始関数が不定積分を用いて書けることを示す[2].

定義 4.24 (原始関数)**.**
関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対して

$$F'(x) = f(x)$$

をすべての $x \in (a, b)$ でみたす (a, b) 上微分可能な関数 $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ を f の**原始関数**という.

原始関数を答えるときに, 積分定数なる定数 C を常に書いていた. 例えば, $f(x) = 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ の原始関数 $F(x)$ は

$$F(x) = x^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となることを学んだであろう. しかし, よく考えてみると, $x^3 + C$ 以外の関数, 例えば, $x^3 + g(x)$ の形をしたもので, $(x^3 + g(x))' = 3x^2$ となるものはあるのであろうか？ 次の定理は, この $g(x)$ が x に依らない定数であることを主張するものである.

定理 4.25.
$F : (a, b) \to \mathbb{R}$ を関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ の原始関数とする. このとき, 任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して, $F + C$ は f の原始関数である. さらに, $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ も f の原始関数とすると, ある定数 $C_1 \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a, b)$ に対して

$$G(x) = F(x) + C_1$$

が成り立つ.

証明.
$F' = f$ と定数関数の導関数は 0 となることに注意すると, $(F + C)' = f$ となるので $(F + C)$ は f の原始関数である. 次に G が f の原始関数であるとすると $(G - F)' = f - f = 0$ となる. 系 4.19 よりある定数 $C_1 \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in (a, b)$ に対して $G(x) - F(x) = C_1$ となるから, $G(x) = F(x) - C_1$ が成り立つ. □

[2]原始関数と不定積分は異なるものである. そのため, 不定積分の記号 $\int f(x)\,dx$ もこのノートでは使わない.

注意 4.26.

定理 4.25 は関数 f が開区間 (a,b) で定義されていることが必要である. 例えば, $F(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ の導関数 $f(x)$ は $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ となるから, $\frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ は $-\frac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ の原始関数である. 次に

$$G(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

により, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 G を定めると, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $G'(x) = f(x)$ が成り立つが, 定数 C を用いて $F(x) = G(x) + C$ と書くことはできない.

定理 4.25 において, 関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ の原始関数 F が存在することを仮定したが, それでは, どのような関数 f に対して, 原始関数 F が存在するのだろうか？ その答えが不定積分である. 高校の教科書で不定積分を先に学んで, その後に定積分を学ぶが, もともとは定積分が先にあって, 不定積分とは高校数学では「定積分で表された関数」と呼ばれているものである. 次の数節で定積分と不定積分を説明したうえで, 原始関数の存在と微分積分学の基本定理を説明する.

4.4. 連続関数の定積分

この節では区分求積法を一般化することによって, 連続関数の定積分を導入する. 高校では原始関数の差によって定積分を学んだが, そもそも定積分は面積を求めるための計算であり, 微分とは関係なく定義することができる. 定積分を定める上で重要な定理が区分求積法による極限の存在を保証する定理 4.29 であり, いったんその結果を認めて定積分を定義する. そのあとで定理 4.29 の証明と定積分の性質を述べる.

4.4.1. 区分求積法と連続関数の定積分. $a < b$ に対し, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ の定積分は, 区分求積法を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right) \frac{b-a}{N} \tag{4.4}$$

と書けた. $\dfrac{b-a}{N}$ は区間 $[a,b]$ を N 等分したときの一つ分の幅である.

(4.5) $$x_0 = a,\quad x_1 = a + \frac{(b-a)}{N},\quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{N},\dots,$$
$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{N},\dots, x_N = a + \frac{N(b-a)}{N} = b$$

が $[a,b]$ を N 等分したときの分点である. ところで, 等分割とすることは一つの方法であるが, 等分割以外で分点を考えることも可能であろう. また, 区分求積法では分点での関数の値を使っているが, 分点以外の点での関数の値を使うことも可能であろう. そこで, 次の定義を与える.

定義 4.27 (分割と分割の長さ)**.**
$\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ を $[a,b]$ の**分割**という. $[a,b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ に対して

$$|\Delta| := \max_{k=1,2,\dots,N} (x_k - x_{k-1})$$

を分割 Δ の**長さ**という.

次に閉区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を用いて, 区分求積法 (4.4) の右辺に現れる和を一般化しよう.

定義 4.28 (Riemann 和)**.**
$[a,b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ に対し, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ をとり, $[a,b]$ 上の関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して

(4.6) $$R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) := \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を f の **Riemann 和**という.

区分求積法 (4.4) の有限和について, $N \to \infty$ としたときに収束するかどうかは自明ではない. 区分求積法において, $N \to \infty$ とすることは, N 等分の幅 $\dfrac{b-a}{N}$ を 0 に近づけることであるから, 分割においては $|\Delta| \to 0$ に対応する. このときに Riemann 和 $R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^\infty)$ が収束するかどうかが, (4.4) の右辺の極限が存在するかに対応する. この収束を保証する次の定理が定積分の定義において重要な役割を果たす.

定理 4.29.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続とする. このとき, 次をみたす実数 $S\in\mathbb{R}$ が一意に定まる: 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, 任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ と $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$ をみたす任意の $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に対して $|\Delta|<\delta$ ならば $|R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N)-S|<\varepsilon$ が成り立つ.

定理 4.29 の証明はあとで行う. 定理の主張が成り立つ $S\in\mathbb{R}$ を用いて, Riemann 和 $R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N)$ は $|\Delta|\to 0$ のときに S に収束するといい,

$$S=:\lim_{|\Delta|\to 0}R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N)$$

と書く. この S が f の $[a,b]$ における定積分である. 定義としてまとめよう.

定義 4.30.

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し, 定理 4.29 で定まる S を $[a,b]$ における f の**定積分**といい,

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

で表す.

一次元の定積分には積分の向きを考えることができる. 大小関係が逆のときは次のように符号を逆にして定めることにする.

定義 4.31.

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して

$$\int_b^a f(x)\,dx:=-\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める.

(4.5) で与えられる等分割 Δ_N に $\xi_k=x_k$ で定めた $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ による Riemann 和 $R(f;\Delta_N,\{x_k\}_{k=1}^N)$ は (4.4) の右辺の有限和である. 定理 4.29 で取れる S を用いると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 定理で取れる δ により, $\dfrac{b-a}{N_0}<\delta$ をみたす N_0 に対して, $N\ge N_0$ ならば $|R(f;\Delta_N,\{x_k\}_{k=1}^N)-S|<\varepsilon$ が成り立つ. すなわち, (4.4) の右辺の極限が S であることがわかる. まとめて次が成り立つ.

系 4.32 (区分求積法)**.**
閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)\frac{b-a}{N} \tag{4.7}$$

が成り立つ.

実際の積分の計算は区分求積法を用いて計算するのがよいだろう.

例 4.33 (定数関数の定積分)**.**
$c \in \mathbb{R}$ に対して, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := c$ $(x \in \mathbb{R})$ とおく. $a < b$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$ となる. 実際, f は $[a,b]$ 上連続であり,

$$\sum_{k=1}^{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)\frac{b-a}{N} = \sum_{k=1}^{N}\frac{c(b-a)}{N} = c(b-a)$$

より, $N \to \infty$ とすれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$ がわかる.

例 4.34 (比例の定積分)**.**
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x$ $(x \in [0,1])$ とおくと, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ となる. 実際, f は $[0,1]$ 上連続であり,

$$\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N} = \sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N^2} = \frac{N(N+1)}{2N^2}$$

より, $N \to \infty$ とすれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ がわかる.

例 4.35 (台形公式)**.**
$[0,1]$ 上連続な関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を考える. 区分求積法で $\xi_k = x_k$ のかわりに $\xi_k = x_{k-1}$ としたものも定積分に収束することから,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{(k-1)}{N}\right)\frac{1}{N}$$

となる. この二つを加えて, 2 で割れば

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)\right) \tag{4.8}$$

となる. (4.8) を数値積分における**台形公式**という.

4.4.2. 定理 4.29 の証明. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ に対して

$$s(f;\Delta) := \sum_{k=1}^{N} \inf_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi)(x_k - x_{k-1}),$$
$$S(f;\Delta) := \sum_{k=1}^{N} \sup_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi)(x_k - x_{k-1})$$

をそれぞれ f の Δ に対する**不足和**, **過剰和**という. Riemann 和 $R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N)$ に対して

$$\inf_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi)(x_k - x_{k-1}) \le f(\xi_k) \le \sup_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi)(x_k - x_{k-1})$$

だから

$$s(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) \le S(f;\Delta) \tag{4.9}$$

となっている. このことより, あらっぽくいえば, $|\Delta|\to 0$ としたときに, $s(f;\Delta)$ と $S(f;\Delta)$ が同じ極限 S に収束することが示せればよい. まずは不足和, 過剰和に Δ に対するある種の単調性を示そう.

補題 4.36.
関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して $[a,b]$ の分割 Δ,Δ' は, Δ の分点がすべて Δ' の分点になっているとする. このとき

$$s(f;\Delta) \le s(f;\Delta') \le S(f;\Delta') \le S(f;\Delta)$$

が成り立つ.

証明.
(4.9) より, $s(f;\Delta') \le S(f;\Delta')$ が成り立つので, $s(f;\Delta) \le s(f;\Delta')$ と $S(f;\Delta') \le S(f;\Delta)$ を示せばよい. $s(f;\Delta') \le S(f;\Delta')$ を示すために, $\Delta = \{x_0,\dots,x_N\}$ と書くと,

$$\Delta' = \{x_0,\dots,x_{k-1}, y_k^1,\dots,y_k^{l_k}, x_k,\dots,x_N\}$$

とかける ($y_k^{l_k}$ がない場合もある. なお, $y_k^{l_k}$ の l_k は添字であり, べき乗の意味ではない). 便宜上, $y_k^0 = x_{k-1}, y_k^{l_k+1} = x_k$ とおくと

$$\inf_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi) \le \inf_{y_k^{l-1}\le\xi\le y_k^l} f(\xi) \quad (1 \le l \le l_k)$$

だから $y_k^l - y_k^{l-1}$ をかけて l について足しあわせると,

$$\inf_{x_{k-1}\le\xi\le x_k} f(\xi)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{l=1}^{l_k} \inf_{y_k^{l-1}\le\xi\le y_k^l} f(\xi)(y_k^{l-1} - y_k^l)$$

となる. これを k について足しあわせれば, $s(f;\Delta) \le s(f;\Delta')$ が示せる. $S(f;\Delta') \le S(f;\Delta)$ も同様である. □

次に, 過剰和は分割に依らずに不足和より常に大きいことを示す. 図示するとあたりまえのことではあるが, 補題 4.36 によって正当化ができる.

補題 4.37.
関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $[a,b]$ の任意の分割 Δ, Δ' に対して

$$s(f;\Delta) \le S(f;\Delta')$$

が成り立つ.

証明.
分割 Δ と Δ' の分点をすべてあわせてできる分割 Δ'' を考えると, Δ ,Δ' の分点はすべて Δ'' の分点になっている. 従って補題 4.36 より

$$s(f;\Delta) \le s(f;\Delta'') \le S(f;\Delta'') \le S(f;\Delta')$$

となる. □

有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ にたいして

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\Big\{ s(f;\Delta) : \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \Big\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\Big\{ S(f;\Delta) : \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \Big\}$$

をそれぞれ **Riemann 下積分**, **Riemann 上積分**という. 補題 4.37 より,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

がわかる. 次の補題は, f が閉区間上連続関数であるときに, Riemann 下積分と Rieman 上積分が等しいことを保証するものである.

補題 4.38.
$[a,b]$ 上連続な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ が存在して, $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対して $|\Delta|<\delta$ ならば

$$0\le S(f;\Delta)-s(f;\Delta)<\varepsilon$$

が成り立つ.

証明.
任意の $\varepsilon>0$ に対して, f は $[a,b]$ 上連続だから, とくに一様連続である (定理 3.52) から, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $\xi,\xi'\in[a,b]$ に対して, $|\xi-\xi'|<\delta$ ならば

$$|f(\xi)-f(\xi')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{4.10}$$

とできる. $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{x_0,\ldots,x_N\}$ に対して $|\Delta|<\delta$ ならば, $\xi,\xi'\in[x_{k-1},x_k]$ について $|\xi-\xi'|\le\delta$ だから, (4.10) が成り立ち, ξ,ξ' についれそれぞれ上限と下限をとれば

$$0\le\sup_{x_{k-1}\le\xi\le x_k}f(\xi)-\inf_{x_{k-1}\le\xi'\le x_k}f(\xi')\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となる. 従って, x_k-x_{k-1} を両辺にかけて k について足しあわせれば

$$\begin{aligned}0&\le\sup_{x_{k-1}\le\xi\le x_k}f(\xi)(x_k-x_{k-1})-\inf_{x_{k-1}\le\xi'\le x_k}f(\xi')(x_k-x_{k-1})\\&=S(f;\Delta)-s(f;\Delta)\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)<\varepsilon\end{aligned}$$

が得られる. □

以上の準備のもと, 定理 4.29 を証明しよう.

定理 4.29 の証明.
S を f の Riemann 上積分とする. すなわち

$$S:=\overline{\int_a^b}f(x)\,dx$$

とおく. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ を補題 4.38 でとれる δ とする. 任意の $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ と $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$ をみたす任意の $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に対して

$|\Delta| < \delta$ を仮定する. 補題 4.37 で Δ' について下限をとれば, $s(f;\Delta) \leq S$ が成り立つ. 他方, Riemann 上積分の定義より, $S \leq S(f;\Delta)$ となるから, (4.9) とあわせると

$$R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S \leq S(f;\Delta) - s(f;\Delta) < \varepsilon$$

と

$$R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S \geq s(f;\Delta) - S(f;\Delta) > -\varepsilon$$

より

$$|R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S| \leq S(f;\Delta) - s(f;\Delta) < \varepsilon$$

となり, Riemann 上積分を S とおけば主張が成り立つことがわかった.

次に一意性を示す. 主張をみたす S, S' があったとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ を定理 4.29 でとれるものとすると, $|\Delta| < \delta$ をみたす $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ をとり, $R = R(f;\Delta,\{x_k\}_{k=1}^N)$ とおけば[3]

$$|S - S'| \leq |S - R| + |R - S'| < 2\varepsilon$$

となるので, $|S - S'| < 2\varepsilon$ となる. S, S' は ε に依らないので, $\varepsilon \to 0+0$ とすると $S = S'$ がわかる. □

注意 4.39.

定理 4.29 の証明で f が連続であることを用いたのは補題 4.38 のみである. つまり, 補題 4.38 に類する主張が証明できれば, あとは同等の議論によって定積分を証明することができる. 補題 4.38 を導くには Riemann 上積分と Riemann 下積分が一致する, すなわち

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{4.11}$$

であればよい. この性質をみたす有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を **Riemann 積分可能**であるという.

4.4.3. 定積分の性質. 定積分の重要な性質は線形性と順序保存性である. 積分の線形性を述べよう.

定理 4.40 (積分の線形性)**.**

$[a,b]$ 上連続な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \tag{4.12}$$

---

[3] $\xi_k = x_k$ ととった.

が成り立つ.

証明.

任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ と $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に対して,

$$R(\alpha f + \beta g; \Delta, \{\xi_k\}_{k=1}^N) = \alpha R(f; \Delta, \{\xi_k\}_{k=1}^N) + \beta R(g; \Delta, \{\xi_k\}_{k=1}^N)$$

が成り立つ. $|\Delta| \to 0$ とすれば (4.12) が得られる. □

次に関数の大小関係が積分の大小関係に保存されること, すなわち, 次の積分の順序保存性を説明しよう.

定理 4.41 (積分の順序保存性)**.**

$a < b$ とする. $[a,b]$ 上連続な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して $f(x) \le g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{4.13}$$

が成り立つ.

証明.

任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ と $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に対して,

$$R(f; \Delta, \{\xi_k\}_{k=1}^N) \le R(g; \Delta, \{\xi_k\}_{k=1}^N)$$

が成り立つ. $|\Delta| \to 0$ とすれば (4.12) が得られる. □

積分の順序保存性より, 積分の三角不等式と呼ばれる次の不等式が成り立つ.

定理 4.42 (積分の三角不等式)**.**

$a < b$ とする. $[a,b]$ 上連続な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, に対して

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{4.14}$$

が成り立つ.

証明.

$x \in [a,b]$ に対して, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ となることに注意して, 定理 4.41 を用いればよい. □

順序保存性について, 一変数の積分には積分の向きがあるので, $a < b$ を仮定する必要があった. 三角不等式については, もし, $a > b$ ならば

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq -\int_a^b |f(x)|\,dx$$

となる. このことより, 次の不等式が得られる (これも三角不等式という).

定理 4.43 (積分の三角不等式)**.**
$[a,b]$ 上連続な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, に対して

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| \tag{4.15}$$

が成り立つ.

一変数における区間加法性を述べよう. この性質は一変数の積分に特有の性質である.

定理 4.44 (区間加法性)**.**
$[a,b]$ 上連続な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $a < c < b$ に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.16}$$

が成り立つ.

証明.
任意の $[a,c]$ の分割 $\Delta_1 = \{x_0, \ldots, x_N\}$, $[c,b]$ の分割 $\Delta_2 = \{y_0, \ldots, y_M\}$ と $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$, $y_{l-1} \leq \eta_l \leq y_l$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$, $\{\eta_l\}_{l=1}^M$ に対して, $\Delta_1 \cup \Delta_2$ は $[a,b]$ の分割であり,

$$R(f;\Delta_1,\{\xi_k\}_{k=1}^N) + R(f;\Delta_2,\{\eta_l\}_{l=1}^M) = R(f;\Delta_1 \cup \Delta_2,\{\xi_k\}_{k=1}^N \cup \{\eta_l\}_{l=1}^M)$$

が成り立つ. $|\Delta_1|, |\Delta_2| \to 0$ とすれば $|\Delta_1 \cup \Delta_2| \to 0$ となり[4], (4.1) が得られる. □

[4]正確には, $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ のときに, $|\Delta_1 \cup \Delta_2| < \delta$ となっていることをもとに ε-δ 論法を用いる.

定理 4.44 では, a, b, c に大小関係を仮定したが, 積分の向きを考えることで, この仮定をはずすことができる. 話を簡単にするために, $\mathbb{R}$ 上の連続関数について結果のみ述べよう.

定理 4.45 (区間加法性)**.**
$\mathbb{R}$ 上連続な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.17}$$

が成り立つ.

定理 4.45 の関数 f の連続性は $\mathbb{R}$ 全体でなく, (4.17) にの右辺の積分を考える区間, すなわち $[a, c] \cup [c, b]$ 上で連続であれば十分である.

連続関数における定積分は, 被積分関数のある一点の値と区間の積で表すことができる. このことを述べよう.

定理 4.46 (積分平均値定理)**.**
$[a, b]$ 上連続な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して, $\xi_0 \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi_0)(b - a) \tag{4.18}$$

が成り立つ.

証明.
f が定数関数, すなわち ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in [a, b]$ に対して, $f(x) = c$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b - a)$$

だから, $\xi_0 \in [a, b]$ は何を選んでもよい. 以下, f が定数関数でないときを考える.

f は閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数だから, Weierstrass の最大値定理 (定理 3.47) より最大値 M, 最小値 m が存在する. それぞれ $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ をとって $M = f(x_{\max}), m = f(x_{\min})$ とおくと, f は定数関数でないので, $m < M$ である. すべての $x \in [a, b]$ に対して, $m \le f(x) \le M$ だから積分の順序保存性 (定理 4.41) より

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a) \tag{4.19}$$

となる．どちらかの不等号が等号のときは, $\xi_0 = x_{\max}, x_{\min}$ のどちらかをとれば (4.18) は成り立つので, 以下, (4.19) の不等号は等号でないとしてよい．

$b-a$ で辺々わると

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M$$

となる. 従って, 中間値の定理 (定理 3.45) が使えて, ある $\xi_0 \in [a,b]$ が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi_0) \tag{4.20}$$

とできる. よって, (4.19) が成り立つことがわかった. □

4.5. 不定積分と原始関数

定積分を区分求積法を出発点にして定義したことで, 不定積分が**原始関数とは関係なく**定義できる. 不定積分の「不定」とは,「区間が定まっていない」という意味である. 定義を与えよう.

定義 4.47 (不定積分)**.**
連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $c \in [a,b]$ に対し, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) := \int_c^x f(\xi)\,d\xi$$

で定義する. この関数 F を f の**不定積分**という.

命題 4.48.
連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち $c \in [a,b]$ を一つとって

$$F(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi, \quad (x \in [a,b])$$

とする. このとき, F は $[a,b]$ 上連続となる.

証明.
$x_0 \in [a,b]$ に対して

$$F(x) - F(x_0) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi - \int_c^{x_0} f(\xi)\,d\xi = \int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi$$

となる. 積分の平均値定理 (定理 4.46) を用いれば, $\xi_0 \in [a,b]$ とれて

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi\right| = |f(\xi_0)||x - x_0|$$

とできる. f は閉区間 $[a,b]$ 上連続だから Weierstrass の最大値定理 (定理 3.47) より有界となるので, $|f(\xi_0)|$ は無限大に発散しない. よって, $x \to x_0$ とすれば $F(x) \to f(x_0)$ となることがわかった. □

注意 4.49.

上端と下端のない積分記号 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は**原始関数**と呼ぶのが正確である. 不定積分は, 高校数学では「定積分で表された関数」と呼んでいたものの一つである.

この章の目標である, 微分積分学の基本定理の核となる, 不定積分の導関数が被積分関数に一致することを述べよう.

定理 4.50.

連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を f の不定積分, すなわち $c \in [a,b]$ を一つとって

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(\xi)\,d\xi, \quad (x \in [a,b])$$

とする. このとき, すべての $x \in (a,b)$ に対して F は x で微分可能であり,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{x} f(\xi)\,d\xi\right) = f(x) \tag{4.21}$$

となる.

証明.

示せばよいことは $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$ である. $y = x + h$ とおきかえて $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ を示す.

$h \in \mathbb{R}$ に対して, 積分の向きと区間加法性を用いれば

$$F(x+h) - F(x) = \int_{c}^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{c}^{x} f(\xi)\,d\xi = \int_{x}^{x+h} f(\xi)\,d\xi$$

となる. 次に

$$f(x) = \frac{f(x)}{h}\int_x^{x+h} d\xi = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,d\xi$$

と書くと, 積分の三角不等式により

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,d\xi\right| \\ &= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} (f(\xi)-f(x))\,d\xi\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(\xi)-f(x)|\,d\xi\right|\end{aligned} \tag{4.22}$$

となる.

さて, f は x で連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\xi \in [a,b]$ に対して, $|\xi - x| < \delta$ ならば, $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ. 従って, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が $0 < |h| < \delta$ ならば, (4.22) より

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(\xi)-f(x)|\,d\xi\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \varepsilon\,d\xi\right| = \varepsilon$$

となる. よって, $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ となるので, $F'(x) = f(x)$ が成り立つ. □

注意 4.51.

定理 4.50 は f が連続でないと成り立たない. 実際に $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を

$$H(x) := \begin{cases} -1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

により定めると H は $x = 0$ で連続でない. $-1 \le x \le 0$ のとき

$$\int_{-1}^x H(\xi)\,d\xi = -\int_{-1}^x d\xi = -1 - x$$

であり, $0 < x \le 1$ のとき

$$\int_{-1}^x H(\xi)\,d\xi = -\int_{-1}^0 d\xi + \int_0^x H(\xi)\,d\xi = -1 + x$$

となるので,

$$\int_{-1}^x H(\xi)\,d\xi = -1 + |x|$$

である. 従って, H の不定積分は $x = 0$ で微分できないことがわかる.

原始関数は定数の差を除いて一意であることを定理 4.25 で述べた. 定理 4.50 は, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して, 不定積分が原始関数であることを主張しているので, 組み合わせて次がわかる.

定理 4.52.
連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して, f は (a,b) における原始関数を持つ. さらに, $c\in[a,b]$ を一つとると, $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能となる f の原始関数 F は

$$F(x)=\int_c^x f(\xi)\,d\xi+C \tag{4.23}$$

と書ける. ただし, C は定数である.

高校数学において, 不定積分と原始関数が同じ意味で扱われていたのは, 原始関数と不定積分が定数 (積分定数と呼んでいたもの) の差を除いて一意だったことによる. 次の定理により, 高校数学で学んだように, 定積分を原始関数の差として表すことができる.

定理 4.53.
連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して, F を $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能となる f の原始関数の一つとすると,

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi=F(b)-F(a)=:[F(x)]_a^b \tag{4.24}$$

となる.

証明.
定理 4.52 を用いると, $c\in[a,b]$ と定数 C を用いて

$$F(x)=\int_c^x f(\xi)\,d\xi+C$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(\int_c^b f(\xi)\,d\xi + C\right) - \left(\int_c^a f(\xi)\,d\xi + C\right) \\ &= \int_c^b f(\xi)\,d\xi - \int_c^a f(\xi)\,d\xi \\ &= \int_c^b f(\xi)\,d\xi + \int_a^c f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

が得られる． □

定理 4.53 から微分積分学の基本定理を導こう． (a,b) 上微分可能な関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ と $\lim_{x\to b-0} f'(x)$ がそれぞれ存在するとき, f の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ は $[a,b]$ 上に連続拡張できるといい,

$$\frac{df}{dx}(a) := \lim_{x\to a+0} f'(x), \quad \frac{df}{dx}(b) := \lim_{x\to b-0} f'(x)$$

と定める．このとき, $\dfrac{df}{dx}$ の (a,b) における原始関数は f で与えられることに注意すると, 次の微分積分学の基本定理が得られる．

定理 4.54 (微分積分学の基本定理)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は閉区間 $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能であるとし, f の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ は $[a,b]$ 上に連続拡張できるとする．このとき,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{4.25}$$

が成り立つ.

応用上は $f \in C^1(\alpha,\beta)$ と $\alpha < a < b < \beta$ に対して

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{4.26}$$

の形で微分積分学の基本定理を用いることが多い.

4.6. 不連続関数に対する定積分 : Riemann 積分

4.4 節では連続関数に対する定積分を定義した．実際には連続でない関数についても定積分を定義することができる．Riemann 上積分・下積分を用いる方

法と Riemann 和の極限を用いる方法がある. Riemann 上積分・下積分を用いた方法で定義を与えよう.

定義 4.55 (Riemann 積分)**.**

有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ のとき, f は $[a,b]$ 上 **Riemann 積分可能**であるといい,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

と定める.

Riemann 和との関係は次の Darboux の定理による.

定理 4.56 (Darboux)**.**

有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s(f;\Delta), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon > S(f;\Delta)$$

が成り立つ.

定理 4.56 の証明.

$M := \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ とおく.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある分割 $\Delta_\varepsilon = \{y_0, \ldots, y_m\} \subset [a,b]$ が存在して

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s(f;\Delta_\varepsilon)$$

とできる. $d := \min_{k=1,\ldots,n} y_k - y_{k-1}$ として, $\delta := \min\{d, \frac{\varepsilon}{2mM}\}$ とおく.

2. $[a,b]$ 上の任意の分割 Δ に対して,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon < s(f;\Delta_\varepsilon)$$

を示す. そのために,

$$s(f;\Delta \cup \Delta_\varepsilon) - s(f;\Delta) < \varepsilon$$

を示す.

3. 任意の $y_k \in \Delta_\varepsilon$ に対して, ある $z_l \in \Delta$ が存在して, $z_{l-1} \leq y_k \leq z_l$ とできる. $y \in \Delta_\varepsilon$ が $y \neq y_k$ ならば $|y_k - y| \geq d$ と $|z_l - z_{l-1}| < d$ より $z_{l-1} \leq y_k \leq z_l$ とはならない. つまり, 上でとれる $z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ によってすべて異なっている. さて $s_{\Delta\cup\Delta_\varepsilon}(f) - s_\Delta(f)$ を考えると

$$\begin{aligned}&\left(\inf_{z_{l-1}\leq x\leq y_k} f(x)(y_k - z_{l-1}) \inf_{y_k\leq x\leq z_l} f(x)(z_l - y_k)\right) - \inf_{z_{l-1}} f(x)(z_l - z_{l-1})\\ &\leq 2M(z_l - z_{l-1}) \leq 2M|\Delta|\end{aligned}$$

となるから, k について和を取ることで ($z_l \in \Delta$ は $y_k \in \Delta_\varepsilon$ も用いることで)

$$s(f;\Delta\cup\Delta_\varepsilon) - s(f;\Delta) \leq 2Mm|\Delta| < \varepsilon$$

が得られる.

4. 他方, 分割の定義より

$$s(f;\Delta\cup\Delta_\varepsilon) \geq s(f;\Delta_\varepsilon) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon$$

だから,

$$\begin{aligned}s(f;\Delta) &= s(f;\Delta) - s(f;\Delta\cup\Delta_\varepsilon) + s(f:\Delta\cup\Delta_\varepsilon)\\ &\geq -\varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon - \varepsilon\\ &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - 2\varepsilon - 2\varepsilon\end{aligned}$$

が得られる. Riemann 上積分についても同様の議論で得られる. □

(4.9) と定理 4.56 によれば, 有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0,\ldots,x_N\}$, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

が成り立つ. 従って, f が Riemann 積分可能であれば $S := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ と定めると

$$|R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S| < \varepsilon$$

となる. 逆に有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ はある $S \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0,\ldots,x_N\}$ と $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ をみたす $\{\xi_k\}_{k=1}^N$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対

して $|\Delta| < \delta$ ならば $|R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S| < \varepsilon$ をみたすとする. Riemann 上積分・下積分の定義, ならびに過剰和の定義を用いれば, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ をみたすある $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ がとれて

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f;\Delta) < R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) + \varepsilon < S + 2\varepsilon$$

が成り立つ. 同様にして

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx > S - 2\varepsilon$$

も得られるので, $\varepsilon \to 0$ とすることで f が Riemann 積分可能であることがわかる. まとめて, 次を得る.

定理 4.57.
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能であることと, 次をみたす実数 $S \in \mathbb{R}$ が一意に定まることは同値である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ と $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ をみたす任意の $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に対して $|\Delta| < \delta$ ならば $|R(f;\Delta,\{\xi_k\}_{k=1}^N) - S| < \varepsilon$ が成り立つ.

定積分の性質のうち, 線形性, 順序保存性, 三角不等式や区間加法性はそっくりそのまま成立する. 他方で, 積分の平均値定理 (定理 4.46) と不定積分が原始関数になること (定理 4.50) は被積分関数の連続性が必要である. これらの詳細はここでは述べないことにするが, 各自で証明を試みよ.

4.6.1. Riemann 積分可能性と振動量. 有界な関数が Riemann 積分可能かどうかを調べるために, 次の振動量なるものを定義しよう.

定義 4.58 (振動量)**.**
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と $A \subset [a,b]$ に対して,

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} f(x) := \sup_{x,x'\in A} |f(x) - f(x')|$$

を A における f の**振動量**という.

命題 4.59.
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a,b]$ の分割 Δ

が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

とできるならば, f は Riemann 積分可能である.

証明.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 仮定で取れる $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ をとると, Riemann 上積分, 下積分の定義より

$$\begin{aligned}
0 &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \qquad (4.27) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. (4.27) の左辺は ε に依らないので $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

がわかる. □

定理 4.60.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が有界で単調減少 (単調増加) ならば, f は Riemann 積分可能である.

証明.

f が単調減少のときに示す. f が定数関数のときは明らかなので, 定数関数ではないとし, $M := f(a) - f(b)$ とおくと, f が単調減少なので, $M > 0$ となる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ を $\dfrac{M(b-a)}{N} < \varepsilon$ となるようにとる.

$$\begin{aligned}
\Delta := \{x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{1}{N}(b-a),\ x_2 = a + \frac{2}{N}(b-a), \ldots, \\
x_k = a + \frac{k}{N}(b-a), \ldots, x_N = b\}
\end{aligned}$$

を $[a,b]$ の分割とすると, $|\Delta| = \dfrac{1}{N}(b-a)$ であり, f が単調減少であることから $\operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) = f(x_{k-1}) - f(x_k)$ となるので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) &\le |\Delta| \sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) - f(x_k)) \\ &= \frac{b-a}{N}(f(a) - f(b)) < \varepsilon\end{aligned}$$

が得られる. 命題 4.59 より f は Riemann 積分可能である. □

最後に, 関数の積, 絶対値についての Riemann 積分可能性に言及しておこう.

定理 4.61.
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) fg は Riemann 積分可能である.
(2) $|f|$ は Riemann 積分可能である.

注意 4.62.
定理 4.61 の (2) の逆にあたる主張「$|f|$ は Riemann 積分可能ならば, f は Riemann 積分可能」は一般に成り立たない. 例えば, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

とすると, $x \in [0,1]$ に対して $|f(x)| = 1$ となるから, $|f|$ は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能となるが, f は Riemann 積分可能とはならない.

この事実に対して, Riemann 積分可能を Lebesgue 積分にかえた主張「$|f|$ は Lebesgue 積分可能ならば, f は Lebesgue 積分可能」は成立することが知られている.

定理 4.61 の証明のために, 命題 4.59 の逆を示す. すなわち

命題 4.63.
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能であるとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

とできる.

証明.

Riemann 上積分, 下積分の仮定と分割の性質より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, I 上の分割 Δ, Δ' が存在して

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s_\Delta(f) \le s_{\Delta\cup\Delta'}(f)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > S_{\Delta'}(f) \ge S_{\Delta\cup\Delta'}(f)$$

がなりたつ. $\Delta \cup \Delta' = \{x_0, \ldots, x_n\}$ と書くと, f が Riemann 積分可能より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) &= S_{\Delta\cup\Delta'}(f) - s_{\Delta\cup\Delta'}(f) \\ &\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

となる. □

命題 4.64.

$f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ が有界ならば, $J \subset I$ に対して

$$\operatorname*{osc}_J(fg) \le \sup_J |f| \operatorname*{osc}_J g + \sup_J |g| \operatorname*{osc}_J f \tag{4.28}$$

が成り立つ.

証明.

任意の $x, y \in J$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\le |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\le \sup_J |f| \operatorname*{osc}_J(g) + \sup_J |g| \operatorname*{osc}_J(f)\end{aligned}$$

が成り立つ. $x, y \in J$ について上限をとれば (4.28) が得られる. □

命題 4.65.

$x_1 < x_2 < x_3$ と $f : [x_1, x_3] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname*{osc}_{x_1 \le x \le x_2}(f(x))(x_2 - x_1) + \operatorname*{osc}_{x_2 \le x \le x_3}(f(x))(x_3 - x_2) \le \operatorname*{osc}_{x_1 \le x \le x_3}(f(x))(x_3 - x_1) \tag{4.29}$$

が成り立つ.

証明.

任意の $x_1 \le \xi_1, \xi_2 \le x_2 \le \eta_1, \eta_2 \le x_3$ に対して

$$\begin{aligned} &|f(\xi_1) - f(\xi_2)|(x_2 - x_1) + |f(\eta_1) - f(\eta_2)|(x_3 - x_2) \\ \le &\operatorname*{osc}_{x_1 \le x \le x_3}(f(x))(x_2 - x_1) + \operatorname*{osc}_{x_1 \le x \le x_3}(f(x))(x_3 - x_2) \le \operatorname*{osc}_{x_1 \le x \le x_3}(f(x))(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

が成り立つ. $x_1 \le \xi_1, \xi_2 \le x_2$, $x_2 \le \eta_1, \eta_2 \le x_3$ について上限をとれば (4.29) が成り立つ. □

命題 4.65 から, 特に I 上の分割 Δ, Δ' に対して $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\Delta \cup \Delta' = \{y_0, \ldots, y_m\}$ と書くと

$$\sum_{l=1}^{m} \operatorname*{osc}_{y_{l-1} \le y \le y_l} f(y)(y_l - y_{l-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

となることに注意しよう. つまり, Δ での振動量の和よりも $\Delta \cup \Delta'$ での振動量の和は小さくなる.

定理 4.61 の証明.

1. fg が I 上 Riemann 積分可能であることを示す. $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$ のときは, $fg \equiv 0$ となるので自明である. そこで, $f, g \not\equiv 0$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, f, g は I 上 Riemann 積分可能だから, 命題 4.63 よりある I 上の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\Delta' = \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) &< \frac{\varepsilon}{2 \sup_I |g|}, \\ \sum_{l=1}^{m} \operatorname*{osc}_{x'_{l-1} \le x \le x'_l} g(x)(x'_l - x'_{l-1}) &< \frac{\varepsilon}{2 \sup_I |f|} \end{aligned}$$

とできる. $\Delta \cup \Delta' = \{y_0, \ldots, y_l\}$ と書くと命題 4.65 より

$$\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} f(y)(y_k - y_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}),$$
$$\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} g(y)(y_k - y_{k-1}) \le \sum_{l=1}^{m} \operatorname*{osc}_{x'_{l-1} \le x \le x'_l} g(x)(x'_l - x'_{l-1})$$

だから命題 4.64 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} (f(y)g(y))(y_k - y_{k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{l} \Bigg(\sup_{y_{k-1} \le y \le y_k} |g(y)| \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} (f(y))(y_k - y_{k-1}) \\
&\qquad + \sup_{y_{k-1} \le y \le y_k} |g(y)| \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} (f(y))(y_k - y_{k-1}) \Bigg) \\
&\le \sup_I |g| \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} (f(y))(y_k - y_{k-1}) \\
&\qquad + \sup_I |f| \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{osc}_{y_{k-1} \le y \le y_k} (g(y))(y_k - y_{k-1}) \\
&\le \sup_I |g| \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}), \\
&\qquad + \sup_I |f| \sum_{l=1}^{m} \operatorname*{osc}_{x'_{l-1} \le x \le x'_l} g(x)(x'_l - x'_{l-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となる. よって, 命題 4.59 より fg は I 上積分可能となる.

2. $|f|$ が I 上 Riemann 積分可能であることを示す. $\varepsilon > 0$ に対して f は I 上 Riemann 積分可能だから, 命題 4.63 よりある I 上の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$, が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

とできる. 任意の $x_{k-1} \leq \xi, \eta \leq x_k$ に対して三角不等式より

$$\bigl||f(\xi)| - |f(\eta)|\bigr| \leq |f(\xi) - f(\eta)| \leq \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x)|(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{osc}_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

となる. よって, 命題 4.59 より $|f|$ は I 上積分可能となる. □

第 5 章

微分積分の展開

この章では, 高校で学んだ微分積分の知識をさらに広げて, Taylor の定理と Taylor 展開, de l'Hospital の定理と広義積分を論ずる. 関数を多項式を用いて解析することや, 非有界な関数を積分を通じて理解することなど, 関数をどのように解析するかの基礎となる内容である.

5.1. 高階導関数

Taylor の定理を述べるために, 導関数をさらに微分することを考えよう.

定義 5.1.

(a,b) 上微分可能な関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ が $x_0\in(a,b)$ で微分可能なとき,

$$f''(x_0) := \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{df}{dx}(x)-\frac{df}{dx}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{df}{dx}(x_0+h)-\frac{df}{dx}(x_0)}{h}$$

とかく. $f''(x_0)$ を f の x_0 における**第 2 次微分係数**という. また, $\dfrac{df}{dx}$ が (a,b) 上微分可能なとき, $x\in(a,b)$ に対し

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) := f''(x)$$

と書く. $\dfrac{d^2f}{dx^2}:(a,b)\to\mathbb{R}$ を f の **2 階導関数**という.

3 次微分係数, 3 階導関数なども同様にして定義する. 以下, $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$C^n(a,b) := \left\{ f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f\text{ は }(a,b)\text{ 上 }n\text{ 回微分可能, }\frac{d^nf}{dx^n}\text{ は }(a,b)\text{ 上連続} \right\}$$

と書く. また, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ の $x_0\in(a,b)$ における n 次微分係数を $f^{(n)}(x_0)$ と書くことがある.

例 5.2 (多項式の高階導関数)**.**
$m, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \tag{5.1}$$

となる, $n > m$ のときは, (5.1) の右辺の因子に 0 があることに注意せよ.

例 5.3 (指数関数の高階導関数)**.**
$a \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax} \tag{5.2}$$

となる,

例 5.4 (三角関数の高階導関数)**.**
$\sin' x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos' x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ に注意すると, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \tag{5.3}$$

となる,

次の公式は, 積の微分公式を高階導関数に一般化したものである.

定理 5.5 (Leibniz の公式)**.**
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ はともに n 階導関数を持つとする. このとき $x \in (a,b)$ に対して

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \tag{5.4}$$

が成り立つ.

注意 5.6.
公式 5.4 と二項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$ の類似性に注意せよ.

定理 5.5 の証明.
n に関する帰納法で示す. $n = 1$ のときは積の微分公式そのものである.

$n-1$ に対して (5.4) が成り立つとする. すなわち

$$(fg)^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k f^{(n-1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

が成り立つとする. このとき, 両辺を微分すると

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k (f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-1-k)}(x) g^{(k+1)}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\
&= {}_{n-1}C_0 f^{(n)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} ({}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}) f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\
&\quad + {}_{n-1}C_{n-1} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

となる. ${}_{n-1}C_0 = {}_nC_0 = 1$, ${}_{n-1}C_{n-1} = {}_nC_n = 1$ と組み合わせの公式

$${}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1} = {}_nC_k$$

を用いれば[1], (5.4) が示される.

□

一般に, 高階導関数を求めることは簡単ではない. 他方で, 高階導関数を陽的に書くことはできなくとも, 必要な性質がわかることもある.

例 **5.7** (Hermite の多項式)**.**
$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

(5.5)
$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = P_n(x) e^{-x^2}$$

と書ける. ここで, P_n は n 次多項式となる. $H_n(x) := (-1)^n P_n(x)$ を **Hermite の多項式**という. (5.5) より

(5.6)
$$H(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

が成り立つ.

[1]いろいろな証明があるが, $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$ を使うのが簡単

(5.5) の証明.

n に関する帰納法を用いる. $n=0$ のとき, $P_0(x)=1$ となり, 0 次多項式である.

$n-1$ で (5.5) が成り立っており, P_{n-1} が $n-1$ 次多項式であるとする. (5.5) を両辺微分すると

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = P'_{n-1}(x)e^{-x^2} + P_{n-1}(x)(-2x)e^{-x^2} = (P'_{n-1}(x) - 2xP_{n-1}(x))e^{-x^2}$$

となる. $P_n(x) = P'_{n-1}(x) - 2xP_{n-1}(x)$ は n 次多項式だから, (5.5) は n のときも成り立つ. □

5.2. Taylor の定理

Taylor の定理は (1.15) で紹介したが, 再掲するとともに, 証明を述べることにしよう.

定理 5.8 (Taylor の定理)**.**

$n \in \mathbb{N}$ と $f \in C^n(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt \end{aligned} \tag{5.7}$$

が成り立つ.

証明.

n に関する帰納法で示す. $n=1$ のときは微分積分学の基本定理より

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{(1)}(t)\,dt$$

より (5.7) が成り立つことがわかる.

$n-1$ で (5.7) が成り立つとする. (5.7) が n の時に成り立つことを示すには

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt \\ &\qquad = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt \end{aligned}$$

を示せば十分である. このために, 左辺に部分積分を行うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt\\
&=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{(x-t)^{n-1}}{n-1}\right)_t f^{(n-1)}(t)\,dt\\
&=-\frac{1}{(n-1)!}\Big[(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\Big]_{t=x_0}^{x}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt\\
&=-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

となるので, (5.7) が n のときも成り立つことがわかった. □

(5.7) の右辺の最後の項の積分は, このままの形で使うのではなく, $x \to x_0$ としたときにどうなるかがわかっていれば十分なことが多い. 実際に次が成り立つ.

定理 5.9 (Taylor 展開と剰余項)**.**
$n \in \mathbb{N}$ と $f \in C^n(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $x \in (a,b)$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\\
&\quad+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x;x_0)(x-x_0)^n
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

と書くと $R_n(x;x_0) \to 0 \quad (x \to x_0)$ が成り立つ.

証明.
Taylor の定理 (定理 5.8) から, $x \to x_0$ としたときに

$$
\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(x-x_0)^n}f^{(n)}(t)\,dt-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \to 0 \tag{5.9}
$$

を示せばよい. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\,dt=\frac{1}{n}(x-x_0)^n$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(x-x_0)^n}f^{(n)}(t)\,dt-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|\\
&\qquad=\frac{1}{(n-1)!|x-x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0))\,dt\right|
\end{aligned}
$$

となる. $f^{(n)}$ は $x = x_0$ で連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, すべての $t \in (a,b)$ に対して, $|t - x_0| < \delta$ ならば $|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つ. $x \in (a,b)$ が $|x - x_0| < \delta$ ならば, x と x_0 の間の t に対して $|t - x_0| < \delta$ であり, 積分の三角不等式により

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|x - x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{|x - x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x} |x-t|^{n-1}|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)|\,dt\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{|x - x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x} |x-t|^{n-1}\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{n}
\end{aligned}
$$

が得られる. よって, (5.9) が成り立つ. □

$x_0 = 0$ のときの Taylor の定理は特に重要である. 系としてまとめておこう.

系 5.10 (Taylor-Maclaurin 展開と剰余項)**.**
$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(-1,1)$, $x \in (-1,1)$ に対して

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)x^n$$

と書くと $R_n(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ が成り立つ.

例 **5.11** (指数関数の Taylor-Maclaurin 展開と剰余項)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める. (5.2) によると, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(0) = 1$ だから系 5.10 より

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)x^n \tag{5.10}$$

と書いたときに $R_n(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる.

例 **5.12** (三角関数の Taylor-Maclaurin 展開と剰余項)**.**
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \sin x$, $g(x) := \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める. (5.3) によると, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \begin{cases} (-1)^k, & (n = 2k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots), \\ 0, & (n = 2k, \quad k = 0,1,2,\ldots), \end{cases},$$

$$g^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \begin{cases} (-1)^k, & (n = 2k, \quad k = 0,1,2,\ldots), \\ 0, & (n = 2k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots), \end{cases}$$

だから系 5.10 より

$$
(5.11)\quad
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2k+1}(x)x^{2k+1},\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + R_{2k}(x)x^{2k}
\end{aligned}
$$

と書いたときに $R_{2k+1}(x), R_{2k}(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる.

例 5.13 (対数関数の Taylor-Maclaurin 展開と剰余項)**.**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \log(1+x)$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ となるから, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ となる. $f(0) = 0$ もあわせると系 5.10 より

$$
(5.12)\qquad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x)x^n
$$

と書いたときに $R_n(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる.

ところで,

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n
$$

となる. 両辺 x で積分すると, 形式的に級数と積分を交換することで

$$
f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}
$$

すなわち

$$
\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots
$$

となっている.

例 5.14.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ となる.

証明.

(5.11) によれば $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + R_3(x)x^3$ と書くと, $R_3(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる. 従って

$$
\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3 + R_3(x)x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} - R_3(x) \to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)
$$

がわかる. □

例 **5.15.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}=2 \text{ となる.}$$

証明**.**

(5.11) と (5.12) によれば $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + R_3^1(x)x^3$, $\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + R_3^2(x)x^3$ と書くと, $R_3^1(x), R_3^2(x) \to 0 \quad (x \to 0)$ となる. 従って

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x} &= \frac{(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_3^2(x)x^3)-x+\frac{x^2}{2}}{x-(x-\frac{1}{6}x^3+R_3^1(x)x^3)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3+R_3^2(x)x^3}{\frac{1}{6}x^3-R_3^1(x)x^3} = \frac{2+6R_3^2(x)}{1-6R_3^1(x)} \to 2 \quad (x \to 0)\end{aligned}$$

がわかる. □

5.3. 凸関数

2 階導関数の符号によって, 関数が上に凸, 下に凸であることを議論した. しかしながら, 凸であることは元来, 微分とは関係なく定義することができる.

定義 **5.16** (凸関数)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上**凸関数**であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in [a,b]$ と $0 < \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{5.13}$$

が成り立つことをいう.

$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ は x_1, x_2 を $1-\lambda : \lambda$ に内分する点である. $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ は $f(x_1), f(x_2)$ を $1-\lambda : \lambda$ に内分する点である. (5.13) はグラフを書くと, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分がグラフ $y = f(x)$ の上側にあるということである.

関数 f が凸関数であるための必要十分条件を与えよう.

命題 **5.17.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上凸関数であるための必要十分条件は, $x_1 < u < x_2$ をみたす任意の $x_1, x_2, u \in [a,b]$ に対して

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(u)}{x_2-u} \tag{5.14}$$

が成り立つことである.

注意 5.18.

(5.14) は $(x_1, f(x_1)), (u.f(u))$ を結ぶ線分の傾きが $(u.f(u)), (x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の傾きより小さくなることを主張している. さらに (5.14) を

$$f(x_2) \geq \frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1}(x_2 - u) + f(u) \tag{5.15}$$

と変形して, 右辺を x_2 を独立変数とみなせば $(x_1, f(x_1)), (u.f(u))$ を通る直線になるから, $u < x < x_2$ において, グラフ $y = f(x)$ が $(x_1, f(x_1)), (u.f(u))$ を通る直線の上側にあることを意味する.

証明.

f を $[a,b]$ 上の凸関数とする. $x_1 < u < x_2$ をみたす任意の $x_1, x_2, u \in [a,b]$ に対して, ある $0 < \lambda < 1$ が存在して, $u = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ と書ける. 実際に $\lambda = \dfrac{u - x_2}{x_1 - x_2}$ と書けばよい. 凸関数の定義より

$$0 \leq \lambda(f(x_1) - f(u)) + (1-\lambda)(f(x_2) - f(u))$$

だから

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(u)}{\lambda}$$

となる. $\lambda = \dfrac{u - x_2}{x_1 - x_2}$ を代入すれば (5.14) が得られる.

逆に $x_1 < u < x_2$ をみたす任意の $x_1, x_2, u \in [a,b]$ に対して (5.14) が成り立つとする. $x_1, x_2 \in [a,b]$ に対して, $x_1 < x_2$ と仮定してよい ($x_2 < x_1$ ならば, x_1 と x_2 を入れ替えればよい). $0 < \lambda < 1$ に対して $u = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ とおいて, (5.14) に代入すれば, (5.13) が得られる. □

関数が微分可能なとき, 凸関数であるための同値条件を導関数を用いて記述することができる.

定理 5.19.

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ とする. このとき, f が $[a,b]$ 上凸関数であることと $\dfrac{df}{dx}$ が (a,b) 上単調増加であることは同値である.

証明.

f が $[a,b]$ 上凸関数であるとして, $f' = \dfrac{df}{dx}$ が単調増加であることを示す. $x_1 < x_2$ をみたす, $x_1, x_2 \in [a,b]$ と $x_1 < u < x_2$ に対して, (5.14) より,

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(u)}{x_2 - u}$$

となるから, $u \to x_1 + 0$ とすると

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

となり, $u \to x_2 - 0$ とすると

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

となるから, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ が成り立つ.

逆に, f' が単調増加であるとする. $x_1 < u < x_2$ をみたす任意の $x_1, x_2, u \in [a,b]$ に対して平均値の定理 (定理 4.17) を用いると, $x_1 < \xi < u$, $u < \eta < x_2$ が存在して

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} = f'(\xi), \quad \frac{f(u) - f(x_2)}{u - x_2} = f'(\eta)$$

が成り立つ. $\xi \leq \eta$ より f' が単調増加であることから $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ となるので,

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(u) - f(x_2)}{u - x_2}$$

が成り立つ. 命題 5.17 より f は凸関数となる. □

1 階導関数が単調増加であるための十分条件は 2 階導関数が非負であることである. このことから, 次が得られる.

系 5.20.

$f \in C([a,b]) \cap C^2(a,b)$ が $\dfrac{d^2 f}{dx^2} \geq 0$ をみたすならば, f は $[a,b]$ 上凸関数である.

例 5.21.

$p > 1$ に対して, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in [0,\infty)$ に対して $f(x) := x^p$ で定めると, f は凸関数である. 実際, $p > 1$ だから $x \in [0,\infty)$ に対して, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ である. このことから, 凸関数の定義を用いると, $a, b \in [0,\infty)$, $0 < \lambda < 1$ に対して

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

が成り立つ. とくに, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ とすれば,

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

が成り立つ. このことから, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p < \infty$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p < \infty$ がわかる. 従って,

$$\left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

が線形空間となることがわかる.

例 5.22 (相加, 相乗平均と Young の不等式)**.**
$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,\infty)$ に対して $f(x) := -\log x$ で定めると, f は凸関数である. 実際, $x \in (0,\infty)$ に対して $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} \geq 0$ である. 凸関数の定義を用いると, $x, y > 0$, $0 < \lambda < 1$ に対して

$$-\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda \log x - (1-\lambda)\log y$$

となるから,

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y$$

となる. $p, q > 1$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとすると $\lambda = \dfrac{1}{p}$ として

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

となる. $a, b > 0$ に対して $x = a^p$, $y = b^q$ とすれば

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{5.16}$$

が得られる. この不等式 (5.16) を **Young の不等式**という. $p = q = 2$ とすると

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad \text{または} \ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{5.17}$$

となる. この不等式 (5.17) は**相加相乗平均の不等式**である.

5.4. de l'Hospital の定理

Taylor の定理を応用して, 極限の計算を行った. 先の計算例を一般化してみよう.

例 5.23.

$f,g \in C^1(-1,1)$ が, $f(0)=g(0)=0$ かつ $g'(0)\neq 0$ とする. このとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ. 実際に,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_{f,1}(x)x, \quad g(x) = g(0) + g'(0)x + R_{g,1}(x)x$$

と書くと, $R_{f,1}(x), R_{g,1}(x) \to 0$ $(x\to 0)$ となる. $f(0)=g(0)=0$ と $g'(0)\neq 0$ に注意して, $x\to 0$ とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)+f'(0)x+R_{f,1}(x)x}{g(0)+g'(0)x+R_{g,1}(x)x} = \frac{f'(0)+R_{f,1}(x)}{g'(0)+R_{g,1}(x)} \to \frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

がわかる.

例 5.23 から, 不定系の極限は分母と分子をそれぞれ微分すると求められる場合があるように思える. 実際に次が成り立つ.

定理 5.24 (de l'Hospital の定理 (その 1))**.**

$f,g \in C^1(a,b)$ は $x\in(a,b)$ に対して $g'(x)\neq 0$ とする. $f(x), g(x)\to 0$ $(x\to a+0)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

標語的にいうと, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ の不定形ならば,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ. では $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形のときはどうだろうか？ このときも, 分母と分子を微分して極限を計算することができる.

定理 5.25 (de l'Hospital の定理 (その 2))**.**
$f,g \in C^1(a,b)$ は $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. $f(x), g(x) \to \infty$ $(x \to a+0)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

定理 5.24, 5.25 の証明はあとで行う. 定理 5.24 で $x \to \infty$ の場合は $\dfrac{1}{x}$ を考えることで同様の結果が導ける.

定理 5.26 (de l'Hospital の定理 (その 3))**.**
$f,g \in C^1(\mathbb{R})$ は $x \in \mathbb{R}$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. $f(x), g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

証明.
$x = \dfrac{1}{y}$ とすれば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to+0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$$

となる. y での微分を考えると

$$\frac{d}{dy}\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = -f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$$

だから

$$\lim_{y\to+0} \frac{\frac{d}{dy}(f(\frac{1}{y}))}{\frac{d}{dy}(g(\frac{1}{y}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

となり, 定理 5.24 から

$$l = \lim_{y\to+0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる. □

$l = \infty$ の場合も de l'Hospital の定理はそのまま成り立つ. 分母と分子を交換して 0 に収束すること, 分母と分子の符号を調べることが必要になる.

定理 5.27 (de l'Hospital の定理 (その 4))**.**
$f,g \in C^1(a,b)$ は $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする．$f(x), g(x) \to 0$ $(x \to a+0)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, つまり極限が存在して, 値が等しくなる.

証明.
$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ だから，b を適当にとりかえて，$x \in (a,b)$ に対して，$f'(x)g'(x) > 0$ とできる．必要に応じて，f と g の正負を入れかえて，$f'(x) > 0$ と仮定してよい．$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ となるから定理 5.24 から $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$ となる．

$x' < x$ をみたす, $x, x' \in (a,b)$ に対して, $f'(\xi) \geq 0$ となるから

$$f(x) = f(x') + \int_{x'}^{x} f'(\xi)\,d\xi \geq f(x')$$

が得られる．$x' \to a+0$ とすれば, $f(x') \to 0$ となるから, $f(x) \geq 0$ となる．同様に $g(x) \geq 0$ も成り立つから，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ が成り立つ． □

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形であっても 定理 5.26 や定理 5.27 のように, $x \to \infty$ や $l = \infty$ で de l'Hospital の定理が成り立つ．証明は各自試みよ．

5.4.1. de l'Hospital の定理の使い方. de l'Hospital の定理の使い方を説明しよう．

例 5.28.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ となることを de l'Hospital の定理を用いて示す．$\dfrac{0}{0}$ の不定形だから de l'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

となる．また, $\dfrac{0}{0}$ の不定形だから de l'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

となる. よって, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ だから $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ となる.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}$ が $\dfrac{0}{0}$ の不定形だから de l'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

となる .

注意 5.29.

例 5.28 で

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{0}$$

としてはいけない. de l'Hospital の定理は極限が**不定形のときにしか使ってはいけない.**

例 5.30.

$\lim_{x\to +0} x^x$ を de l'Hospital の定理を用いて求める.

$$x^x=\exp(\log x^x)=\exp(x\log x)=\exp\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right)$$

と変形すれば, 指数関数の連続性より $\lim_{x\to +0}\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ を求めればよい. これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形だから, de l'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

となる. 従って,

$$\lim_{x\to +0}x^x=\exp\left(\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right)=\exp 0=1$$

となる.

例 5.31.

$n\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$ を求めよう. $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形だから, de l'Hospital の定理を n 回くりかえせば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

となる.

例 5.32.

$\lim_{x\to+0} x\log(\tan x)$ を求めよう. $x\log(\tan x) = \dfrac{\log(\tan x)}{\frac{1}{x}}$ と変形すると, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形となるから de l'Hospital の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x\log(\tan x) &= \lim_{x\to+0} \frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} x\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{-1}{\cos x}\right) = 0\end{aligned}$$

とわかる.

5.4.2. de l'Hospital の定理の証明. de l'Hospital の定理を証明しよう. そのために, 次の Cauchy の平均値の定理を証明しよう.

定理 5.33 (Cauchy の平均値の定理)**.**

$f, g \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ は $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. このとき, $\xi \in (a,b)$ が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{5.18}$$

が成り立つ.

証明.

$g(a) \neq g(b)$ に注意する. 実際に, $g(a) = g(b)$ と仮定すると, Rolle の定理 (定理 4.16) により, $g'(\xi_0) = 0$ となる $\xi_0 \in [a,b]$ が存在するが, これは, g の仮定に反する.

次に, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

で定めると, $F \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ で $F(a) = F(b) = 0$ である. よって, $\xi \in (a,b)$ が存在して, $F'(\xi) = 0$ となる.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(x))$$

となるから, $x = \xi$ を代入することで (5.18) が成り立つ. □

定理 5.24 の証明.

1. $x \in (a,b)$ に対して, $g(x) \neq 0$ となる. 実際, もし, $g(x) = 0$ ならば, $g(a) = 0$ と定めることにより, g は $[a,x]$ 上連続, (a,x) 上微分可能となるので, Rolle の定理 (定理 4.16) より, ある $\xi \in (a,x)$ が存在して, $g'(\xi) = 0$ となり, 仮定に矛盾する.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在してすべての $x \in (a,b)$ に対し $0 < x - a < \delta$ ならば

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. $0 < x - a < \delta$ なる x を固定すると, $f(\xi), g(\xi) \to 0 \quad (\xi \to a+0)$ より $a < \xi_0 < x$ が存在して

$$|g(\xi_0)| < \frac{|g(x)|}{2}, \qquad \frac{|g(x)||f(\xi_0)| + |f(x)||g(\xi_0)|}{|g(x)|^2} < \frac{\varepsilon}{4}$$

となるから, $|g(x) - g(\xi_0)| \geq |g(x)|/2$ に注意すると

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(\xi_0)}{g(x) - g(\xi_0)}\right| &= \frac{|g(x)f(\xi_0) - f(x)g(\xi_0)|}{|g(x)||g(x) - g(\xi_0)|} \\ &\leq \frac{|g(x)||f(\xi_0)| + |f(x)||g(\xi_0)|}{|g(x)|^2/2} < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

となる.

3. Cauchy の平均値の定理 (定理 5.33) より, ある $\xi_1 \in (\xi_0, x)$ が存在して,

$$\frac{f(x) - f(\xi_0)}{g(x) - g(\xi_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

が成り立つ. 従って

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. さらに, $a < \xi_0 < \xi_1 < x$ より, $0 < \xi_1 - a < x - a < \delta$ だから

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} + \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} - l\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}\right| + \left|\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} - l\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

となるので, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to l \ (x \to a+0)$ が示された. □

定理 5.25 の証明.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ が存在して, $\xi \in (a,b)$ に対して, $0 < \xi - a < \delta_1$ ならば

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l = A(\xi), \quad |A(\xi)| < \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$$

が成り立つ. $0 < x_0 - a < \delta_1$ なる $x_0 \in (a,b)$ を一つとる. 次に, $f(x), g(x) \to \infty$ $(x \to a+0)$ だから, $\delta > 0$ が存在して, すべての $x \in (a,b)$ が存在して $a + \delta < x_0$ かつ, $0 < x - a < \delta$ ならば

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + B(x), \quad |B(x)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |l|)}$$

が成り立つ. Cauchy の平均値定理 (定理 5.33) より, $\xi_1 \in (x, x_0)$ が存在して

$$\frac{f(\xi_1)}{g(\xi_1)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1}{1 + B(x)}$$

が成り立つ. 従って, $0 < \xi_1 - a < x_0 - a < \delta_1$ だから

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = (A(\xi_1) + l)(1 + B(x)) - l = (A(\xi_1) + l)B(x) + A(\xi_1)$$

となるから,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq |A(\xi_1)| + (|A(\xi_1)| + |l|)|B(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + (1 + |l|)\frac{\varepsilon}{2(1 + |l|)} = \varepsilon$$

が成り立つ. よって, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to l$ $(x \to a+0)$ が成り立つ. □

5.5. 広義積分

連続関数における定積分は定理 4.29 が重要であった. もう少し詳細なことを述べると, 閉区間上の連続関数はその閉区間上一様連続であることが必要であった. また, 閉区間上の連続関数は Weierstrass の最大値定理 (定理 3.47) により, 最大値, 最小値が存在するので, 有界な関数を考えていたことになる. そこで, 有界でない関数や有界でない区間における積分を考えよう.

5.5.1. 非有界な関数の積分. 非有界な関数, 例えば反比例のように, $x = 0$ を代入できないような関数に対する積分を考えよう.

例 **5.34.**
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ をどう定めるのがよいかを考えよう. $x = 0$ で $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が定義できないことに注意しよう.

$\varepsilon > 0$ と $x \in [\varepsilon, 1]$ に対して, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は定義できて $[\varepsilon, 1]$ 上連続なので, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ は定義できる. そこで, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ と定めるのが一つの方法だろう.

$\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となるから

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

と定義するのが自然であろう.

このアイデアを一般化して, 非有界な関数に対する積分を定義しよう.

定義 5.35 (広義積分)**.**
$(a, b]$ 上連続な関数 $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ に対し

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

で定義する. この積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を**広義積分**といい, 極限が存在するときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**収束する**という. 極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ は**発散する**という.

例 **5.36.**
$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ を求めよう. 被積分関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x = 0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \tag{5.19}$$

と二つにわけて, (5.19) のそれぞれの積分を計算しないといけない.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_{x=\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)\right) = 2,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2$$

となる. 二つ目の積分は変数変換 $y = -x$ を用いた. これらを (5.19) に代入することにより, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 4$ とわかる.

例 5.37.

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ は発散する. 被積分関数 $\dfrac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \tag{5.20}$$

と二つにわけて, (5.20) のそれぞれの積分を計算しないといけない.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}[\log x]_{x=\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = \infty,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{y}\,dy\right) = -\infty$$

となる. 二つ目の積分は変数変換 $y = -x$ を用いた. これらにより, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ は発散することがわかる.

注意 5.38.

例 5.37 で正しそうに見える次の計算

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^1 = \log|1| - \log|-1| = 0$$

や

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx\right) = 0$$

は正しくないことに注意せよ.

5.5.2. 無限区間の積分. 積分区間が無限大, つまり, 上端が ∞ となっていたり, 下端が $-\infty$ となる積分を考えよう.

例 5.39.

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x\in[1,\infty))$$

で定義する. このときに $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ をどう定めるのがよいだろうか? **積分の区間が有限でない, つまり上端が ∞ となっている**ことに注意しよう.

$M>0$ と $x\in[1,M]$ に対して, $\dfrac{1}{x^2}$ は定義できて $[1,M]$ 上連続なので, $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx$ は定義できる. そこで, $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx$ と定めるのが一つの方法だろう.

$M>0$ に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = 1-\frac{1}{M}$$

となるから

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) = 1$$

と定義するのが自然であろう.

このアイデアを一般化して, 非有界な区間で定義された関数に対する積分を定義しよう.

定義 5.40 (広義積分)**.**

$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ は $[a,\infty)$ 上連続とする. このとき,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

で定義する. この積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**広義積分**といい, 極限が存在するときは, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**収束する**という. 極限が存在しないときは, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ は**発散する**という.

例 5.39 によれば, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ となる. さらに一般化して, $\alpha>0$ に対して, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ の広義積分を考えよう.

定理 5.41.
$\alpha > 0$ とすると, 次が成り立つ

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} < \infty & (0 < \alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \leq 1) \end{cases}$

定理 5.41 の証明は各自考えよ. $\alpha = 1$, すなわち $\dfrac{1}{x}$ の原始関数は $\log x$ となること, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\varepsilon^\beta \to \begin{cases} 0 & \beta > 0 \\ \infty & \beta < 0 \end{cases}, \quad (\varepsilon \to +0), \qquad M^\beta \to \begin{cases} \infty & \beta > 0 \\ 0 & \beta < 0 \end{cases}, \quad (M \to \infty)$$

となることに注意せよ.

例 5.42 (Gauss 積分)**.**
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ は収束する. このことを証明しよう. $x \geq 0$ に対して $e^{-x^2} \geq 0$ だから, $\displaystyle\int_0^M e^{-x^2}\,dx$ は $M > 0$ について単調増加となる. 従って, $\displaystyle\int_0^M e^{-x^2}\,dx$ は $M > 0$ について有界であることを示せばよい.

$\xi \geq 1$ に対して, $\xi e^{-\xi} \leq 1$ となるから (各自), 特に $x \geq 1$ に対して, $\xi = x^2$ とおいて $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ となる. 従って, $M > 1$ に対して定理 5.41 を用いると

$$\int_1^M e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx \leq 1$$

となるから, $0 \leq x \leq 1$ に対して, $e^{-x^2} \leq 1$ より

$$\int_0^M e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^M e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx + \int_1^M e^{-x^2}\,dx \leq 1 + 1 = 2$$

となり $\displaystyle\int_0^M e^{-x^2}\,dx$ は $M > 0$ について有界となる.

注意 5.43.
実は

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることが知られている. この広義積分は偏差値など確率・統計, 偏微分方程式などいろいろなことに関係のある積分である.

5.6. 絶対収束と条件収束

以下, 話を簡単にするために, $[0,\infty)$ 上の連続関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を考える.

例 5.44.
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束するが, $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する.

証明.
1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示す. まず, $\displaystyle\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to 0)$ となるから, $x=0$ のときに被積分関数を 1 と定義しなおせば, 被積分関数は $[0,\infty)$ 上の連続関数である. 従って, $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$ が存在することを示せば十分である.

$M, M' > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{M'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| &= \left|\int_{M'}^M \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \\ &= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{M'}^M - \int_{M'}^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \\ &\le \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \left|\int_{M'}^M \frac{1}{x^2}\,dx\right| \\ &\le 2\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) \to 0 \quad (M, M' \to \infty)\end{aligned}$$

となるから, Cauchy の収束判定条件 (定理 3.31) により, $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$ は存在する. すなわち, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ が発散することを示す. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

となる. 積分との比較により

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となるので,

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

だから $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する. □

このことから, 被積分関数に絶対値をつけるか否かで広義積分の収束性がかわることがある. この違いを定義としてまとめよう.

定義 5.45 (絶対収束, 条件収束)**.**
$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする.
(1) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\, dx$ が収束するとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ は**絶対収束**するという.
(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ は収束するが, 絶対収束しないとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ は**条件収束**するという.

例 5.44 は条件収束する例である.

例 **5.46.**
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x\, dx$ は絶対収束する. 実際, $x \geq 0$ に対して

$$\left|e^{-x^2} \sin x\right| \leq e^{-x^2}$$

であり, 例 5.42 より $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty$ だから $M > 0$ に対して

$$\int_0^M \left| e^{-x^2} \sin x \right| dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty \tag{5.21}$$

となる. (5.21) の左辺は $M > 0$ について単調増加であることから $M \to \infty$ とすると収束する. すなわち, $\displaystyle\int_0^\infty \left| e^{-x^2} \sin x \right| dx$ は収束する.

絶対収束は条件収束より強い性質である. すなわち, 絶対収束する広義積分は, 被積分関数に絶対値をつけなくても収束することがわかる. すなわち, 次が成り立つ.

定理 5.47.
$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束する.

証明.
$M, M' > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束するから

$$\begin{aligned}\left| \int_0^M f(x)\,dx - \int_0^{M'} f(x)\,dx \right| &= \left| \int_{M'}^M f(x)\,dx \right| \\ &\leq \left| \int_{M'}^M |f(x)|\,dx \right| \to 0 \quad (M, M' \to 0)\end{aligned}$$

となる. Cauchy の収束判定条件 (定理 3.31) より $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_0^M f(x)\,dx$ は収束する. □

広義積分が絶対収束するかどうかについて, 被積分関数の原始関数を求める必要はない. すなわち, 被積分関数に対し次の定理に示す通り, ある不等式が成り立つかどうかを調べればよい.

定理 5.48.
$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする. $\lambda > 1$ に対して, $K > 0$ が存在して, すべて

の $x \in [0, \infty)$ に対して,

$$x^\lambda |f(x)| \le K \tag{5.22}$$

が成り立つと仮定する. このとき, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束する.

証明.

$M > 0$ に対して $\displaystyle\int_0^M |f(x)|\,dx$ は単調増加だから, $\displaystyle\int_0^M |f(x)|\,dx$ が $M > 0$ について有界であることを示せばよい. 仮定より $x \ge 1$ に対して

$$|f(x)| \le \frac{K}{x^\lambda}$$

となるから, $M \ge 1$ に対して

$$\int_1^M |f(x)|\,dx \le \int_1^M \frac{K}{x^\lambda}\,dx = \frac{K}{1-\lambda}\left(1 - \frac{1}{M^{\lambda-1}}\right) \le \frac{K}{\lambda - 1}$$

が得られる. よって

$$\int_0^M |f(x)|\,dx \le \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_1^M |f(x)|\,dx \le \int_0^1 |f(x)|\,dx + \frac{K}{1-\lambda} < \infty$$

となるから, $\displaystyle\int_0^M |f(x)|\,dx$ は $M > 0$ について有界である. □

(5.22) を示すためには, $x^\lambda |f(x)|$ が $x \to \infty$ としたときに収束することを示せば十分である. よって, 次が成り立つ.

系 5.49.

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする. ある $\lambda > 1$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x)$ が存在するならば, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は絶対収束する.

例 5.50.

$s > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$ は収束する (絶対収束する).

証明.

積分の区間加法性より

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

と二つの積分にわけ, それぞれの積分を考える.

1. $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ を考える. $0 < s < 1$ のとき, $e^{-x}x^{s-1} \to \infty$ $(x \to +0)$ となるから広義積分である. $0 < x \leq 1$ に対して $0 \leq e^{-x} \leq 1$, $x^{s-1} \geq 1$ より

$$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

だから,

$$\int_\varepsilon^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx \leq \int_\varepsilon^1 x^{s-1}\,dx = \frac{1}{s}(1-\varepsilon^s) \leq \frac{1}{s}$$

となる. よって, $\varepsilon \to +0$ とすると $\int_\varepsilon^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する. $s \geq 1$ のとき, $e^{-x}x^{s-1}$ は $x \to +0$ で収束するので広義積分にならない.

2. $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ を考える.

$$x^2\left(e^{-x}x^{s-1}\right) = e^{-x}x^{s+1} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

より系 5.49 から $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束する. □

例 5.50 の積分を s に関する関数とみて次の定義を与える.

定義 5.51 (Γ-関数)**.**

$s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

と定義する. $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を **Γ-関数**という.

例 5.50 の積分に名前がついているのは, 次の性質による.

命題 5.52.

Γ-関数について, 次が成り立つ.

(1) $\Gamma(1) = 1$;
(2) $s > 0$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

命題 5.52 より

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1 = 0!\\ \Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = \Gamma(1) = 1!\\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!\\ \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3!\end{aligned}$$

となるので, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\Gamma(n) = (n-1)!$ となる．つまり, Γ-関数は階乗を $(0, \infty)$ に拡張したものである.

命題 5.52 の証明.

(1) 直接計算により

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$

がわかる.

(2) $M > 0$ に対して部分積分より

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x}x^s\,dx &= [-e^{-x}x^s]_{x=0}^M + s\int_0^M e^{-x}x^{s-1}\,dx\\ &= -e^{-M}M^s + s\int_0^M e^{-x}x^{s-1}\,dx\end{aligned} \tag{5.23}$$

となる．$M \to \infty$ とすれば例 5.31 より $e^{-M}M^s \to 0$ となる．よって, (5.23) で $M \to \infty$ とすれば $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が得られる. □