微分積分学 B 演習問題　(第 1 回)

問題 1.1 (提出課題)**.**
$x_0 \in (a,b)$ に対して, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $x=x_0$ で微分可能であることの定義を述べよ. そして, f の x_0 における微分係数の定義を述べよ.

問題 1.2 (提出課題)**.**
授業動画内の定理 4.2 を写せ.

問題 1.3.
$\dfrac{\sin h}{h}\to 1\ (h\to 0)$ を用いて, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ を微分係数の定義に従って示せ.

問題 1.4.
$(1+h)^{\frac{1}{h}}\to e\ (h\to 0)$ を用いて, $x>0$ に対して $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ を示せ.

問題 1.5.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=x^2$ で定める. $x_0\in\mathbb{R}$ に対して次の問いに答えよ.
(1) f の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ を求めよ.
(2) グラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ における接線の方程式を求めよ.
(3) $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ に対して, $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$ と書いたときの $R(x)$ を求めよ. そして, $R(x)\to 0$ となることを確かめよ.

問題 1.6.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=\sin x$ で定める. $x_0\in\mathbb{R}$ に対して次の問いに答えよ.
(1) f の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ を求めよ.
(2) グラフ $y=f(x)$ の $x=x_0$ における接線の方程式を求めよ.
(3) $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ に対して, $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)(x-x_0)$ と書いたときの $R(x)$ を求めよ. そして, $R(x)\to 0$ となることを確かめよ.

問題 1.7.
$x_0\in\mathbb{R}$ に対して, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x):=|x-x_0|$ で定める. 次の問いに答えよ.
(1) f は $x=x_0$ で連続であることを示せ (ε-δ 論法を使わずに. $f(x)\to f(x_0)\quad(x\to x_0)$ を示せばよい.)
(2) f は $x=x_0$ で微分可能でないことを示せ.

問題 1.8.
a を学生番号の 1 の位とするとき, 曲線 $y=\sqrt{x}$ の点 $(a+1,\sqrt{a+1})$ における接線と法線の方程式を求めよ.

問題 1.9.
楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の点 $(2,1)$ における接線と法線の方程式を求めよ. 次に, a を学生番号の 1 の位, b を学生番号の 10 の位とするとき, $x=a$ としたときの接線の y 座標, $x=b$ としたときの法線の y 座標をそれぞれ求めよ.

問題 1.10.
$(x^n)'=nx^{n-1}\quad(n\in\mathbb{N})$ を微分係数の定義に従って示せ.

微分積分学 B 演習問題　(第 2 回)

問題 2.1 (提出課題)**.**

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$ に対して, 次の公式を述べよ.

(1) 積の微分公式 $(fg)'(x_0)$

(2) 合成関数の微分公式 $\dfrac{d(g \circ f)}{dx}(x_0)$

(3) f が全単射であって, $f'(x_0) \neq 0$ であるとき, 逆関数の微分公式 $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y_0)$

問題 2.2 (提出課題)**.**

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ を示せ.

問題 2.3.

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ は $x_0 \in (a, b)$ で微分可能であるとする. このとき, $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ となることを, 授業の定理 4.2 を用いて示せ (講義ノートを参考にせよ).

問題 2.4.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ は $x_0 \in (a, b)$ で微分可能であるとする. このとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ となることを, 授業の定理 4.2 を用いて示せ (講義ノートを参考にせよ).

問題 2.5.

$(e^{-x^2})'$, $(x^x)'$ を合成関数の微分公式を用いて計算せよ. 微分公式に現れる $f(x)$, $g(y)$ をどのようにとればよいかを説明せよ.

問題 2.6.

$(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\arctan x)'$ を逆関数の微分公式を用いて計算せよ.

問題 2.7.

次の関数を微分せよ.

(1) $\sinh x$

(2) $\cosh x$

(3) $\tanh x$

(4) $\dfrac{1}{\tanh x}$

問題 2.8 (千葉 2014)**.**

関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ について考える.

(1) $f(1)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$ を求めよ (ヒント:部分積分).

問題 2.9 (神奈川 2016)**.**

関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ の導関数を $f'(x)$ とするとき, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ を求めよ.

問題 2.10.

$f, g \in C^1(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ に対して, 積の微分公式

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

を差分を用いずに示せ. つまり授業の定理 4.2 を用いて示せ.

微分積分学 B 演習問題　(第 3 回)

問題 3.1 (提出課題)**.**
　Rolle の定理を述べよ.

問題 3.2 (提出課題)**.**
　微分の平均値の定理を述べよ.

問題 3.3.
　$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ に対し, Rolle の定理を述べよ. そして, 下記の条件のもとで, Rolle の定理の主張をみたす点 ξ を求めよ.

(1) $a = 0,\ b = \pi,\ f(x) = \sin x$
(2) $a = 0,\ b = 1,\ f(x) = x^2 - x + 1$
(3) $a = -2,\ b = 2,\ f(x) = (1 - x^2)^2$

問題 3.4.
　$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ は $f(a) = f(b)$ かつ, ある $c \in (a,b)$ が存在して $f(a) > f(c)$ が成り立つとする. このとき, ある $\xi \in (a,b)$ が存在して, $f'(\xi) = 0$ となることを証明せよ.

問題 3.5.
　$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ に対し, 平均値の定理を述べよ. 次に, $f \in C([0,3]) \cap C^1(0,3)$ を $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x\ (0 \leq x \leq 3)$ と定めたときに, 平均値の定理をみたす点 ξ を求めよ.

問題 3.6 (Cauchy の平均値定理)**.**
　$f, g \in C^1(a,b) \cap C([a,b])$ は $g(a) \neq g(b)$ かつ, すべての $x \in (a,b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. このとき, $a < \theta < b$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

とできることを示せ (ヒント: $\phi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$ とおく. 教科書の定理 4.7 も参考になる)

問題 3.7.
　$f \in C^1(\mathbb{R})$ は導関数が有界, すなわち, ある $K > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \frac{df}{dx}(x) \right| \leq K$$

をみたすとする. このとき, f は Lipschitz 連続であること, すなわち, ある定数 $L > 0$ が存在して, すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

とできることを示せ (ヒント?: 教科書の問題 4.2.1 と同じであるが, 略解には「平均値の定理より明らか」となっている. 証明を書いてみよ).

問題 3.8 (千葉 2014 改)**.**
　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \arctan x$ とおく.

(1) $x > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\left(f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ を計算せよ.
(2) (1) の結果を用いて, $x > 0$ に対して $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ.

問題 3.9.
　$-1 < x < 1$ とする.

(1) $\arcsin x + \arccos x$ の微分を計算せよ.
(2) $\arcsin x + \arccos x$ を求めよ.

微分積分学B 演習問題　(第4回)

問題 4.1 (提出課題)**.**
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ とする. f が $x = c$ で極大であること, 極小であることの定義を述べよ.

問題 4.2 (提出課題)**.**
関数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ に対して, $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ が f の原始関数であることの定義を述べよ.

問題 4.3.
$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して
$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$
を示せ.

問題 4.4 (Young の不等式)**.**
$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする.

(1) $x \geq 0$ に対して, $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ となることを示せ.

(2) 上を利用して, $a, b > 0$ ならば
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.1}$$
を示せ. (4.1) の不等式を **Young の不等式**という. $p = q = 2$ のときは, **相加・相乗の不等式**である (ヒント: (4.1) を b^q でわってみよ. そして, (1) で得られた不等式で x に何を代入すれば (4.1) が得られるのか推察せよ)

問題 4.5.
次の原始関数を求めよ.

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ に対して, x^α, ただし, $x > 0$ の範囲のみで考えてよい.
(2) $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ に対して, $\cos(kx)$
(3) $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ に対して, e^{kx}

問題 4.6.
次の原始関数を求めよ.

(1) $(3x+2)^3$
(2) $\dfrac{1}{(3x-2)^4}$, ただし, $x < 0$ の範囲のみで考えてよい.
(3) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

問題 4.7.
次の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ただし, $-1 < x < 1$ の範囲で考えてよい.
(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$

微分積分学 B 演習問題　(第 5 回)

問題 5.1 (提出課題)**.**
　$[a, b]$ に対する分割と分割の長さの定義を述べよ.

問題 5.2 (提出課題)**.**
　$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対する Riemann 和の定義を述べよ

問題 5.3.
　関数 $f(x) = x$ $(0 \leq x \leq 1)$ に対して, $[0, 1]$ 上の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ を

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{N}, \ldots, x_k = \frac{k}{N}, \ldots, x_N = \frac{N}{N} = 1$$

とおき, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ をみたす ξ_k を $\xi_k = x_{k-1} + \dfrac{1}{2N} = \dfrac{2k-1}{2N}$ で定める. このときの Riemann 和 $R(f; \Delta, , \{\xi_k\}_{k=1}^N)$ を求めよ.

問題 5.4.
　区分求積法を用いて $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示せよ.

問題 5.5.
　区分求積法を用いて $\displaystyle\int_0^2 x^2\, dx$ を求めよ. また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示せよ. ただし, 分割数を N とすること ($2N$ としないこと).

問題 5.6 (x 軸回転体の体積)**.**
　連続な関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0, 1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x = 1$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $\pi \displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\, dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 5.7 (y 軸回転体の体積)**.**
　連続な関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は $x \in [0, 1]$ に対して $f(x) \geq 0$ であるとする. このとき, x 軸, y 軸, $x = 1$, グラフ $y = f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに回転させた回転体の体積が $2\pi \displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$ で表されることを, 区分求積法を用いて説明せよ.

問題 5.8 (神奈川 2016)**.**
　放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

問題 5.9.
　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+2k}{n^2+nk+k^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

微分積分学 B 演習問題 (第 6 回)

問題 6.1 (提出課題)**.**
定理 4.9 の主張を書け.

問題 6.2 (提出課題)**.**
問題 6.1 の記号を用いて, 連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の定積分の定義を述べよ.

問題 6.3.
関数 $f(x)=x$ $(0\le x\le 1)$ に対して, $[0,1]$ 上の分割 $\Delta=\{x_0,\dots,x_N\}$ を

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{N},\dots,x_k=\frac{k}{N},\dots,x_N=\frac{N}{N}=1$$

とおく. f の不足和 $s(f;\Delta)$, 過剰和 $S(f;\Delta)$ をそれぞれ求めよ.

問題 6.4.
関数 $f(x)=x^2$ $(0\le x\le 1)$ に対して, $[0,1]$ 上の分割 $\Delta=\{x_0,\dots,x_N\}$ を

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{N},\dots,x_k=\frac{k}{N},\dots,x_N=\frac{N}{N}=1$$

とおく. f の不足和 $s(f;\Delta)$, 過剰和 $S(f;\Delta)$ をそれぞれ求めよ.

問題 6.5 (台形公式)**.**
$[0,1]$ 上連続な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して, 台形公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}f\left(\frac{k}{N}\right)\right)$$

を証明せよ, 講義ノートの例 4.35 も参照せよ.

問題 6.6.
$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x):=\sin(2\pi x)+2$ $(x\in[0,1])$ で定める. $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}$ を $[0,1]$ の分割とし, xy 座標の点 X_j, A_j をそれぞれ $j=0,1,2,3,4$ に対して

$$X_j=(x_j,0),\quad A_j=(x_j,f(x_j))$$

で定める.

(1) グラフ $y=f(x)$, X_j, A_j を図示せよ.
(2) $j=1,2,3,4$ に対して台形 $X_{j-1}X_jA_jA_{j-1}$ の面積を求め, この 4 つの台形の面積の和 S を求めよ.
(3) $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}$ が $[0,1]$ の 4 等分割であるとき, (2) の S は

$$S=\frac{1}{4}\left\{\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{3}f\left(\frac{k}{4}\right)\right\}$$

となることを確かめよ.

問題 6.7.
$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x):=3x^2$ $(x\in[0,1])$ で定める. $\Delta=\{x_0,\dots,x_N\}$ を $[0,1]$ の N 等分割とする.

(1) f の不足和 $s(f;\Delta)$ 過剰和 $S(f;\Delta)$ を求め, $1-s(f;\Delta)$, $S(f;\Delta)-1$ を求めよ.
(2) D_N を台形公式による近似, すなわち

$$D_N=\frac{1}{N}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}f\left(\frac{k}{N}\right)\right)$$

とおく. このとき, $|1-D_N|$ を計算せよ.

微分積分学 B 演習問題　(第 7 回)

問題 7.1 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数に対する積分の線形性を述べよ.

問題 7.2 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数に対する積分の順序保存性を述べよ.

問題 7.3 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数に対する積分の三角不等式を述べよ.

問題 7.4 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数に対する積分の区間加法性を述べよ.

問題 7.5 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数に対する積分の平均値定理を述べよ.

問題 7.6.
次の積分を計算せよ. 答えは $\frac{22}{7} - \pi$ となるはず.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

問題 7.7.
次の各問いに答えよ.

(1) 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx.$$

(2) $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を計算せよ. さらに電卓を用いることで, 円周率がおよそ 3.14 であることを確かめよ.

問題 7.8.
$n, m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の積分を求めよ (ヒント: 積和公式を用いる. $n = m$ のときに注意せよ).

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx$

問題 7.9.
$f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $a < b$ とする. 次を証明せよ.

(1) (置換積分法) $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\xi)\,d\xi$

(2) (部分積分法) $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$

微分積分学 B 演習問題　(第 8 回)

問題 8.1 (提出課題)**.**
$[a,b]$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の不定積分 F の定義を述べよ.

問題 8.2 (提出課題)**.**
定理 4.13 の主張を書け.

問題 8.3 (提出課題)**.**
定理 4.15 の主張を書け.

問題 8.4.
$H:[-1,1]\to\mathbb{R}$ を $H(x):=\begin{cases}-1, & (-1\le x\le 0),\\ 1, & (0<x\le 1),\end{cases}$ により定める.

(1) $-1\le x\le 1$ に対して, $\displaystyle\int_{-1}^{x} H(\xi)\,d\xi=-1+|x|$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{x} H(\xi)\,d\xi$ は $x=0$ で微分できないことを示せ.

問題 8.5.
次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$　(ヒント: $t=\sin x$ とおくか, それとも $t=\cos x$ とおくか)

(2) $\dfrac{2x^3+3x^2-8x-13}{x^2-4}$　(ヒント: まずは割り算する)

(3) $e^{-x}\sin^2 x$　(ヒント: $\sin^2 x$ に倍角公式)

(4) $\log x$

(5) $\arctan x$

問題 8.6.
次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+2\sqrt{x}}\,dx$　(ヒント: $t=\sqrt{x}$ と置換積分 & 部分積分)

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log(\sqrt{1+x^2})\,dx$　(ヒント: log を微分するように部分積分を行う)

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x}\,dx$　(ヒント: 倍角公式をつかって, 平方根をはずす)

問題 8.7 (埼玉 2016)**.**
関数 $f(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta-\theta+\dfrac{\pi}{4}$　$(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$ について, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ.

問題 8.8 (熊本 2014)**.**
関数

$$y=\frac{\log x+1}{x} \tag{8.2}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 関数 (8.2) の増減, グラフの凹凸を調べ, グラフを書け. 必要ならば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい.

(2) 関数 (8.2) のグラフ, x 軸および直線 $x=p$ $(p>e^{-1})$ で囲まれた部分の面積を S とするとき, 面積 S を p を使った式で表しなさい. また, $S=18$ となるような p の値を求めなさい.

微分積分学B 演習問題　(第9回)

問題 9.1 (提出課題)**.**
$f \in C^2(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ に対し, f の x_0 における第2次微分係数の定義を述べよ.

問題 9.2 (提出課題)**.**
$n \in \mathbb{N}$, $f, g \in C^n(a,b)$ に対して, Leibniz の公式を述べよ.

以下

$$C^\infty(a,b) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R}, f \text{ は } (a,b) \text{ 上で何回でも微分可能 }\}$$

とおく.

問題 9.3.
$\dfrac{1}{x^2+x-6}$ の n 階導関数を求めよ (ヒント:部分分数分解)

問題 9.4.
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

を示せ.

問題 9.5.
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

を示せ.

問題 9.6.
$e^x \sin x$ の n 階導関数を求めよ (ヒント: まず, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{1}{4}\pi\right)$ を示せ).

問題 9.7.
$f, g \in C^\infty(a,b)$ とする. 次の導関数を Leibniz の公式を用いずに計算せよ.

(1) $\dfrac{d^2(fg)}{dx^2}(x) \quad x \in (a,b)$

(2) $\dfrac{d^3(fg)}{dx^3}(x) \quad x \in (a,b)$

(3) $\dfrac{d^4(fg)}{dx^4}(x) \quad x \in (a,b)$

問題 9.8.
次の関数を微分せよ.

(1) x^x

(2) $(x^2+1)^{\frac{p}{2}}$ (p は定数)

(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ は定数)

(4) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$　(神奈川 2016 改)

微分積分学 B 演習問題　(第 10 回)

問題 10.1 (提出課題)**.**

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a,b)$, $x, x_0 \in (a,b)$ に対して, Taylor の定理を述べよ.

問題 10.2 (提出課題)**.**

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(a,b)$, $x, x_0 \in (a,b)$ に対して, Taylor 展開と剰余項に関する定理を述べよ.

問題 10.3 (Taylor の定理)**.**

$n \in \mathbb{N}$ と $f \in C^n(a,b)$, x_0, $x \in (a,b)$ に対して

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt$$

を示せ.

問題 10.4.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ の極限を Taylor 展開を用いて示せ (de l'Hospital の定理を使わないこと).

問題 10.5.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x}$ の極限を Taylor 展開を用いて示せ (de l'Hospital の定理を使わないこと).

問題 10.6.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$ の極限を Taylor 展開を用いて示せ (de l'Hospital の定理を使わないこと).

問題 10.7.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ を求めよ (ヒント: sin の Taylor-Maclaurin 展開を 4 次まで使う).

問題 10.8.

$-1 < x < 1$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\frac{1}{1+x}$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ. すなわち, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + R_n(x) x^n, \quad R_n(x) \to 0 \quad (x \to 0)$$

1 が成り立つときの a_n を求めよ.

(3) 形式的に積分を計算することで, $\log(1 + x)$ の Taylor-Maclaurin 展開を求めよ.

問題 10.9.

$\displaystyle(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)}$ を用いて, $\arctan x$ の Taylor-Maclaurin 展開を (形式的に) 導け.

問題 10.10.

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

を示せ (ヒント: Taylor-Maclaurin 展開を使う).

微分積分学 B 演習問題　(第 11 回)

問題 11.1 (提出課題)**.**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上凸関数であることの定義を述べよ.

問題 11.2 (提出課題)**.**

$f \in C([a,b]) \cap C^1(a,b)$ が $[a,b]$ 上凸関数であることの必要十分条件を一つ述べよ.

問題 11.3 (提出課題)**.**

$p > 1$ と $a, b > 0$ に対して, $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ を示せ.

問題 11.4.

凸関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と, $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$, $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$ に対して, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ならば

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3))$$

となることを示せ (ヒント: まず, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\left(\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{1-\lambda_1}\right)$ と変形してから, 凸関数の定義を用いる. つぎに, $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ に注意して, 定義をもう一度使う).

問題 11.5.

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -\log x \quad (x \in (0,\infty))$ で定義する.

(1) f が $(0,\infty)$ 上の凸関数であることを示せ.

(2) $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して, 相加相乗平均の不等式 $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \le \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ を示せ.

問題 11.6.

$1 < p < \infty$ は定数で, $\dfrac{1}{q} := 1 - \dfrac{1}{p}$ で定数 q を定めるものとする. このとき, $x, y > 0$ に対して Young の不等式

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

を示せ (ヒント: log をとった式に問題 11.5 を使う).

問題 11.7.

$\sqrt{1+x}$ の形式的な Taylor-Maclaurin 展開

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

に対して, a_0 から a_5 を求めよ. さらに $n, k \in \mathbb{N}$ に対して定義されていた二項係数 ${}_nC_k$ を $n > 0$ に対して

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

と拡張することによって何が成り立ちそうかを考えてみよ (ヒント: $(1+x)^n$ を二項係数を用いてどう書けていたかを思い出してみよ).

問題 11.8.

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right)$ (ヒント: $y = \dfrac{1}{x}$ とおく)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

微分積分学 B 演習問題 (第 12 回)

問題 12.1 (提出課題)**.**
$\lim_{x\to 0+0} x^x$ を求めよ.

問題 12.2 (提出課題)**.**
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ を求めよ.

問題 12.3.
de l'Hospital の定理を用いて, 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$

(2) $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} (\sin x)^{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

定義 12.1 (増加・減少の位数を表す記号)**.**
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ と $x_0 \in (a,b)$ に対して $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$ であるとは

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

をみたすことをいう.

例 12.1.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$ だから $x^2 = o(|x|)$ $(x \to 0)$ である. また, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x} = 0$ だから $2x^2 = o(|x|)$ $(x \to 0)$ である. 他方で, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|x|} = \infty$ だから $|x|^{\frac{1}{2}} \neq o(|x|)$ $(x \to 0)$ である.

例 12.2.
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = 0$ だから $x^{\frac{1}{2}} = o(x)$ $(x \to \infty)$ である. 他方で, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \infty$ だから $x^2 \neq o(x)$ $(x \to \infty)$ である.

問題 12.4.
$\alpha > 0$ とする.

(1) $|x|^\beta = o(|x|^\alpha)$ $(x \to 0)$ となるための β の条件を α を用いて表せ.
(2) $x^\beta = o(x^\alpha)$ $(x \to \infty)$ となるための β の条件を α を用いて表せ.

問題 12.5.
$\sin x - x = o(x^\beta)$ $(x \to 0)$ となるための β の条件を求めよ.

問題 12.6.
$\gamma \geq 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \log(1+x)}{|x|^\gamma} = 0$ となる γ の範囲, ならない γ の範囲を求めて, $\sin x \log(1+x) = o(|x|^\gamma)$ $(x \to 0)$ となる γ の条件を求めよ.

微分積分学 B 演習問題　(第 13 回)

問題 13.1 (提出課題)**.**

$(a,b]$ 上連続な関数 $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

問題 13.2 (提出課題)**.**

$[a,\infty)$ 上連続な関数 $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ の定義を述べよ.

問題 13.3 (提出課題)**.**

$[0,\infty)$ 上連続な関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対し, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を述べよ.

問題 13.4 (提出課題)**.**

$[0,\infty)$ 上連続な関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対し, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が条件収束することの定義を述べよ.

問題 13.5 (提出課題)**.**

Γ-関数 $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ の定義を述べよ.

問題 13.6 (提出課題)**.**

Γ を Γ-関数とするとき, $\Gamma(6)$ を求めよ.

微分積分学 B 演習問題 (第 14 回)

問題 14.1.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めよ.

問題 14.2.

$\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めたい.

(1) $\alpha \neq 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のときに $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ を求めよ.

問題 14.3.

$\lambda > 0$ に対して

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda}$$

を考える. $t = \log x$ と変数変換することにより, 次を示せ.

(1) $\lambda \leq 1$ のとき, 広義積分は発散する.

(2) $\lambda > 1$ のとき, 広義積分は収束する.

問題 14.4.

$\alpha, \beta > 0$, $M > 0$ に対して,

$$I_M := \int_0^M e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$$

を考える.

(1) 部分積分を 2 回用いることにより, I_M を M, α, β を用いて表せ.

(2) $M \to \infty$ とすることにより, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$ を求めよ.

問題 14.5.

$\alpha, \beta > 0$ に対して, 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$$

を求めよ.

微分積分学 B 演習問題　(第 15 回)

問題 15.1.

$f : (0,1] \to \mathbb{R}$ は $(0,1]$ 上連続とする.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が絶対収束することの定義を与えよ.

(2) $0 < \lambda < 1$ と $K > 0$ が存在して, すべての $x \in (0,1]$ に対して

$$x^\lambda |f(x)| \leq K$$

を仮定する. このとき, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は絶対収束することを証明せよ.

定理 (正項級数の収束判定法)**.**

$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ は単調減少かつ「すべての $x \geq 1$ に対して, $f(x) > 0$」 であるとする. このとき, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束することと, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$ が収束することは同値である.

問題 15.2.

正項級数の収束判定法を証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$$

であることを示せ (ヒント: グラフを書いてみよ).

(2) $M \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_1^{M+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^M f(k) \leq f(1) + \int_1^{M+1} f(x)\,dx,$$

となることを示せ.

(3) $M \to \infty$ とすることで定理を証明せよ.

問題 15.3 (Riemann の zeta 関数)**.**

$s > 1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ が収束することを示せ (ヒント: $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x^s} & x \geq 1 \end{cases}$ として, 正項級数の収束判定法を用いる).

問題 15.4 (形式的な広義積分の計算)**.**

次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ に対して, $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx} \sin x\,dx$ を t の式で表せ (問題 14.5 も参照せよ).

(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ を求めよ.

(3) 形式的に, 積分の順序を交換して

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-tx} \sin x\,dx \right) dt = \int_0^\infty \sin x \left(\int_0^\infty e^{-tx}\,dt \right) dx$$

と変形することで[1], $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ を求めよ.

---

[1]この変形を実際にやってよいかどうかをきちんと証明するのはかなり難しい (3 年生の解析学 A(Lebesgue 積分論) を使う) が, とりあえず計算してみるという気持ちはとても大切である.

微分積分学 B 補充問題

教員採用試験の過去問題.

問題 16.1 (埼玉 2016)**.**
$a > 0$ とする. 関数 $f(x) = \dfrac{a\cos x}{\sin x - 2}$ $(0 \le x \le \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるような a の値を求めよ.

問題 16.2 (神奈川 2016)**.**
放物線 $y = x^2$ と点 $(-1, 3)$ を通る直線で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.

問題 16.3 (神奈川 2016)**.**
関数 $f(x) = \displaystyle\int_1^e |\log t - x|\, dt$ $(0 < x < 1)$ が最小値をとるときの x の値を求めよ.

問題 16.4 (千葉 2016)**.**
関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}}\, dt$ について考える.

(1) $f(0)$, $f(1)$ を求めよ.
(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における法線の方程式を求めよ.
(3) 曲線 $y = f(x)$ と (2) で求めた直線, および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ.

問題 16.5 (東京 2019 改)**.**
関数 $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + b}$ は $x = 1$ で極大値 2 をとる.

(1) a, b の値を求めよ.
(2) 関数 $y = f(x)$ の増減表を書いて, 極値と変曲点を求めよ.
(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフの変曲点のうち, x 座標が最も大きい点を P とする. 点 P における接線の方程式を求めよ.
(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(x)$ 上の点 P における接線及び y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

微分積分学と曲線.

問題 16.6.
$r, \omega > 0$ に対して,

$$x(t) := r\cos(\omega t), \quad y(t) := r\sin(\omega t) \qquad t > 0$$

により定まる点 $P(x(t), y(t))$ は半径 r の円周上を動く.

(1) 点 P の時刻 t における速さが 1 となるように, ω を r を用いて与えよ.
(2) (1) で求めた ω について, 加速度ベクトル $\vec{\alpha}(t)$ の大きさ $|\vec{\alpha}(t)|$ を求めよ.

問題 16.7.
$r > 0$ は定数とし, 以下で定まるサイクロイド曲線を考える.

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t)$$

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を r, t の式で表せ.
(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を r, t の式で表せ.

問題 16.8.
次の曲線の長さを求めよ.

(1) $r > 0$ に対して

$$x(t) = r(2\pi t - \sin(2\pi t)), \quad y(t) = r(1 - \cos(2\pi t)) \qquad (0 \le t \le 1)$$

で表示されるサイクロイド $(x(t), y(t))$.

(2) 懸垂線 $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (0 \le x \le 1)$. (ヒント: まず, パラメータ表示 $(x(t), y(t))$ がどうなるかを考えよ)

問題 16.9.
$r > 0$ に対して

$$x = r\cos\frac{\theta}{r} \quad y = r\sin\frac{\theta}{r}$$

とおく.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)^2$ を求めよ.

(3) ベクトル $\left(\dfrac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \dfrac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right)$ とベクトル $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ が θ に関係なく直交することを示せ.

(4) $\left(-\dfrac{dy}{d\theta}(\theta), \dfrac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$ は $\left(\dfrac{dx}{d\theta}(\theta), \dfrac{dy}{d\theta}(\theta)\right)$ と直交するので, $\kappa = \kappa(\theta)$ を用いて

$$\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}(\theta), \frac{d^2y}{d\theta^2}(\theta)\right) = \kappa(\theta)\left(-\frac{dy}{d\theta}(\theta), \frac{dx}{d\theta}(\theta)\right)$$

と書ける. $\kappa(\theta)$ を求めよ.

注意.
$\kappa(\theta)$ は曲線の曲がり具合をあらわす量である. この量を曲率という. また, $R = \dfrac{1}{\kappa(\theta)}$ を曲率半径という. 曲率半径は高速道路や鉄道の (急な) カーブに表示されていることがある.

微分.

問題 16.10.
次の関数 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ について, 定義に基づいて $x = 0$ での微分可能性を調べよ.

(1) $f(x) = |x|$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(4) $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

問題 16.11.
$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $xf(x)$ は $x = 0$ で微分可能となることを定義に基づいて示せ.

問題 16.12.

$f = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるとする．このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して合成関数の微分公式

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)$$

を (高校の教科書のように) 差分を用いて説明せよ．このときに, 何に注意しないといけないかを指摘せよ.

問題 16.13.

積の微分公式と合成関数の微分公式から, 商の微分公式

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

を導け.

問題 16.14.

次の関数の微分を逆関数の微分公式を用いて計算せよ.

(1) $\sqrt{x}$ $(x > 0)$

(2) e^x ($y > 0$ に対して $\dfrac{d\log}{dy}(y) = \dfrac{1}{y}$ は用いてよい)

Riemann 積分.

問題 16.15.

区分求積法を用いて $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ を求めよ．また, 有限和がグラフのどの部分に対応しているのかを明示せよ.

問題 16.16.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が有界な単調増加関数であれば, Riemann 下積分と Riemann 上積分が一致することを証明せよ.

問題 16.17.

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を $x \in [0, 1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

で定義する (f を Dirichlet の関数という).

(1) f の $[0, 1]$ 上の Riemann 下積分を求めよ (ヒント: $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ を $[0, 1]$ の分割としたときに $\displaystyle\inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$ がどうなるか考えよ).

(2) f の $[0, 1]$ 上の Riemann 上積分を求めよ.

問題 16.18.

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $x\in[0,1]$ に対して

$$g(x):=\begin{cases}0 & x\text{ が有理数}\\ 1 & x\text{ が無理数}\end{cases}$$

で定義する.

(1) $n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を求めよ.

注意.

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ とならない. 実際, g は Riemann 積分可能でないため, 区分求積法を使うことはできない. また, Riemann 積分を拡張した Lebesgue 積分を考えると, g は Lebesgue 積分可能となり, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=1$ となる.

問題 16.19.

$\phi\in C^1(-1,1)\cap C([-1,1])$ は $\phi(-1)=\phi(1)=0$ とする. $|x|$ は $x=0$ の点で微分できないが, それでも

$$H(x):=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

と定めると, 部分積分の公式

$$-\int_{-1}^{1}|x|\phi'(x)\,dx=\int_{-1}^{1}H(x)\phi(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ.

問題 16.20.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続で, 「すべての $x\in[a,b]$ に対して, $f(x)\geq 0$」かつ「$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=0$」を仮定する.

(1) $f(x_0)>0$ となる $x_0\in[a,b]$ があるとする. このとき, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x\in[a,b]$ に対して, $|x-x_0|<\delta$ ならば $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$ となることを示せ.

(2) 任意の $x\in[a,b]$ に対して, $f(x)=0$ となることを示せ.

問題 16.21.

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ は連続で, $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$ となるが, $f\not\equiv 0$ となる例をあげよ.

問題 16.22 (積分の第二平均値定理)**.**
有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能で, $g \geq 0$ (つまり, すべての $x \in [a,b]$ に対して $g(x) \geq 0$) かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$ とする. このとき, $\displaystyle\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \lambda \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ が存在して

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ (ヒント: $\displaystyle g(x) \inf_{y\in[a,b]} f(y) \leq f(x)g(x) \leq g(x) \sup_{y\in[a,b]} f(y)$ に注意して両辺積分する).

問題 16.23.
$-1 \leq x \leq 1$ に対して不定積分 $\displaystyle F(x) = \int_{-1}^x |\xi|\,d\xi$ を求めよ. 次に F が原点で微分可能であること, すなわち $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ が存在することを示せ.

Taylor の定理.

問題 16.24.
無限回微分可能な関数 $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ に対して中心差分公式

$$\frac{f(h)-f(-h)}{2h} \to f'(0) \quad (h \to 0)$$

を示せ.

問題 16.25.
次の問いに答えよ.

(1) $-1 < x < 1$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\arctan x$ に注意して $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k\,dx$ を求めよ.

(3) 形式的な計算 (積分と極限の交換や, $x = \pm 1$ でも実は等式が成立すること) を認めることにして,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

を導け.