微分積分学B 中間試験 (3・4限)

2023年11月16日 第3時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい．答えのみを書くこと.

(1) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で微分可能であることの定義を述べなさい.

(2) $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，Rolle の定理を述べなさい.

(3) $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，(微分の) 平均値の定理を述べなさい.

(4) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ と $c \in I$ に対し，f が $x = c$ で極大であることの定義を述べなさい.

(5) $(x^2 + 1)^3$ の導関数を求めなさい.

(6) $a > 0$ に対して，$\sqrt{a^2 - x^2}$ の導関数を求めなさい.

学生番号　　　　　　名前

(7) $x > 0$ に対して, $x^{\sin x}$ の導関数を求めなさい.

(8) $x \arcsin x$ の導関数を求めなさい.

(9) $\dfrac{\sin x}{x}$ の第二次導関数を求めなさい.

(10) $a, b > 0$ に対し, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ を求めなさい.

(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めなさい.

(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^x$ を求めなさい.

(13) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x\log(\tan x)$ を求めなさい.

(14) $e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_4 を求めなさい.

(15) $\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_3 を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 **2.**

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{2\log(1+3x) - 6x + 9x^2 - 18x^3}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めたい.

(1) $\log(1+3x)$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開を x の 4 次の項まで,

$$\log(1+3x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + x^4 B(x)$$

の形で答えなさい (答えのみでよい).

(2) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開を x の 4 次の項まで,

$$\cos x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + x^4 \tilde{B}(x)$$

の形で答えなさい (答えのみでよい).

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{2\log(1+3x) - 6x + 9x^2 - 18x^3}$ を **de l'Hospital** の定理を用いずに求めなさい.

学生番号　　　　　　名前

問題 3.

$p > 1$ と $a, b > 0$ に対して, $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ を示したい．次の問いに答えなさい.

(1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの定義を述べなさい.

(2) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) = x^p$ で定める．f が $(0, \infty)$ 上凸関数であることを示しなさい.

(3) $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ を示しなさい.

問題 4.

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上微分可能な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は $c \in I$ で最小になるとする．このとき，$f'(c) = 0$ を示しなさい．

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．