微分積分学B 追試験

2023年12月21日 第5時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.

問題 1.

次の問いに答えなさい. 答えのみを書くこと.

(1) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $x = a \in I$ で微分可能であることの定義を述べなさい.

(2) $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し, Rolle の定理を述べなさい.

(3) $[a, b]$ 上連続, (a, b) 上微分可能な $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し, (微分の) 平均値の定理を述べなさい.

(4) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ と $c \in I$ に対し, f が $x = c$ で極小であることの定義を述べなさい.

(5) $(\cos^3 x + 1)^5$ の導関数を求めなさい (展開はしなくてよい).

(6) $\sqrt[4]{x^4 + 1}$ の導関数を求めなさい.

学生番号　　　　　名前

(7) $(\cos x)^{\sin x}$ の導関数を求めなさい.

(8) $x^2 \arctan x$ の導関数を求めなさい.

(9) $\dfrac{\cos x}{x}$ の第二次導関数を求めなさい.

(10) $a, b > 0$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}$ を求めなさい.

(11) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$ を求めなさい.

(12) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\sin x}$ を求めなさい.

(13) 極限 $\lim_{x\to 0+0} \tan x(\log x)^2$ を求めなさい.

(14) $\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + x^4 B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_4 を求めなさい.

(15) $\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 B(x)$ と書いたときに，$B(x) \to 0$ $(x \to 0)$ となるとき，a_3 を求めなさい.

この下は計算用紙として利用してよい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．

問題 2.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)e^x - x - x^2}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するための $\alpha > 0$ の条件を求めたい.

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を x の 2 次の項まで,

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 B(x)$$

の形で答えなさい (答えのみでよい).

(2) $\sin x$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を x の 3 次の項まで,

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x^3 \tilde{B}(x)$$

の形で答えなさい (答えのみでよい).

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)e^x - x - x^2}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するための α の値とそのときの極限値を **de l'Hospital の定理**を用いずに求めなさい.

学生番号　　　　　　　名前

問題 3.

$a, b > 0$ に対して, $ab \leq \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$ を示したい．次の問いに答えなさい.

(1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの定義を述べなさい.

(2) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) = -\log x$ で定める．f が $(0, \infty)$ 上凸関数であることを示しなさい.

(3) $ab \leq \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$ を示しなさい.

問題 4.

$x^2|x|$ が $x=0$ で 2 回微分可能であることを示したい.

(1) $x \neq 0$ に対して，$x^2|x|$ の第一次導関数を求めなさい.

(2) 定義に従って，$x^2|x|$ が $x=0$ で微分可能であることを示しなさい.

(3) 定義に従って，$x^2|x|$ が $x=0$ で 2 回微分可能であることを示しなさい.

以下は計算用紙として利用してよい．採点には一切利用しない．