数学総合研究　　2012 年 4 月 11 日

問題 1.1.
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式を示せ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n + \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

問題 1.2 (縮小写像の原理)**.**
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ に対して, ある $0 \le C < 1$ が存在して

$$|a_{n+1} - a_n| \le C|a_n - a_{n-1}|, \qquad \forall n \ge 2$$

を仮定する. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ.

注意.
縮小写像の原理は数列に限らず, 一般に距離空間で成立する. この結果は微分方程式の解の存在を示すためにとても重要な事実である.

問題 1.3.
(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_n$, かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ を仮定する. このとき, 次の不等式を示せ.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le b.$$

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が有界, すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|a_n| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

とする. このとき, このとき, 次の不等式を示せ.

$$-C \le \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \le C.$$

注意.
上極限, 下極限は収束するかわからない数列の極限を調べるために非常に有用である. 問題中で数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束性がわからないことに注意せよ.

問題 1.4.
(X, d) を距離空間とする. 集合 $U \subset X$ が開集合であるとは $\forall x \in U$ に対して, $\varepsilon > 0$ が存在して

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$$

が成り立つことであり, $F \subset X$ が閉集合であるとは, $X \setminus F$ が開集合であることであった. $F \subset X$ に対して, 次が同値であることを示せ.

(1) F は閉集合;
(2) 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ が

$$x_n \to x \ \ (n \to \infty) \quad X \text{ の距離で}$$

をみたせば, $x \in F$.

注意.

集合が閉集合というのは, 極限に対して「閉じている」ことがゆえんである. 開集合を示すことが難しいときに, 補集合を考えて閉集合を示すことが簡単となる場合がよくある.

問題 1.5.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束するが絶対収束しないことを示せ.

問題 1.6.

(1) 問題 1.1 において, 等号は成立しない例を挙げ, なぜ例となるかを説明せよ.

(2) 問題 1.2 において, $C=1$ では成立しない. 反例を挙げよ.

(3) $n\in\mathbb{N}$ に対して $F_n\subset\mathbb{R}^2$ は閉集合だが $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ が閉集合とならない例を作れ.

数学総合研究　　2012年4月18日

問題 2.1.
$f \in C(\mathbb{R}^2)$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq \lambda\}$, $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \lambda\}$ が閉集合となることを示せ.

注意.
$\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \lambda\}$ は関数 f の高さ λ の等高面集合という. また, $f^{-1}((\lambda, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \lambda\}$ は super level set(直訳するなら優等高面集合) といい, Lebesgue 積分を理解するうえで重要である.

問題 2.2.
次の極限を求めよ. ただし, ロピタルの原理を使ってもよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{|x|}$.
(3) $a \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}$.
(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} xe^{-x}$.

問題 2.3.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$ と $f : I \to \mathbb{R}$ に対し, 以下は同値であることを示せ.

(1) f が $x_0 \in I$ で連続
(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ が

$$a_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$$

をみたすならば

$$f(a_n) \to f(x_0) \quad (n \to \infty).$$

問題 2.4.
(X, d) を距離空間, $f : X \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき, 任意の開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a, b)) \subset X$ は開集合となることを示せ.

注意.
位相空間での関数の連続の定義はこの問題の結果から (ほぼ) 従うことに注意せよ. 位相空間では, 問題 2.3 によって連続性を定義しようとすると, 問題 2.4 によって定めた連続性と同値にならない.

問題 2.5.
$(X, \mathscr{O})$ を位相空間, $K \subset X$ をコンパクト, $F \subset K$ を X の位相で閉集合とする. このとき, F もコンパクトであることを示せ.

注意.
X は距離空間ではないので, 有界という概念はない. とくに有界閉集合だからといってコンパクトであるとは限らない. なお, 距離空間でコンパクトな集合上の点列からは収束する部分列が取り出せる. この収束部分列が取り出せることは非常に重要である, 解析学においては極限操作を頻繁に行うが, コンパクト性を用いることで極限操作の正当化をするのである.

問題 2.6.

以下の例を作れ. 理由も書くこと.

(1) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ は連続だが一様連続でない例を作れ.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で一様連続なものを作れ.

注意.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続ならば一様連続である. だから, $(0,1)$ 上の連続関数 f が 0 や 1 で連続に拡張できるならば, 一様連続になってしまう.

数学総合研究　　2012 年 4 月 25 日

問題 3.1.

次の導関数を求めよ.

(1) $\log \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1-x}$.

(2) $\log\left(\tan \dfrac{x}{2}\right)$.

(3) $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(4) $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

注意.

sinh は双曲線正弦関数 (ハイパボリックサイン), cosh は双曲線余弦関数 (ハイパボリックコサイン) という. $\sin hx$ や $\cos hx$ ではないことに注意. また, tanh などについても sin や cos のときと同様にして定義される.

問題 3.2 (Taylor 展開と円周率の近似計算)**.**

次を示せ.

(1) $-1 < x < 1$ に対して

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

を示せ.

(2) Abel の定理に注意して

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

を導け.

注意.

この計算で円周率を計算できるが, 収束がとても遅い. $n = 1000$ くらいまで計算しても, 3.14 程度しか正しくない. 興味がある人はパソコンを使って計算してみよ.

問題 3.3 (中心差分)**.**

次を示せ.

(1) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

となることを示せ.

(2) $f \in C^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

となることを示せ.

注意.

微分の定義を用いるよりも, 中心差分を用いた方が (計算機を用いたときに) 計算が早いことが知られている.

問題 3.4.

$f \in C^1((0,1))$ とする. 次が同値であることを示せ.

(1) ある定数 $K > 0$ が存在して $|f'(x)| \leq K$ が $x \in (0,1)$ で成り立つ.

(2) f は Lipschitz 連続である. すなわち, ある定数 $K \geq 0$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

が任意の $x, y \in (0,1)$ で成り立つ.

問題 3.5.

$1 < p, q < \infty$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすととする.

(1) 任意の $x \geq 0$ に対して

$$\frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x \geq 0$$

を示せ.

(2) $a, b > 0$ に対して, Young の不等式

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

を示せ.

注意.

$p = q = 2$ のとき, Young の不等式はいわゆる「相加相乗の不等式」である.

問題 3.6.

次の例を作れ

(1) f は $(-1,1)$ 上の C^1 関数であるが C^2 関数でない.

(2) f は $(-1,1)$ 上の C^∞ 関数であるが, 原点で Taylor 展開できない.

(3) f は $(-1,1)$ 上の Lipschitz 関数であるが, C^1 関数ではない.

注意.

実は Lipschitz 連続な関数は**殆んど至るところ微分可能**である. この**殆んど至るところ微分可能**の意味は Lebesgue 積分論であらわれる. 雰囲気だけ説明すると, 面積が 0 の集合を除けば微分ができるという意味である.

数学総合研究　　2012 年 5 月 9 日

問題 4.1.

2 変数関数

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える.

(1) 任意の方向 $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ に関して方向微分可能であることを示せ.

(2) f は全微分可能でないことを示せ. (ヒント: $a \neq 0$ について曲線 $y = ax^2$ に沿った微分を考える)

注意.

この問題から, 任意の方向に方向微分可能であっても全微分可能とは限らないことがわかる.

問題 4.2.

2 変数関数

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.

(2) f が C^2 級でないことを確かめよ.

問題 4.3 (3 次元極座標変換における Jacobi 行列式)**.**

$x = r\cos\theta\cos\phi$, $y = r\cos\theta\sin\phi$, $z = r\sin\theta$ とおいたときに, Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ を計算せよ.

問題 4.4.

$x^2 + y^2 = 1$ のときに $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ.

問題 4.5.

$f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$|f(x+y) - f(x)| \leq \left| \int_0^1 |\nabla f(x+ty) \cdot y| \, dt \right|$$

を示せ (ヒント: $(0,1)$ 区間上で $f(x+ty)$ を t について微分して積分してみよ).

注意.

ベクトル値関数において, 平均値の定理は等号で成立しない (各成分において, 存在する点が異なる場合がある). しかし, 大抵の場合は等号が必要なわけでなく, 問題のように評価ができればよい. この問題の評価はベクトル値関数であっても (右辺を少し修正すれば) 成立することに注意せよ.

問題 4.6.

$u:(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ は滑らかで, 熱方程式をみたすとする, すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(t,x,y)=0 \tag{4.1}$$

をみたすとする. このとき, $\nabla u:=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2(t,x,y)&-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\nabla u|^2(t,x,y)\\&+2\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right)=0\end{aligned}$$

となることを示せ. (ヒント: (4.1) を x で微分してから, $2\dfrac{\partial u}{\partial x}$ をかけて整理する. y についても同様に計算してたしあわせてみよ)

注意.

問題 4.6 は熱方程式に対する Bochner の公式と呼ばれている. Bochner の公式は調和写像や調和写像熱流などにも適用できるため, 非常に有用な方法である.

数学総合研究　　2012 年 5 月 16 日

$M_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 値 n 次正方行列のなす集合とする.

問題 5.1.

次の問題に答えよ

(1) 次の行列 A の逆行列を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \\ -y + 2z - w = 2 \\ -z + w = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ.

問題 5.2.

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$[A, B] := AB - BA$$

とおく. 次を示せ.

(1) $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ に対して $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.
(2) $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ に対して $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

注意.

(1) で A は微分をあらわしていて B, C が関数だと考えてみると, 積の微分公式を表しているとみることができる. 実際に $[\cdot, \cdot]$ は微分と関係が深く, 多様体におけるベクトル場の Lie 微分である.

問題 5.3.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ が歪対称行列であるとは, ${}^tA = -A$ が成り立つことをいう. 任意の正方行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ は対称行列と歪対称行列の和であらわせることを示せ. (ヒント: もし, 書けたとしたらどうなるかを考えてみよ)

問題 5.4.

次の行列の行列式を計算せよ

(1) 問題 5.1 における行列 A.
(2) $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\vec{x} \otimes \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3x_3 \end{pmatrix}$$

注意.

問題 5.4 の (2) に現れる $\vec{x} \otimes \vec{x}$ はテンソル行列ということがある．なお, $\mathbb{R}^3$ でなく $\mathbb{R}^n$ でも同じ結果が得られる (考えてみよ).

問題 5.5.

$A \in M_n(\mathbb{Z})$ とする．すなわち, 係数が整数の n 次正方行列とする．このとき, 以下が同値となることを示せ. (ヒント: Cramer の公式を用いる)

(1) A^{-1} が存在して $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$;

(2) $\det A = \pm 1$.

問題 5.6.

3 次元ユニタリ行列 U で, 非自明であり (単位行列とか, 単位行列の成分の符号を替えただけのものはダメ)$\det U = 1$ となるものを作れ.

数学総合研究　　2012 年 5 月 23 日

問題 6.1.
$\mathbb{R}$ 値 n 次正方行列のなす集合 $M_n(\mathbb{R})$ は線形空間であることを示し, 基底を一つ与えよ.

注意.
実は $M_n(\mathbb{R})$ はトレースを使うことで内積が入り, 計量線形空間になる.

問題 6.2.
$\mathbb{C}[X]$ を複素数係数の X を変数とする多項式全体のなす集合とする. この部分集合

$$\{f \in \mathbb{C}[X] : f \text{ は } 3 \text{ 次の多項式}\}$$

は線形空間であることを示し, 基底を一つ求めよ.

注意.
$R[X]$ も同様に実数係数多項式環として定義されるが, どちらかというと $\mathbb{Z}[X]$ や $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ の方が重要. $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ は同様の議論で線形空間になることがわかる. $\mathbb{Z}[X]$ は $\mathbb{Z}$ が環になっているため $\mathbb{Z}$-加群になるが, $\mathbb{Z}$ が体でないから線形空間にはならない.

問題 6.3.
V, W を線形空間とし, $T : V \to W$ を線形写像とする. このとき $\operatorname{Ker} T \subset V$ と $\operatorname{Im} T \subset W$ が線形部分空間となることを示せ.

注意.
群や環に対する準同型写像を知っているなら, この問題と同様の結果が群や環に対して成り立つことを確かめてみよ. 実際, 線形代数学で学んだ種々の結果は, 適当な翻訳をすることで群や環についても成り立つ.

問題 6.4.
線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 6x + 5y + 4z \\ -x - y - z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

で与える. このとき $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ の基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

に関する表現行列を求めて, T のランクを求めよ.

注意.
T のランクはある基底の表現行列のランクで定めるが, これは基底の取り方によらずに定まる. 行列に関するトレース, 行列式, ランクなどは, そのまま線型写像にも定義される. これらの値は基底の取り方に寄らないことが重要である. 基底の取り替え行列や行列の対角化も復習してみること. これらは基底を取り替えたときにどのように計算できるかを考えている.

問題 6.5.

次のベクトルの組は線形独立か否かを定義に基づいて調べよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

注意.

係数体を K とする線形空間 V とその元 $a_1, \ldots, a_k \in V$ に対して, $\{a_1, \ldots, a_k\}$ が線形独立であるとは, $\forall c_1, \ldots, c_k \in K$ に対して,

$$c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k = 0 \Longrightarrow (c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0)$$

となることをいう. 線形独立でないことを線形従属という. すなわち, $\exists c_1, \ldots, c_k \in K$ が存在して,

$$c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k = 0 \text{ かつ } (c_1, \ldots, c_k) \neq (0, \ldots, 0)$$

となるときに, $\{a_1, \ldots, a_k\}$ は線形従属であるという. $(c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0)$ となるか否かを確かめるためには, 対応する行列の行列式やランクを調べればよいのだが, そのことと定義との関係はきちんと理解しておくべきである.

問題 6.6.

V を (有限次元) 線形空間とする. 線形写像 $T : V \to V$ について以下が同値であることを示せ. (ヒント: 次元公式を使う)

(1) T は単射

(2) T は全射

注意.

この問題でわざわざ有限次元と仮定をおいたのは, この問題の同値性が無限次元線形空間では一般に成立しないからである. 無限次元線形空間においては, 次元公式が成立せず (無限に対する等号の意味付けを定めていないため), 有限次元における基底の存在が証明できない. ただし, この問題における結果, とくに単射から全射性が示せることは無限次元線形空間においても非常に重要で, どのような線形写像について, この性質が成立するための十分条件が知られている.

数学総合研究　　2012 年 5 月 30 日

問題 7.1.

次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^y \log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_3^y \frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \quad (y \geq 3$ としてよい$)$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$

問題 7.2 (Gamma 関数)**.**

$s>0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

とおく.

(1) Γ を定める広義積分が収束することを示せ.

(2) $s>0$ に対して, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ を示せ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\Gamma(n+1)$ を求めよ.

注意.

Γ を Gamma 関数という. $n!$ の拡張であり, 代数学, 特に数論においても重要である.

問題 7.3.

次を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty$$

注意.

この例は, 広義積分においては, Lebesgue 積分が Riemann 積分の拡張とはなっていないことを示している. Lebesgue 積分可能であれば, 絶対可積分 (絶対値をつけた関数が可積分) になる.

問題 7.4 (Jensen の不等式)**.**

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ は有界な閉区間, $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ は開区間とし, $\phi \in C^2(\alpha,\beta)$ は凸関数とする. $f \in C([a,b])$ が $f([a,b]) \subset (\alpha,\beta)$ をみたすとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))\,dx.$$

問題 7.5 (やや難)**.**

$I=(a,b) \subset \mathbb{R}$ は開区間とし, I 上の滑らかな関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を考える. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ に (a,b) 上広義一様収束するとは, 任意の閉区間 $[c,d] \subset (a,b)$ に対して

$$f_n \to f \quad (n\to\infty)\ [c,d] \text{ 上一様収束}$$

が成り立つときをいう.

(1) $a < x_0 < b$ を一つとって固定し, $F_n(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$, $F(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ とおく. このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に (a, b) 上広義一様収束するならば

$$F_n \to F, \quad (a, b) \text{ 上広義一様収束} \quad (n \to \infty)$$

を示せ (ヒント: 一様収束における積分と極限の交換の証明をまねてみよ).

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に (a, b) 上各点収束し, $\left\{\frac{df_n}{dt}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は連続関数 $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ に (a, b) 上広義一様収束するとする. このとき, f は微分可能であって,

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dt}(t) \quad (a < t < b)$$

が成り立つことを示せ (ヒント: これも, 一様収束における微分と極限の交換に関する証明をまねてみよ).

問題 7.6.

以下について, 具体例を挙げて説明せよ.

(1) $(0, 1)$ 区間上で Riemann 積分できない関数の例を挙げよ.

(2) $(0, 1)$ 区間上の連続な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ に各点収束するが,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \not\to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n \to \infty)$$

数学総合研究(第 1 回小テスト)　　2012 年 6 月 6 日

問題 8.1, 8.2 は必答. 問題 8.3 以降から 2 問選択して解答すること.

問題 8.1.

次の問題に答えよ.

(1) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ を x について微分せよ.

(2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log(x^2 + y^2)$ を求めよ.

問題 8.2.

次の行列 $A \in M_3(\mathbb{R})$ に対して, $\det A$ と逆行列 A^{-1} を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 8.3.

集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 集合の上極限を

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$$

で定義する. ある集合 B が存在して, $A_n \subset B$ が成り立つとき $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset B$ を示せ (ヒント: 問題 1.3 と証明の方針はだいたい同じ).

問題 8.4.

$x \in (0, 1)$ に対して, $\sin \dfrac{\pi}{x}$ は $(0, 1)$ 区間上で一様連続でないことを示せ.

問題 8.5.

$-1 < x < 1$ に対して, $\log(1 + x)$ の原点を中心とする Taylor 展開を求めよ.

問題 8.6.

Lagrange の未定乗数法を用いて, 周の長さが 6 の三角形の面積を最大値を求め, その三角形の形状を決定せよ (ヒント: ヘロンの公式より, 三角形の辺の長さを x, y, z とおくと, 面積の 2 乗は $3(3 - x)(3 - y)(3 - z)$ と書ける).

問題 8.7.

$A \in M_n(\mathbb{R})$, I は単位行列とする. 次を示せ.

(1) $A^k = I$ となる $k \in \mathbb{N}$ があれば, A は正則である.
(2) $A^2 = A$, $A \neq I$ であれば, A は正則でない.
(3) $A^k = 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ があれば, A は正則でない. このような行列を冪零行列という.
(4) A が冪零行列ならば, $I \pm A$ は正則である.

問題 8.8.

$T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を線形写像とする. このとき, ある行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が存在して

$$T(X) = \mathrm{tr}(AX) \quad X \in M_n(\mathbb{R})$$

が成り立つことを示せ (ヒント: X として行列単位を考えてみよ. 単位行列ではない).

数学総合研究　　2012 年 6 月 13 日

問題 9.1.

次の各問いに答えよ.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続とする. 次の累次積分の順序を交換せよ.

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(2) $a, b > 0$ に対して,

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}} (x^2+y^2)\,dxdy$$

を求めよ (ヒント: 変数変換 $\Phi : (r,\theta) \in [0,1]\times[-\pi,\pi] \to (x,y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$ を考えよ).

問題 9.2.

次の積分を求めよ (ヒント: 1 変数で計算しようとするとできなくはないがとても面倒. 二重積分をうまく使うと簡単に計算できる).

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

問題 9.3.

次の積分が収束する $s \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ (ヒント: 極座標の変数変換をしてみよ).

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^3 : |x|\le 1\}} |x|^s\,dx$$

問題 9.4.

$W = (0,1)\times(0,1)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $W_n := (\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}) \times (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$, $U_n := (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \times (\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n})$ は単調に増加する集合列 ($W_n \subset W_{n+1}$, $U_n \subset U_{n+1}$) であり,

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

をみたすことを示せ.

(2) 次の積分を求めよ.

$$\iint_{\overline{W_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy, \qquad \iint_{\overline{U_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy.$$

(3) $\iint_W \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ は収束しない, すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{W_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy \ne \lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{U_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

を示せ.

問題 9.5 (Schwarz の不等式)**.**
$D \subset \mathbb{R}^n$ を有界な閉集合, $f, g : D \to \mathbb{R}$ を連続とするとき,

$$\left(\int_D |fg| \, dx \right)^2 \leq \left(\int_D f^2 \, dx \right) \left(\int_D g^2 \, dx \right)$$

を示せ.

注意.
Schwarz の不等式は, 次の Hölder の不等式に拡張される. ただし, $p, q \geq 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたす指数とする. $p = q = 2$ としたときが Schwarz の不等式である.

$$\left(\int_D |fg| \, dx \right) \leq \left(\int_D |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

問題 9.6 (スケール変換)**.**
$1 < p < 3$ に対して, p にのみ依存する定数 $C > 0$ が存在して, 任意の滑らかな可積分関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

となる $q \geq 1$ がとれることが知られている. $\lambda > 0$ に対して, 変数変換 $y = \lambda x$ を考えることにより, p, q にどのような条件が必要か考察せよ.

注意.
問題 9.6 の不等式は Sobolev の不等式といい, 偏微分方程式論をはじめ, 多くの研究で重要となる不等式である. 証明方法も様々で, この不等式自身からも面白い研究が数多く得られている.

数学総合研究　　2012 年 6 月 20 日

問題 10.1.
$\mathbb{R}^3$ における二つの基底

$$\left\{\vec{e}_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ \left\{\vec{f}_1 := \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

を考える.

(1) 基底の取り替え $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \to \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ の行列 P を求めよ.

(2) 基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ に関する $\mathbb{R}^3$ 上の線型写像 T の表現行列が

$$A := \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\-1 & 0 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

であるときに, 基底 $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ に関する T の表現行列 G を求めよ.

問題 10.2.
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{R}_n[X] := \{c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n : c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{R}$ 上の線形空間になる. $f, g \in \mathbb{R}_n[X]$ に対して

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

と定めると, $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は $\mathbb{R}_n[X]$ 上の内積を定めることを示せ.

注意.
$\mathbb{R}_n[X]$ に制限したのは, 線形空間が有限次元であるためだけで, 実際は無限次元でもよい. 例えば, 連続関数のなす空間 $C([-1,1])$ とか, Lebesgue 空間 $L^2(-1,1)$ でも同様に証明ができる. ただし, $(f,f)_{L^2} = 0$ となるときに $f = 0$ となることには若干の注意が必要となる.

問題 10.3.
$\mathbb{R}^3$ における基底

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

から Schmidt の直交化法によって正規直交基底を作れ.

問題 10.4.
V を (有限次元) 計量線形空間とし, $W, W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とする. このとき, 次を示せ.

(1) $(W^\perp)^\perp = W$;

(2) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

(3) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

注意.

無限次元の線形空間の場合, W が閉部分空間であるときに, 同様の証明ができる. つまり, 位相の条件がないと, 無限次元では一般に等号は成立しない.

問題 10.5.

$K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし, V を K 上の (有限次元) 線形空間とする. 線型写像 $f : V \to K$ を V 上の線形汎関数という.

$$V^* := \{f : V \text{ 上の線形汎関数 }\}$$

とおく. V^* を双対空間 (英語では dual space) という

(1) $f, g \in V^*$, $c \in K$ に対して, 和 $f + g$ とスカラー倍 cf を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) := cf(x) \quad (x \in V)$$

で定めると, V^* は線形空間となることを示せ.

(2) V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に対して, $e_j^* \in V^*$ を

$$e_j^*(e_i) := \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

で定める. e_j^* が well-defined であることと, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ が V^* 上の基底になることを示せ. この, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ の双対基底という.

注意.

このことから, (有限次元線形空間では) もとの空間と双対空間の次元が一致する. 問題中の well-defined は, 基底の行き先だけを決めただけで, すべての元の行き先が決まっていることを示すことである.

問題 10.6 (問題 10.5 の続き, 難しいがとても重要)**.**

問題 10.5 の記号をそのまま用いる.

(1) T を V 上の線形写像とする. V^* 上の線形写像 T^* を

$$T^*(f)(x) := f(Tx), \quad x \in V,\ f \in V^*$$

によって定める. このとき, T^* の基底 $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ に関する表現行列は, T の基底 $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ に関する表現行列の転置行列であることを示せ.

(2) $x \in V$ に対して, $x' \in (V^*)^*$ を

$$x'(f) := f(x) \quad (f \in V^*)$$

で定める. このとき $V \ni x \mapsto x' \in (V^*)^*$ は同型写像になることを示せ.

注意.

$V \cong (V^*)^+$ は有限次元であることから成立する重要な結果である. 無限次元では一般にこのことは成立しない.

問題 10.7 (問題 10.5 の続き)**.**

V を計量線形空間とする. このとき V と V^* が同型であることを示せ.

注意.

この結果は Riesz の表現定理として, 無限次元空間でも成立する.

数学総合研究　　2012 年 6 月 27 日

問題 11.1.
次の行列は対角化可能である．対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 11.2 (埼玉大院 '12)**.**
次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ．
(2) 行列 A は対角化可能でないことを示せ．

問題 11.3.
次の行列を対角化せよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

注意.
実対称行列は, 常に対角化可能です．任意の行列が対称行列と歪対称行列に分解できることから,「対称行列は対角化できて, 比較的都合がよい」と「歪対称行列は対角化できないことがあって, 都合がよいとは限らない」ことがわかります．

問題 11.4.
$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_A(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

とおく．

(1) $a_0 = (-1)^n \det A$ を示せ．
(2) $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$ を示せ．ただし, 代数学の基本定理を用いてよい．

注意.
この計算からとくに, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を重複を込めた A の固有値とすると

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n, \quad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

となります．これは, 幾何学での主曲率, Gauss 曲率, 平均曲率と関係があります．

問題 11.5.
A を実数値 n 次実対称行列とする．

(1) A の固有値は実数となることを示せ．
(2) ある定数 $c \in \mathbb{R}$ がとれて, $(Ax, x) \geq c\|x\|^2$ が成り立つとき, A の固有値は c 以上となることを示せ．

(3) さらに A が正定値対称行列とする． $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $B(x,y) := (Ax, y)$ により $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定める．$B(x,y)$ が内積となることを示せ.

注意.

(2) の仮定より強く, $c > 0$ がとれて, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(Ax, x) \geq c\|x\|^2$ が成り立つとき, この行列 A は非退化といいます．さらに, A が正定値対称行列のときは, A が非退化であることが示せます.

問題 11.6.

複素数値 n 次正方行列 A が何乗かして零行列になるとき, すなわち $A^k = 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ があるとき, A を冪零行列という．次の 3 条件が同値であることを示せ.

(1) A が冪零行列.

(2) $A^n = 0$.

(3) A の固有値はすべて 0.

数学総合研究　　2012 年 7 月 4 日

問題 12.1.
次の行列を unitary 行列によって対角化せよ．ただし, 問題 11.3 の計算結果はそのまま使ってよい.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 12.2 (12.1 の続き)**.**
行列 A は問題 12.1 で与えたものとする.

(1) 行列 A のスペクトル分解を求めよ.
(2) $\sqrt{A}$ を求めよ.

問題 12.3.
次の二次形式を標準形に変換し, 符号を決定せよ.

(1) $F(x,y,z) = xy + xz + yz.$
(2) $F(x,y,z,w) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - w^2 + 2xz + 2xw + 4yz + 2yw.$

問題 12.4.
A を正定値 Hermite 行列とし, A のスペクトル分解を

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

と書く．このとき,

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1} P_1 + \cdots + \lambda_k^{-1} P_k$$

となることを示せ.

注意.
一般に滑らかな関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $f(A) := f(\lambda_1)P_1 + \ldots f(\lambda_n)P_n$ と定義することができる．これを使うと, 行列に対する計算が実数に対する計算とだいたい同じようにして計算できる.

問題 12.5 (少し訂正)**.**
$\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ と $P \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, 次が同値となることを示せ.

(1) $P^2 = P$ かつ P は Hermite 行列.
(2) P は $\mathbb{C}^n$ のある部分空間への射影.

問題 12.6.
$A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, ${}^tAA$ は半正定値対称行列であることを示せ.

注意.
これは, Riemann 幾何学における Riemann 計量に関係がある．特に $\sqrt{\det({}^tAA)}$ は空間の拡大率をあらわしている．そこで, 多変数関数の積分の変数変換を $x = \varphi(y)$ と変換したときに $dx = \sqrt{\det({}^t(D\varphi)D\varphi)}dy$ で与えることがある.

問題 12.7.

次の行列の Jordan 標準形と変換行列を求めよ (問題 11.2 を参照).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 12.8 (おまけ問題, 書いてくれれば得点つけます)**.**

この講義の感想, とくに問題の難易度, 授業の進め方と成績の付け方に関して感想を述べよ.

数学総合研究 (第 2 回小テスト)　　2012 年 7 月 10 日

問題 13.1, 13.2 は必答. 問題 13.3 以降から 2 問以上選択して解答すること.

問題 13.1 (答えのみでよい)**.**

$s > 0$ とする. $s = 1$ のときは注意しながら次の問題に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ が収束する s の条件を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ が収束する s の条件を求めよ.

問題 13.2 (答えのみでよい)**.**

次の $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ から Schmidt の直交化法によって, 正規直交基底を作れ.

$$\left\{ \vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

問題 13.3 (円周率の近似計算)**.**

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \le \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$$

を示し, $3.141 \le \pi \le 3.142$ を示せ (ヒント: 積分を計算してみよ).

問題 13.4 (合成積の性質)**.**

$\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$$

とおく. ただし, 定数 $C > 0$ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \eta(x)\,dx = 1$ となるように定める. さらに, 連続な可積分関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\eta * f(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \eta(x-y) f(y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

とおく (合成積という).

(1) $|x| > 1$ に対して, $f(x) = 0$ とする. このとき, $|x| > 2$ に対して $\eta * f(x) = 0$ を示せ.

(2) $\lambda > 0$ と $x \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\eta_\lambda(x) := \lambda^3 \eta(\lambda x)$ とおく. このとき, f が $\mathbb{R}^3$ 上一様連続ならば, $x \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\eta_\lambda * f(x) \to f(x) \quad (\lambda \to \infty)$$

を示せ.

問題 13.5 (有限次元線形空間の回帰性)**.**
　V を有限次元ベクトル空間とし, $x \in V$ に対して, $x' \in (V^*)^*$ を

$$x'(f) := f(x) \quad (f \in V^*)$$

で定める. $T : V \to (V^*)^*$ を

$$Tx := x' \quad (x \in V)$$

で定める.

(1) T が線形写像になることを示せ.
(2) T が全単射であることを示せ.
(3) T^{-1} が定義できるが, T^{-1} も線形写像となることを示せ.

問題 13.6 (固有値と固有ベクトル)**.**
　次の行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 13.7 (正則行列の極分解)**.**
　$A \in GL(n, \mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X \text{ は正則 }\}$ とおく.

(1) $S := {}^tAA$ は正値対称行列であることを示せ.
(2) $O := (\sqrt{S})^{-1}A$ は直交行列であることを示せ ($A = \sqrt{S}O$ を正則行列の極分解という).

問題 13.8 (群論が得意な人向け)**.**
　$GL(n, \mathbb{R})$ は積を演算とする群になる (問題 13.7 に注意). $GL(n, \mathbb{R})$ を一般線形群という. さらに

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : \det X = 1\}$$

とおくと, $SL(n, \mathbb{R})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の正規部分群になる (特殊線形群という). さて, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{R}$ の掛け算を演算とする群とするときに

$$GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^* \quad (\text{群同型})$$

を示せ.

問題 13.9 (微分方程式と Gronwall の不等式)**.**
　滑らかな関数 f, g, $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が微分不等式

$$\frac{dx}{dt}(t) \le f(t) + g(t)x(t) \quad (t > 0)$$

をみたすとする.

(1) $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(x(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)\right) \le f(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)$ を示せ (ヒント: 左辺の微分を計算してみよ).
(2) $\displaystyle x(t) \le x(0)\exp\left(\int_0^t g(s)\,ds\right) + \exp\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^t \left\{f(\tau)\exp\left(-\int_0^\tau g(s)\,ds\right)\right\} d\tau$ が $t > 0$ に対して成り立つことを示せ.