数学総合演習 (実数と数列, 関数の極限)

問題 1.1.

$a, b \in \mathbb{R}$ は $a < b$ をみたすとする.

(1) $\sup[a, b)$ を求めよ. 定義に基づいて証明も書くこと.
(2) $\inf[a, b)$ を求めよ. 定義に基づいて証明も書くこと.

ヒント: $\alpha = \sup A$ の定義は次の 2 条件をみたすことである.

1. すべての $a \in A$ に対して, $a \leq \alpha$ が成り立つ.
2. すべての $\varepsilon > 0$ にたいして, ある $a_0 \in A$ が存在して, $\alpha - \varepsilon < a_0$ が成り立つ.

証明が難しいのは 2. の方である. (1) の証明でも難しいのは 2. を示すことであるが, 数直線に b, $b - \varepsilon$ を書いてみよ. b と $b - \varepsilon$ の中点の値は何か？

問題 1.2.

次の各問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \dfrac{2n-3}{n+1}$ とおく. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. つぎに ε-N 論法を用いて証明を書け.
(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $b_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ とおく. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{n^3}$ を求めよ. つぎに ε-N 論法を用いて証明を書け.

ヒント: まずは高校の頃のやりかたでよいから, 極限を求めてみよ. その次に (1) では $|a_n - a|$ (極限を a とする), (2) では $|\frac{b_n}{n^3} - b|$ (極限を b とする) を計算してみよ.

問題 1.3.

実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に収束するとは

$$|c_n - c| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 a, b に収束するとき, 次を示せ.

(1) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a + b$ に収束する.
(2) $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束する.

ヒント: この問題については, ε-N 論法を用いなくてもよい. (1) は $|(a_n + b_n) - (a + b)|$, (2) では $|a_n b_n - ab|$ を調べる必要がある.

問題 1.4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^2$ で定める.

(1) f が $x = 1$ で連続となることを示せ.
(2) f が $x = -2$ で連続となることを示せ.

ヒント: (1) では $|f(x) - f(1)|$, (2) では $|f(x) - f(-2)|$ をそれぞれ計算する. (1) では $|f(x) - f(1)| = |x+1||x-1|$ と変形すれば, あとは, $|x + 1|$ をどう処理すればよいかという問題になる. $|x - 1| < \frac{1}{2}$ であれば, $|x| < 2$ となるから, $|x + 1| \leq |x| + 1 < 3$ という不等式が作れる. これらを組み合わせて, ε-δ 論法で証明を書いてみよ.

問題 1.5.

次の各問いに答えよ.

(1) 方程式 $x^3 + x - 1 = 0$ は実数解を持つことを示せ.

(2) 方程式 $x^5 + x^3 + 1 = 0$ は実数解を持つことを示せ.

ヒント: (1) では $x := 0$ を左辺に代入すれば, 左辺が負であることがわかり, x がうんと大きいときは, 左辺は正になるだろうから, 中間値の定理を使えば, 実数解の存在が証明できる. x をいくつにすれば, 左辺が正となるか調べてみよ. (2) では $x := 0$ を左辺に代入すると, 左辺が正になるから (1) と逆のことをすればよい.

数学総合演習 (ベクトルと行列, 行列式)

問題 2.1.

座標空間上に 3 点 $A(1,-1,2)$, $B(2,2,1)$, $C(0,2,4)$ をとる.

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(2) 平面 ABC に直交し, 原点を通る直線の方程式を求めよ.

問題 2.2.

A, B を二次実数値行列とする.

(1) $AB \neq BA$ となる A, B の例を一組あげよ.

(2) $AB = O$ だが $A \neq O$ かつ $B \neq O$ となる A, B の例を一組あげよ.

問題 2.3.

次の行列に逆行列があれば求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

問題 2.4.

次の一次方程式系を解け.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \qquad + x_5 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

問題 2.5.

次の行列式を求めよ.

(1) $\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

数学総合演習 (一変数の微積分)

問題 3.1.

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(x^2+1)^3$
(2) $\sqrt{1+x^2}$
(3) $\cos x \sin^2 x$
(4) $x^{\sin x}$

問題 3.2.

次の各問いに答えよ.

(1) $\arctan x = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ.
(2) 媒介変数表示された楕円 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ $(-\pi < \theta < \pi)$ の $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ における微分係数を求めよ.

問題 3.3.

次の各問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ を求めよ.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ.

問題 3.4.

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$
(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(4x)\cos(3x)\,dx$
(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\,dx$ (ヒント: $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく)
(4) $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$, ただし, $R>0$ は正の定数.

問題 3.5.

区分求積法を用いて, 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ (ヒント: $t = \sqrt{x^2+1}+1$ とおくと積分が求められる)

問題 3.6.

正の定数 $\alpha > 0$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するか否かを場合分けし, 収束する場合はその値を求めよ.

数学総合演習 (線形空間と線形写像)

問題 4.1.

次のベクトルの組は線形独立かどうか答えよ．ただし, a は学生番号の 1 の位, b は学生番号の 10 の位とする．

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 4.2.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 E を考える．E が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示したい．次の問いに答えよ．

$$E = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) E は線形独立になることを示せ.

(2) すべてのベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ は E の線形結合で書けることを示せ.

問題 4.3.

$\mathbb{R}^3$ の基底 E, F を次で定める．

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad F = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

基底の取り替え $E \to F$ の行列 P を求めよ.

問題 4.4.

次の集合が部分空間になるかどうか答えよ．ただし, a は学生番号の 10 の位, b は学生番号の 1 の位とする．

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, az = 0 \right\}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \\ z \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R} \right\}$

問題 4.5.

$\mathbb{R}^4$ 上 W_1, W_2 が直和かどうか答えよ.

(1) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問題 4.6.

$\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + 2y + z \\ y - 3z \end{pmatrix}$$

の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対する表現行列 A を求めよ.

問題 4.7 (まとめテストで出します)**.**

平面上に「7 本の線のすべてが互いに直角に交わるように」7 本の直線を書くことはできません. その理由を説明しなさい. キーワードとして, **基底**, **次元**を用いること. なお, この問題の元ネタは

「しわ寄せはいつも技術者に来る」「笑えるどころか胃が痛くなってきた」
エンジニアの苦悩を描いた動画に世界中が共感

`http://nlab.itmedia.co.jp/nl/articles/1404/07/news118.html`

にあります.

数学総合演習 (多変数の微積分)

問題 5.1.

次の関数 f について, 二階導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ.

(1) $\log(x^2+y^2)$
(2) $e^{-x^2+y^2}$

問題 5.2.

次の各問いに答えよ (ヒント: ヘロンの公式を用いる).

(1) 周の長さが 3 の三角形で面積最大となるものを Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ
(2) 面積が 3 となる三角形で周の長さが最小となるものを Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ.

問題 5.3.

次の定積分の積分範囲を図示し, 定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{\{0\le y\le 1-x,\, 0\le x\le 1\}}(x^2+y^2)\,dxdy$
(2) $\displaystyle\iint_{\{0\le y\le \sqrt{1-x^2},\, -1\le x\le 1\}}x^2y\,dxdy$

問題 5.4.

次の各問いに答えよ.

(1) 空間の極座標変換

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta$$

について, ヤコビアン J を求めよ.

(2) 上記結果を利用して, 半径 R の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ となることを示せ.

問題 5.5.

複素関数 $f=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ が正則であるための条件は Cauchy-Riemann の方程式

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

をみたすことであった. 次の複素関数が正則であるかどうか調べよ.

(1) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$
(2) $f(z)=|z|^2=\sqrt{x^2+y^2}$

数学総合演習 (計量線形空間と固有値)

問題 6.1.

次の各問いに答えよ.

(1) 座標空間上の 3 点 $O(0,0,0)$, $A(1,-1,2)$, $B(2,2,1)$ に対して, $\cos\angle AOB$ を求め, 三角形 OAB の面積を求めよ.

(2) 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問題 6.2.

シュミッドの直交化により, 次のベクトルの組を直交化させよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, ただし, a は学生番号の 1 の位とせよ.

問題 6.3.

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{tr}\,A$, $\det A$ を求めよ.

(2) A の固有値を求め, 対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

問題 6.4.

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ について, 固有値は 3,−4,12 である. 次の問いに答えよ.

(1) 適当な正則行列 P で対角化せよ.

(2) 適当な直交行列 U で対角化せよ.

問題 6.5.

次の 2 次形式の符号を求めよ.

(1) $2x^2 - 3y^2 + z^2 + 2xy + 4yz$

(2) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 6xy - 4xz + 8xw - 2yz + 4zw$

数学総合演習 第 1 回小テスト (実数と数列, 関数の極限)

問題 A.1.
$\sup[0,2)$ を求めよ．定義に基づいて証明も書くこと．

問題 A.2.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$ を求めよ．つぎに ε-N 論法を用いて証明を書け.

問題 A.3.
実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に収束するとは

$$|c_n - c| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 a, b に収束するとき, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a - b$ に収束することを示せ．なお, この問題については, ε-N 論法を用いなくてもよい.

問題 A.4.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := 2x^2 + 1$ で定める．f が $x = -3$ で連続となることを示せ.

問題 A.5.
方程式 $-x^3 + x + 1 = 0$ は実数解を持つことを示せ.

問題 A.6 (余裕のある人は挑戦してみよ)**.**
実数 $0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ とおく.

(1) a_n をシグマ記号 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ を用いずに表せ.

(2) a_n が収束することを示せ．なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

数学総合演習 第 1 回再テスト (実数と数列, 関数の極限)

問題 A.1.

$\sup(-3, 5]$ を求めよ．定義に基づいて証明も書くこと．

問題 A.2.

$0 < r < 1$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := r^n$ とおく．$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．つぎに ε-N 論法を用いて証明を書け．なお, log は使わないこと．また, $x > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

は証明抜きに使ってよい．

問題 A.3.

実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に収束するとは

$$|c_n - c| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 a, b に収束するとする．

(1) $(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)$ を計算せよ．

(2) $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ab に収束することを示せ．ただし, ε-N 論法を用いなくてもよいが, **収束数列が有界列となることは用いないこと．**

問題 A.4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := x^3$ で定める．f が $x = 1$ で連続となることを示せ．

問題 A.5.

方程式 $x^4 - 3x + 1 = 0$ は実数解を持つことを示せ．

数学総合演習 第2回小テスト (ベクトルと行列, 行列式)

問題 B.1.

座標空間上に3点 $A(1,-2,1)$, $B(1,1,2)$, $C(1,3,4)$ をとる. O を原点とする.

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(2) 三角錐 $OABC$ の体積を求めよ.

問題 B.2.

二次実数値行列 A で $A^2 = O$ だが $A \neq O$ となる A の例を一組あげよ.

問題 B.3.

次の行列に逆行列があれば求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 B.4.

次の一次方程式系を解け.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad - 2x_5 = 1 \end{cases}$$

問題 B.5.

次の行列式を求めよ.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 B.6 (余裕のある人はやってみよ)**.**

$x \in \mathbb{R}$ に対し, 次の行列式を因数分解せよ.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

数学総合演習 第 2 回再テスト (ベクトルと行列, 行列式)

問題 B.1.

座標空間上に 3 点 $A(1,1,1)$, $B(2,-3,2)$, $C(0,2,-4)$ をとる. O を原点とする.

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(2) 三角錐 $OABC$ の体積を求めよ.

問題 B.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, n 次実数値行列 A は「ある $k \in \mathbb{N}$ に対して $A^k = O$」をみたすとする. このとき, A は正則行列でないことを示せ.

問題 B.3.

次の行列に逆行列があれば求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 B.4.

次の一次方程式系を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 + 2x_5 = -2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}-2x_4} + x_5 = 1 \end{cases}$$

問題 B.5.

次の行列式を求めよ.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

数学総合演習 第3回小テスト (一変数の微積分)

問題 C.1.

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(2) $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$

問題 C.2.

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x}{x^4}$ を求めよ.

問題 C.3.

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

問題 C.4.

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ.

問題 C.5.

正の定数 $a > 0$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ を定義に基づいて計算せよ.

問題 C.6 (余裕のある人は挑戦してみよ)**.**

半径 r の円を底面とする高さ h の円錐の体積が $\dfrac{1}{3}h\pi r^2$ となることを証明せよ.

数学総合演習 第 3 回再テスト (一変数の微積分)

問題 C.1.

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\log(\log x)$

(2) $(\sin x)^{\sin x}$

問題 C.2.

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2 + \frac{1}{3}x^4}{x^6}$ を求めよ.

問題 C.3.

次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

問題 C.4.

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}$ を求めよ.

問題 C.5.

次の各問いに答えよ. なお, $x \geq 1$ に対して, 不等式

$$\log x \leq x^{\frac{3}{2}}(1+x^2)$$

が成り立つことは証明抜きに認めてよい.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ が収束することを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ が収束することを示せ.

数学総合演習 第 4 回小テスト (線形空間と線形写像)

問題 D.1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形独立であることの定義を答えよ.

(2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形従属であることの定義を答えよ.

(3) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ が線形独立になるかどうか, 定義に基づいて証明を与えよ.

問題 D.2.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 E が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

$$E = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 D.3.

次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 D.4.

次の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になるかどうか, 証明をつけて答えよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \right\}$$

問題 D.5.

$\mathbb{R}^3$ 上の次の線形部分空間 W_1, W_2 が直和になるかどうか, 証明をつけて答えよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 D.6.

$\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x+z\\3x-y+2z\\x-3y\end{pmatrix}$$

の基底 $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ に対する表現行列 A を求めよ.

数学総合演習 第 4 回再テスト (線形空間と線形写像)

問題 D.1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ が線形独立になるかどうか, 定義に基づいて証明を与えよ.

(2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \neq 0$ とする. このとき, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が線形独立であることを示せ.

問題 D.2.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 E が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

$$E = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 D.3.

次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 D.4.

次の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になるかどうか, 証明をつけて答えよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w \right\}$$

問題 D.5.

$\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x+2z\\3x+y+2z\\x-y\end{pmatrix}$$

の基底 $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ に対する表現行列 A を求めよ.

数学総合演習 第 5 回小テスト (多変数の微積分)

問題 E.1.

三変数関数 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して, 二階偏導関数 f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} を求めよ. また, $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ となることをたしかめよ.

問題 E.2.

$x^2+y^2=1$ のとき, $f(x,y)=x^2+2xy+4y^2$ の最大値を求めよ.

問題 E.3.

次の定積分の積分範囲を図示し, 定積分の値を求めよ.

$$\iint_{\{x\geq 0, y\geq 0, 2x+y\leq 2\}} xy^2\,dxdy$$

問題 E.4.

次の各問いに答えよ.

(1) 平面の極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

について, ヤコビアン J を求めよ.

(2) 上記結果を利用して, $r>0$ に対して

$$\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq \sqrt{r^2-x^2}, -r\leq x\leq r\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

を求めよ.

問題 E.5.

複素関数 $f(z) = x^4-6x^2y^2+y^4+5+i(4x^3y-4xy^3)$ $(z=x+iy)$ が正則であるかどうか調べよ.

問題 E.6.

次の等式が成り立つように $c>0$ の値を決めよ (ヒント: この問題が多変数の微積分の問題にあることはなぜかを考える必要がある. 問題 E.4 を用いるとよい).

$$c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 1$$

数学総合演習 第5回再テスト (多変数の微積分)

問題 E.1.

三変数関数 $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ に対して, Hesse 行列式 $\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$ を求めよ.

問題 E.2.

楕円 $4x^2+9y^2=36$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ の最大値を求めよ.

問題 E.3.

次の定積分の積分範囲を図示し, 積分の順序を交換せよ. そして, 定積分の値を求めよ

$$\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} x^2y\,dx\right)\,dy$$

問題 E.4.

次の広義積分の値を求めよ. ただし, 収束性は示さなくてもよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

問題 E.5.

$z=x+iy\in\mathbb{C}$ に対して, 複素関数 $f(z)=\operatorname{Im}z$ が正則であるかどうか調べよ.

数学総合演習 第6回小テスト (計量線形空間と固有値)

問題 F.1.

次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して, $\sin\theta$ を求めよ.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

問題 F.2.

シュミッドの直交化により, 次のベクトルの組 E を直交化させることで, $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

$$E = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$F = \left\langle \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 F.3.

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角化可能かどうかを答え, 対角化可能ならば, 対角化する正則行列 P を求めよ.

問題 F.4.

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ を適当な直交行列 U で対角化せよ.

問題 F.5.

次の2次形式 $2x^2 - 3y^2 + z^2 + 2xy + 4yz$ の符号を求めよ. 正の符号の数を p, 負の符号の数を q として (p, q) の形で答えよ.

問題 F.6.

A を対称行列とするとき, A の固有値は実数となることを示せ.

数学総合演習 第6回再テスト (計量線形空間と固有値)

問題 F.1.

次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して, $\sin\theta$ を求めよ.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問題 F.2.

シュミッドの直交化により, 次のベクトルの組 E を直交化させることで, $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

$$E = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 F.3.

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ -4 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角化可能かどうかを答え, 対角化可能ならば, 対角化する正則行列 P を求めよ.

問題 F.4.

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を適当な直交行列 U で対角化せよ.

問題 F.5.

次の2次形式 $2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xy - 4xz$ の符号を求めよ. 正の符号の数を p, 負の符号の数を q として (p, q) の形で答えよ.

数学総合演習 第 1 回まとめテスト

問題 1 は全問について答えよ．微積の問題 (問題 2, 3) から一問以上, 代幾の問題 (問題 3, 4) から一問以上答えよ．

問題 1.

次の各問いに答えよ．ただし, **答えのみでよい．部分点は出さないので, 計算ミスに注意すること．** (一問 12 点)

(1) $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$ を求めよ．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $b_n := \sum_{k=1}^{n} k$ とおく．$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ．

(3) 次の行列に逆行列があれば求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

(4) 次の一次方程式系を解け．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \quad = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

(5) 次の行列式を求めよ．

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ の導関数を求めよ．

(7) 極限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ を求めよ．

(8) 定積分 $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$ を求めよ．

(9) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ．

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(10) $\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + z \\ 3x - y + 2z \\ x - 3y \end{pmatrix}$$

の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対する表現行列 A を求めよ．

問題 2 (微積, 40 点)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \dfrac{2n-3}{n+1}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法を用いて証明を書け.

問題 3 (微積, 40 点)**.**

正の定数 $\alpha > 0$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するか否かを定義に基づいて場合分けし, 収束する場合はその値を求めよ.

問題 4 (代幾, 40 点)**.**

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ が線形独立になるかどうか, 定義に基づいて証明を与えよ.

問題 5 (代幾, 40 点)**.**

平面上に「7 本の線のすべてが互いに直角に交わるように」7 本の直線を書くことはできません. その理由を説明しなさい. キーワードとして, 基底, 次元を用いること.

数学総合演習 第 1 回まとめテスト 追テスト

問題 1 は全問について答えよ. 微積の問題 (問題 2, 3) から一問以上, 代幾の問題 (問題 3, 4) から一問以上答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみでよい. 部分点は出さないので, 計算ミスに注意すること.** (一問 12 点)

(1) $\inf\{x \in \mathbb{Q} : x^3 \geq 5\}$ を求めよ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $b_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^3}$ を求めよ.

(3) 次の行列に逆行列があれば求めよ.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(4) 次の一次方程式系を解け.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(5) 次の行列式を求めよ.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(6) $a > 0$ に対して, $(1+a)^x$ の導関数を求めよ (ヒント: 対数を使う).

(7) 数列 $a_n = n\{(1+a)^{\frac{1}{n}} - 1\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ について, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ (ヒント: $\dfrac{1}{n} = h$ とおきかえる).

(8) $a > 0$ に対して, 不定積分 $\displaystyle\int_0^x (1+a)^y \, dy$ を求めよ.

(9) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(10) $\mathbb{R}^3$ の線形変換

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - z \\ 3x + y + 2z \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

の基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対する表現行列 A を求めよ.

問題 2 (微積, 40 点)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n := \dfrac{3n-2}{2n+1}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求め, ε-N 論法を用いて証明を書け.

問題 3 (微積, 40 点)**.**

正の定数 $\alpha > 0$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するか否かを定義に基づいて場合分けし, 収束する場合はその値を求めよ.

問題 4 (代幾, 40 点)**.**

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形独立になるかどうか, 定義に基づいて証明を与えよ.

問題 5 (代幾, 40 点)**.**

線形写像 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対して次で定義する.

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) := 7x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4.$$

さらに $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と定める.

(1) $\operatorname{Ker} T := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$ が $\mathbb{R}^4$ 上の線形部分空間となることを示せ.

(2) v_1, v_2, v_3 は $\operatorname{Ker} T$ の基底となることを示せ.

数学総合演習 第 2 回まとめテスト

問題 1, 問題 6 は全員が答えよ．微積の問題 (問題 2, 3) から一問以上, 代幾の問題 (問題 3, 4) から一問以上答えよ．

問題 1.

次の各問いに答えよ．ただし, **答えのみでよい．部分点は出さないので, 計算ミスに注意すること．** (一問 12 点)

(1) $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ に対して, 関数 $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ を考える．

(a) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ．

(b) $f_{xx} + f_{yy} + 2f_{xy}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_{\{0 \le y \le 2-x,\, 0 \le x \le 2\}} (x^2 + 3y)\, dxdy$ を求めよ．

(3) 平面の極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

について, ヤコビアン J を求めよ．

(4) 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 $0 \le \theta \le \pi$ に対して, $\cos\theta$ を求めよ．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(5) 行列 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ．

(a) $\det H$ を求めよ．

(b) $\operatorname{tr} H$ を求めよ．

(c) H の固有値を求めよ．

(d) H を対角化する正則行列 P を求めよ．

(e) H を対角化する直交行列 U を求めよ．

問題 2 (微積, 40 点)**.**

次の各問いに答えよ．

(1) 空間の極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

について, ヤコビアン J を求めよ．

(2) 上記結果を利用して, 半径 R の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ となることを示せ．

問題 3 (微積, 40 点)**.**

$x^2 + y^2 = 1$ のとき, $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値を求めよ．

問題 4 (代幾, 40 点)**.**
　$\mathbb{R}^3$ における基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

から Schmidt の直交化法によって正規直交基底を作れ.

問題 5 (代幾, 40 点)**.**
　次の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ.
(2) 行列 A は対角化可能でないことを示せ.

問題 6 (40 点)**.**
　次の各問いに答えよ.

(1) 高校までの数学と大学の数学がどう違うと思ったか. 感じたことを述べよ.
(2) 「大学で数学を学ぶこと」は, 社会でどのように役立つだろうか. 感じることを述べよ. なお, **「大学の数学が社会でどのように役立つか？」という質問ではないこと**に注意すること.
(3) この講義では, 「数学ができるようになること」よりも「講義にきちんと出席して, 少しづつでもよいから毎週勉強すること」と「自分の都合が悪いことをきちんとメールで伝えること」ができるようになることを目標に講義を行いました. この講義を受講して, 感じたことを述べよ.