複素関数論序論 中間試験問題

2015 年 11 月 27 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 , 問題 4, 問題 5 から 2 題以上を選択して計算過程も含めて答えよ. 以下, i は虚数単位とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $\mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}\right)$ を計算せよ.

(2) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $(2z^3+3i)^4$ を z について微分せよ.

(4) $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ としたときに, 次の関数は $\mathbb{C}$ 上正則になるかどうかを判定せよ.

(a) $\mathrm{Im}\, z$

(b) $(x^2-y^2-2x+3)+(2xy-2y)i$

(c) $(2x^2-2y^2-x+1)+(4xy+y)i$

(d) $|z|^2$

(5) $u(x,y) = x^2-y^2$ を実部に持ち, $f(0) = 0$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(6) 次の巾級数の収束半径を求めよ.

(a) $0!+1!z+2!z+3!z^3+\cdots+n!z^n+\cdots$

(b) $1-z+\frac{1}{2^2}z^2-\frac{1}{3^2}z^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n^2}z^n+\cdots$

(7) $z \in \mathbb{C}$ に対して, e^z の定義を述べよ.

(8) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\cos z$ の定義を述べよ.

(9) Euler の公式を述べよ.

(10) $\mathrm{Log}(e^z) = z$ とならない $z \in \mathbb{C}$ の例を挙げよ.

(11) $\mathrm{Log}((-1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+i))$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) $\dfrac{243}{2}$

(2) $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(3) $24z^2(2z^3+3i)^3$

(4) (a) 正則でない.

(b) 正則.

(c) 正則でない.

(d) 正則でない.

(5) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$

(6) (a) 0

(b) 1

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$

(9) $z \in \mathbb{C}$ に対して $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(10) $3\pi i$

(11) $2\log 2 - \dfrac{1}{2}\pi i$

問題 2.

$\theta, \eta \in \mathbb{R}$ とする．以下について，高校数学の教科書に書かれている内容のみで答えよ．

(1) $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\eta + i\sin\eta) = \cos(\theta+\eta) + i\sin(\theta+\eta)$ を示せ.

(2) $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\eta + i\sin\eta} = \cos(\theta-\eta) + i\sin(\theta-\eta)$ を示せ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，de Moivre の公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

を示せ.

問題 3.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合，$f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : D \to \mathbb{C} \quad (z = x+iy \in D)$ を D 上正則とする.

(1) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ となることを示せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ を示せ.

問題 4.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ とする.

(1) $\cos z = u(x,y) + iv(x,y)$ と書くとき，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めよ．ただし，sinh, cosh を用いてはいけない.

(2) $\cos z$ が $\mathbb{C}$ 上 Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを証明せよ.

問題 5.

$z, w \in \mathbb{C}$ とする．なお，Euler の公式を用いてよい.

(1) $\cos z$, $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$ を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

複素関数論序論 中間試験 追試験問題 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 , 問題 4, 問題 5 から 2 題以上を選択して計算過程も含めて答えよ. 以下, i は虚数単位とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**.

(1) $\mathrm{Im}\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}\right)$ を計算せよ.

(2) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $(3z^3+2i)^5$ を z について微分せよ.

(4) $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ としたときに, 次の関数は $\mathbb{C}$ 上正則になるかどうかを判定せよ.

(a) $\mathrm{Re}\, z$

(b) $3x^2-3y^2+3x+2+(6xy-3y)i$

(c) $2x^2-4x-2y^2+(2xy+4y+5)i$

(d) $|z|^2\overline{z}$

(5) $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \frac{1}{\rho} \quad (n\to\infty)$ のとき, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{3n}$ の収束半径を求めよ

(6) 次の巾級数の収束半径を求めよ.

(a) $1+z+2z+3z^3+\cdots+nz^n+\cdots$

(b) $a, b, c > 0$ に対して,

$$1+\frac{ab}{1c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3c(c+1)(c+2)}z^3+\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)b(b+1)(b+2)(b+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c(c+1)(c+2)(c+3)}z^3\cdots$$

(7) $z \in \mathbb{C}$ に対して, e^z の定義を述べよ.

(8) $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\sin z$ の定義を述べよ.

(9) Euler の公式を述べよ.

(10) $\mathrm{Log}(e^z) = z$ とならない $z \in \mathbb{C}$ の例を挙げよ.

(11) $\mathrm{Log}((-1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+i))$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\theta, \eta \in \mathbb{R}$ とする．以下について，高校数学の教科書に書かれている内容のみで答えよ．

(1) $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\eta + i\sin\eta) = \cos(\theta+\eta) + i\sin(\theta+\eta)$ を示せ.

(2) $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\eta + i\sin\eta} = \cos(\theta-\eta) + i\sin(\theta-\eta)$ を示せ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，de Moivre の公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

を示せ.

問題 3.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合，$f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : D \to \mathbb{C} \quad (z = x+iy \in D)$ を D 上正則とする．ただし，u, v は実数値関数である．

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}$$

とおく.

(1) f が正則であることと $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ が同値であることを示せ．さらに，このとき $f' = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ となることを示せ.

(2) 次を示せ.

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$$

問題 4.

$z = x+iy \in \mathbb{C}$ とする.

(1) $\sin z = u(x,y) + iv(x,y)$ と書くとき，実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めよ．ただし，sinh, cosh を用いてはいけない.

(2) $\sin z$ が $\mathbb{C}$ 上 Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを証明せよ.

問題 5.

$z, w \in \mathbb{C}$ とする．なお，Euler の公式を用いてよい.

(1) $\cos z$, $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$ を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.