複素関数論序論 期末試験問題

2016 年 1 月 29 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 , 問題 4, 問題 5 から 2 題以上を選択して計算過程も含めて答えよ. 以下, i は虚数単位とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**. 以下, 向きを指定されていない複素積分については, 正の向きにとるものとする.

(1) 曲線 $C : t + it^2$ $(t : 0 \to 2)$ について, 複素積分 $\displaystyle\int_C (z+3)\,dz$ を求めよ.

(2) $r > 0$ に対して, 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}} \mathrm{Re}\,z\,dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}} ze^{2z}\,dz$ を求めよ.

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z-i|=1\}} \frac{dz}{(z^2+1)(z-5)}$ を求めよ.

(5) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}} \frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{(z-1)^3}\,dz$ を求めよ.

(6) $\dfrac{1}{z(z-2)}$ の $z = 1$ を中心とする Taylor 展開を $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{2}\}$ 上で求めよ.

(7) $\dfrac{z+1}{\cos z}$ の $z = 0$ を中心とする Taylor 展開を z^4 の項まで求めよ. 答えは $a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots$ の形で答えよ.

(8) $\dfrac{1}{z^3-z^2}$ の $z = 0$ を中心とする Laurent 展開を $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ 上で求めよ.

(9) $\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$ の $z = 0$ を中心とする Laurent 展開を z^0 の項まで求めよ.

(10) $\dfrac{1}{z\sin z}$ の $z = 0$ を中心とする Laurent 展開を z^0 の項まで求めよ.

(11) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}} \frac{z-3}{z^3+5z^2}\,dz$ を求めよ.

(12) $\dfrac{e^z}{(z-2)^3}$ の極とその点における留数を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

略解

問題 1

(1) $20i$

(2) $i\pi r^2$

(3) 0

(4) $-\dfrac{\pi}{26}(5+i)$

(5) $-\dfrac{\pi^3}{4}i$

(6) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n}$

(7) $1+z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2}z^3+\dfrac{5}{24}z^4+\cdots$

(8) $-\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty}z^n$

(9) $-\dfrac{3}{5}z^{-2}+\dfrac{8}{25}z^{-1}-\dfrac{8}{125}+\cdots$

(10) $z^{-2}+\dfrac{1}{6}+\cdots$

(11) $\dfrac{16\pi i}{25}$

(12) $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z}{(z-2)^3}\,;\,2\right]=\dfrac{e^2}{2}$

問題 2

(2), (3) ともに $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

問題 3

$\dfrac{\pi}{2}$

問題 4

(1), (3) ともに $\dfrac{\pi}{a}e^{-a}$

問題 2.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ を求めたい. 次の問いに答えよ.

(1) $R > 1$ に対して, 積分路 C_1, C_2 を

$$C_1 : t \qquad (t : -R \to R)$$
$$C_2 : Re^{i\theta} \qquad (\theta : 0 \to \pi)$$

とおく. 積分路 $C_1 + C_2$ を図示せよ.

(2) (1) の C_1, C_2 に対して, 複素積分 $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{1+z^4}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ を求めよ.

問題 3.

定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$ を求めよ.

問題 4.

$a > 0$ に対して, 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$ を求めたい. 次の問いに答えよ.

(1) $R > 0$ に対して, 積分路 C_1, C_2 を

$$C_1 : t \qquad (t : -R \to R)$$
$$C_2 : Re^{i\theta} \qquad (\theta : 0 \to \pi)$$

とおく. このとき, 複素積分 $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz \to 0 \ (R \to \infty)$ を示せ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}$ を求めよ.

問題 5.

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $a \in D$ に対して, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ は $D \setminus \{a\}$ 上正則とする.

(1) f が a で 1 位の極であるとき, $\mathrm{Res}[f; a] = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$ となることを示せ.

(2) f が a で 4 位の極であるとき,

$$\mathrm{Res}[f; a] = \frac{1}{3!} \lim_{z \to a} \frac{d^3}{dz^3}((z-a)^4 f(z))$$

となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.