複素関数論序論 期末追試験問題

2016 年 2 月 9 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 , 問題 4, 問題 5 から 2 題以上を選択して計算過程も含めて答えよ. 以下, i は虚数単位とする. 複素数を答えるときには, $a+bi$ の形で答えること.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**. 以下, 向きを指定されていない複素積分については, 正の向きにとるものとする.

(1) 原点から i までの虚軸を C とするとき, 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z}{z+1}\,dz$ を求めよ.

(2) $r>0$ に対して, 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}} \overline{z}\,dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}} \cos(z^2)\,dz$ を求めよ.

(4) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}} \frac{dz}{(z^2+1)(z-5)}$ を求めよ.

(5) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}} \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z-1)^4}\,dz$ を求めよ.

(6) $\dfrac{1}{1-z}$ の Taylor 展開を微分することで, $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ の $z=0$ を中心とする Taylor 展開を $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上で求めよ.

(7) $a\in\mathbb{C}$ に対して $\sin z$ の $z=a$ を中心とする Taylor 展開を $(z-a)^4$ の項まで求めて, $a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+a_4(z-a)^4+\cdots$ の形で答えよ.

(8) $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ の $z=\pi$ を中心とする Laurent 展開を求めよ.

(9) $\dfrac{1}{z(z+3)^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を z^1 の項まで求めよ.

(10) $\dfrac{(z+1)e^z}{z^3}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を z^0 の項まで求めよ.

(11) $\dfrac{(z+1)e^z}{z^3}$ の極とその点における留数を求めよ.

(12) 複素積分 $\displaystyle\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}} \frac{(z+1)e^z}{z^3}\,dz$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

略解

問題 1

(1) $-\frac{1}{2}\log 2 + (1-\frac{\pi}{4})i$

(2) $2i\pi r^2$

(3) 0

(4) $-\dfrac{i\pi}{13}$

(5) $\dfrac{\pi^4}{24}i$

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$

(7) $\sin a + \cos a(z-a) - \frac{\sin a}{2!}(z-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(z-a)^3 + \frac{\sin a}{4!}(z-a)^4 + \cdots$

(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}$

(9) $\frac{1}{9}z^{-1} - \frac{2}{27} + \frac{1}{27}z + \cdots$

(10) $z^{-3} + 2z^{-2} + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{2}{3} + \cdots$

(11) $\frac{3}{2}$

(12) $3\pi i$

問題 2

(1), (2) ともに $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

問題 3

π

問題 4

$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$$

問題 5

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\,dz = \left(\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{8}\right)\pi i$$

問題 2.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$ を求めたい. 次の問いに答えよ.

(1) $R > 11136$ に対して, 積分路 C_1, C_2 を

$$\begin{aligned} C_1 &: t & &(t : -R \to R) \\ C_2 &: Re^{i\theta} & &(\theta : 0 \to \pi) \end{aligned}$$

とおく. 複素積分 $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{1+z+z^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$ を求めよ.

問題 3.

次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\sin\theta + 3}\, d\theta$$

問題 4.

$\displaystyle\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z}\, dz$ を求めよ. そして, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta$ を求めよ.

問題 5.

領域 $D \subset \mathbb{C}$ と $a \in D$ に対して, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ は $D \setminus \{a\}$ 上正則とする.

(1) f が a で 2 位の極であるとき, $\displaystyle\mathrm{Res}[f; a] = \lim_{z \to a} \frac{d}{dz}((z-a)^2 f(z))$ となることを示せ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\, dz$$

以下余白 計算用紙として使ってよい.