第1章　複素数と複素平面

§1.1　複素数

$x, y \in \mathbb{R}$ と虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ により作られた数
$z=x+iy$ を複素数という。ここで i は $i^2=-1$
をみたす。また

$\mathrm{Re}\, z := x$　(実部という)，$\mathrm{Im}\, z = y$ (虚部という)

とかく。$\mathrm{Re}\, z = 0$, i.e. $z=iy$ のとき，z を純虚数
という。複素数全体を $\mathbb{C}$, i.e.

$$\mathbb{C} := \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

とかく。

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$z_1 = z_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2$$

$$z_1 + z_2 := (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

$$z_1 - z_2 := (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$$

$$z_1 z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}$$

(ただし $z_2 \neq 0$)

で定める。

㊟　i を文字と思って計算して $i^2=-1$ で
おきかえればよい。

$z = x+iy \in \mathbb{C}$ に対し
$$\bar{z} := \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Im}\, z = x - iy$$
とおく。$\bar{z}$ を z の共役複素数という。

例1.1

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + i + \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$$

同様に

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1$$

例1.2

$z^2=-i$ となる $z\in\mathbb{C}$ を求める.

$z=x+iy$ とおくと $z^2=-i$ より

$x^2-y^2+2ixy=-i$ だから

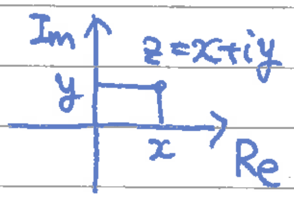
$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-1 \end{cases}$$

となる. これを解くと $x=-y$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ となる

§1.2 複素平面

$z=x+iy\in\mathbb{C}$ は (x,y) 平面の点として表せる. この平面を複素平面という。



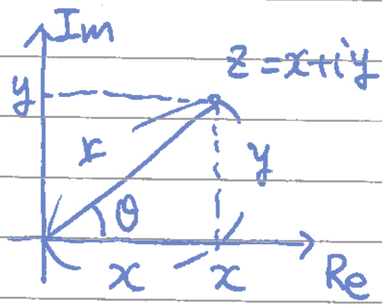
横軸(Re)は $(x,0)$, i.e. $x+i0\in\mathbb{R}$

縦軸(Im)は $(0,y)$, i.e. $0+iy$: 純虚数

横軸を実軸, 縦軸を虚軸という。

$z = x+iy \in \mathbb{C}$ を
極座標 (r, θ)
でかくと

$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\theta = \arctan \frac{y}{x}$



となる。ただし、θは一通りに定まらない($\pm 2\pi, \pm 4\pi$ …しても変わらない)。
rをzの絶対値、θをzの偏角といい、

$|z| := r$, $\arg \theta := \theta$

とかく。このとき、

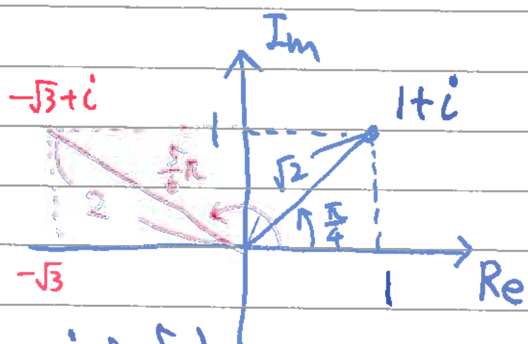
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。この右辺をzの極形式という。

例1.3

$1+i$, $-\sqrt{3}+i$ を複素平面上にかき、極形式を求める。

右図より



$1+i$
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

となる。 □

例1.4

$r>0,\ c\in\mathbb{C}$ に対し

$D_r(c) := \{z\in\mathbb{C} : |z-c|<r\}$

とおく。$z=x+iy$,

$c=a+ib$ とかくと

$|z-c|^2 = |x-a|^2 + |y-b|^2$

より $|z-c|$ は複素平面上で z と c の距離となる。よって $D_r(c)$ は中心 c, 半径 r の開円板を表す。 ☑

〈複素平面と積〉

$z_1, z_2 \in\mathbb{C}$ に対し, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$ を複素平面に図示する。簡単のために $|z_1|=|z_2|=1$ とし, 極形式

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1,\quad z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

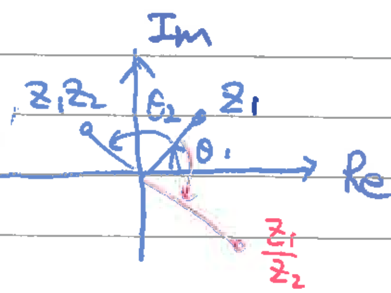
とする。

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)}_{=\cos(\theta_1+\theta_2)} \\ &\quad + i\underbrace{(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)}_{=\sin(\theta_1+\theta_2)} \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1-\theta_2) - i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

となる。



定理1.1

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}$
に対して．次が成り立つ．

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ \arg(z_1+z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

i.e.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

(2) $z_2 \neq 0$ ならば

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

i.e.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

∎

系1.1 (de Moivre の定理)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

となる． ∎

例1.5

$\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

となる．他方 de Moivre の定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

だから 3倍角の公式

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$
が得られる． ☑

§1.3 複素数列の収束

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し
$$d(z,w) := |z-w|$$
とおくと，d は $\mathbb{C}$ 上の距離になる．i.e.

- $d(z,w) \geq 0 \quad (\forall z, w \in \mathbb{C})$
- $d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w \quad (\forall z, w \in \mathbb{C})$
- $d(z,w) = d(w,z) \quad (\forall z, w \in \mathbb{C})$
- $d(z,w) \leq d(z,\eta) + d(\eta,w) \quad (\forall z, w, \eta \in \mathbb{C})$

をみたす。

定義 1.1（収束）

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$：複素数列，$z \in \mathbb{C}$，

$z = \lim_{n\to\infty} z_n$ または $z_n \to z \ (n \to \infty)$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad |z_n - z| = d(z_n, z) \to 0 \quad (n \to \infty)$ ☑

数列の収束を実部と虚部を用いて表したい．

命題 1.1

$z \in \mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ．

(1) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

(2) $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ ☑

アイデア

$z = a + ib \in \mathbb{C}$ とすると

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$

$|z|^2 = a^2 + b^2 \leq (|a|+|b|)^2$ ☑

定理1.2

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ に対し

$z_n \to z \quad (n\to\infty)$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z,\ \mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z \quad (n\to\infty)$

i.e. $z_n = x_n + iy_n$, $z = x+iy$ とかけば

$z_n \to z\ (n\to\infty) \Longleftrightarrow x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n\to\infty)$

証明　$z_n = x_n + iy_n$, $z = x+iy$ とかく.

($\Rightarrow$) 命題1.1(1)より

$|x_n - x| \leq |z_n - z| \to 0 \quad (n\to\infty)$

$|y_n - y| \leq |z_n - z| \to 0 \quad (n\to\infty)$

だから $x_n \to x$, $y_n \to y \quad (n\to\infty)$ となる.

($\Leftarrow$) 命題1.1.(2)より

$|z_n - z| \leq \underbrace{|x_n - x|}_{\to 0} + \underbrace{|y_n - y|}_{\to 0} \to 0 \quad (n\to\infty)$

だから $z_n \to z \quad (n\to\infty)$ となる $\square$

これにより, $\mathbb{R}$ で成り立つことはほぼそのまま成り立つ. ただし, 定理1.2を用いずに示すこともできる.

定理1.3

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, $w = \lim_{n\to\infty} w_n$

とすると, 次が成り立つ

(1) $z_n + w_n \to z + w \quad (n\to\infty)$

(2) $z_n w_n \to zw \quad (n\to\infty)$

(3) $z \neq 0$ ならば

$\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z} \quad (n\to\infty)$

証明 (2)のみ示す。

$z_n w_n - zw = (z_n - z)(w_n - w) + w(z_n - z) + z(w_n - w)$

より

$$
\begin{aligned}
|z_n w_n - zw| &= |(z_n - z)(w_n - w) + w(z_n - z) + z(w_n - w)| \\
&\leq |(z_n - z)(w_n - w)| + |w(z_n - z)| + |z(w_n - w)| \\
&\qquad (\because \text{三角不等式}) \\
&= |z_n - z||w_n - w| + |w||z_n - z| + |z||w_n - w| \\
&\qquad (\because \text{定理 } 1.1) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

がわかる □

〈複素平面の位相〉

$d(z, w) = |z - w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$ とおくと、

$(\mathbb{C}, d)$ は距離空間になる。

定義 1.2（開集合）

$U \subset \mathbb{C}$ が開集合

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $^\forall \eta \in U$ に対して、$^\exists \varepsilon > 0$ s.t. $D_\varepsilon(\eta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \eta| < \varepsilon\} \subset U$ ☒

定義 1.3（閉集合）

$F \subset \mathbb{C}$ が閉集合

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ が開集合。

命題 1.2

$F \subset \mathbb{C}$ に対し、次は同値。

(1) F は閉集合。

(2) $^\forall \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset F$, $z \in \mathbb{C}$ に対し

$z_n \to z$ $(n \to \infty) \Rightarrow z \in F$ ☒

第2章 正則関数

$D \subset \mathbb{C}$ に対し, $f: D \to \mathbb{C}$ を複素関数という。

§2.1 連続関数

定義2.1 (連続)

$D \subset \mathbb{C}$ に対し $f: D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ で連続

$\underset{def}{\iff}$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ が $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$

$\implies f(z_n) \to f(z_0)$ $(n \to \infty)$.

$f: D \to \mathbb{C}$ が D 上連続

$\underset{def}{\iff}$ $^{\forall}z \in D$ に対し f は z で連続 ▨

例2.1

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) := \bar{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ で定めると f は $z=0$ で連続である. ▨

証明

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が $z_n \to 0$ をみたすとき

$$|f(z_n) - f(0)| = |\bar{z}_n - 0|$$
$$= |\bar{z}_n|$$
$$\overset{(系6)}{=} |z_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より $f(z_n) \to f(0)$ $(n \to \infty)$ となるから, f は $z=0$ で連続となる □

連続性を ε-δ 論法でかくこともできる.

定理2.1

$D \subset \mathbb{C}$ に対し $f: D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ で連続

$\iff$ $^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し $^{\exists}\delta > 0$ s.t. $^{\forall}z \in D$ に対し

$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ▨

$D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \in D$ $(x, y \in \mathbb{R})$
に対し

$$u(x,y) := \mathrm{Re} f(z),\quad v(x,y) := \mathrm{Im} f(z)$$

とおく。つまり

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad (2.1)$$

である。u, v は二変数の実数値関数である。

<u>定理2.2</u>

$D \subset \mathbb{C}$ に対し、$f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 = x_0 + i y_0 \in D$ で連続

$\iff$ (2.1) の u, v が (x_0, y_0) で連続

<u>証明</u>

($\Rightarrow$) $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$ のとき、
定理1.2より $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ だから

$$|u(x_n, y_n) - u(x_0, y_0)| \leq |f(z_n) - f(z_0)| \quad (\because \text{命題 } 1.1.(1))$$
$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる。v についても同様。

($\Leftarrow$) $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ のとき、定理1.2より
$x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ だから

$$|f(z_n) - f(z_0)| \leq |u(x_n, y_n) - u(x_0, y_0)| + |v(x_n, y_n) - v(x_0, y_0)| \quad (\because \text{命題 } 1.1.(2))$$
$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる。 □

実数値関数の連続の性質とほぼ同じことが
複素関数でも成り立つ.

定理2.3

$D \subset \mathbb{C}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ は $z_0 \in D$ で連続
$\Rightarrow$ $f+g$, fg は $z_0 \in D$ で連続 ▨

〈関数の極限〉

定義2.2 (関数の極限)

開集合 $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$,
$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $f(z) \to \alpha$ $(z \to z_0)$ または
$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^\forall \varepsilon > 0$ に対し $^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall z \in D \setminus \{z_0\}$ に対し
$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$. ▨

実数のときとほぼ同じことが複素数でも
成り立つ

定理2.4

開集合 $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f, g : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$,
$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$

$$\Rightarrow \quad f(z) + g(z) \to \alpha + \beta \quad (z \to z_0)$$
$$f(z) g(z) \to \alpha\beta \quad (z \to z_0)$$

▨

§2.2 微分可能性と正則関数

定義2.3 (複素微分, 正則)

$D \subset \mathbb{C}$: 開集合, $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$

① f が z_0 で微分可能

$$\overset{\text{def}}{\iff} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

が存在する。この極限を $f'(z_0)$ とか $\frac{df}{dz}(z_0)$ とかく。

② $^\forall z \in D$ に対して f が z で微分可能のとき、f は D 上正則であるという。

$f' : D \ni z \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$ を f の導関数という。 ▨

定理2.5

$D \subset \mathbb{C}$: 開集合, $f: D \to \mathbb{C}$

f が D 上正則 $\Rightarrow$ f は D 上無限回微分可能 ▨

証明はあとで行う。

例2.2

$n \in \mathbb{N}$ に対し $f(z) := z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ とおく。

$z_0 \in \mathbb{C}$ に対し

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})}{z-z_0}$$

$$= z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}$$

となるから

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=nz_0^{n-1}$$

となる. ☑

命題2.1

$D\subset\mathbb{C}$: 開集合, $f:D\to\mathbb{C}$, $z_0\in D$

fがz_0で微分可能 $\Rightarrow$ fはz_0で連続 ☑

証明

$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+R(z)$

とかくと,

$$\frac{|R(z)|}{|z-z_0|}=\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|\to 0\ (z\to z_0)$$

となるから. とくに $|R(z)|\to 0$ $(z\to z_0)$となる

□

定理2.6

$D\subset\mathbb{C}$: 開集合, $f, g: D\to\mathbb{C}$ D上正則

$\Rightarrow$ $f+g$, fgもD上正則で

$(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$ ☑

証明

$(fg)'$を計算してみる. $z, z_0\in D$に対し.

$$\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}=\frac{(f(z)-f(z_0))g(z)}{z-z_0}+\frac{f(z_0)(g(z)-g(z_0))}{z-z_0}$$

$$\to f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)\ (z\to z_0)$$

□

定理2.7

$D, D' \subset \mathbb{C}$：開集合，$f = f(z) : D \to \mathbb{C}$ D上正則

$g = g(w) : D' \to \mathbb{C}$，D'上正則，$f(D) \subset D'$

$\Longrightarrow$ $F = g \circ f : D \to \mathbb{C}$は D上正則

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) \quad ({}^\forall z \in D) \quad \blacksquare$$

証明は実数の微積分のときと同様

例2.3

$F(z) = (2z^2+i)^5$ とおくと定理2.7で

$f(z) = 2z^2+i$，$g(w) = w^5$ とおけば

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z)$$

$$= 5(f(z))^4(4z) = 20z(2z^2+i)^4$$

$\blacksquare$

例2.4

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$を $f(z) := |z|^2 \ (z \in \mathbb{C})$ で定める

と fは$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して微分可能でない。

証明は次のセクションにまわす $\blacksquare$

§2.3 Cauchy-Riemannの方程式

$D \subset \mathbb{C}$；開集合，$f : D \to \mathbb{C}$ D上正則

$u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$，$v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$

$(z = x+iy \in D)$

すなわち $f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \quad (z = x+iy \in D)$

とする. $z=x+iy\in D$ に対し

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\to f'(z) \quad (h\to 0)$$

となることから, u, v のみたすべき条件を調べる.

1. $h\in\mathbb{R}$ とすると, $z+h=x+h+iy$ より

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{h}\Big(u(x+h,y)+iv(x+h,y)-(u(x,y)+iv(x,y))\Big)$$

$$=\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}$$

$$\to\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=f'(z) \quad \text{—(*)}$$

$(h\to 0)$

2. $h=ik, k\in\mathbb{R}$, i.e. h を純虚数とすると $z+h=x+i(y+k)$ より

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{ik}\Big(u(x,y+k)+iv(x,y+k)-(u(x,y)+iv(x,y))\Big)$$

$$=\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k}+\underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i}\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

$$\to \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(z) \quad (k \to 0) \quad -(**)$$

$(*)$と$(**)$より

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

だから

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

となる。実は逆も成り立つ。

定理2.8 (Cauchy-Riemannの方程式)

$D \subset \mathbb{C}$：開集合，$f : D \to \mathbb{C}$

$u(x,y) := \mathrm{Re} f(z)$, $v(x,y) := \mathrm{Im} f(z)$ $(z = x+iy \in D)$

i.e.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x+iy \in D)$$

このとき，fが$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$で微分可能

$\Leftrightarrow$ u, vが(x_0, y_0)で全微分可能，

$$(\mathrm{CR}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

さらに，このとき $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

となる。 ▨

この式(CR)をCauchy-Riemannの方程式という

証明

($\Rightarrow$) の(CR)は示した. (x_0, y_0)で全微分可能であることは定理2.5からわかる.

($\Leftarrow$) $f(z)-f(z_0)=(u(x,y)-u(x_0,y_0))+i(v(x,y)-v(x_0,y_0))$ である. u, vが(x_0,y_0)で全微分可能なので

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+R_1(x,y)$$

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+R_2(x,y)$$

とかくと $\dfrac{|R_1(x,y)|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}, \dfrac{|R_2(x,y)|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \to 0 \quad \left((x,y)\to(x_0,y_0)\right)$

となる. Cauchy-Riemannの方程式より

$$\begin{aligned} f(z)-f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad +i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) \\ &\quad +R_1(x,y)+R_2(x,y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(z-z_0) \\ &\quad +R_1(x,y)+R_2(x,y) \end{aligned}$$

だから

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\right|=\left|\frac{R_1(x,y)+R_2(x,y)}{z-z_0}\right| \to 0 \quad (z\to z_0)$$

となる. □

例2.5

$f(z)=|z|^2$ は $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で微分可能でない.

証明

$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \quad (z=x+iy\in\mathbb{C})$

より $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$ とおくと

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

となる.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$$

だから, $z\neq 0$ に対し

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\neq\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \text{ or } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\neq-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

となり, Cauchy-Riemannの方程式を

みたさない $\square$

全微分可能性を調べるための十分条件をあげよう.

定理2.9

$U\subset\mathbb{R}^2$: 開集合, $h=h(x,y):U\to\mathbb{R}$ は

$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ が存在して連続

$\Rightarrow$ h は U 上全微分可能

$\boxtimes$

例2.6

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ $(z = x+iy \in \mathbb{C})$

により定めると、f は $\mathbb{C}$ 上正則となる。

証明

$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

とおけば

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$$

よりこれらはすべて連続で

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

となり、Cauchy-Riemannの方程式をみたすので

f は $\mathbb{C}$ 上正則となる。 □

例2.7

次の関数 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は $\forall z \in \mathbb{C}$ に対して

微分可能でない

(1) $f(z) = \mathrm{Re}\, z = x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $(z \in \mathbb{C})$

(2) $f(z) = \bar{z} = x - iy$ $(z \in \mathbb{C})$

各自たしかめよ。

第3章 巾級数と初等関数.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

xを$z \in \mathbb{C}$にかえるとどうなるか?

§3.1 巾級数.

$c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

の形の級数を巾級数という.

<u>定理3.1</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0 \ (\neq 0)$ で収束

$\Rightarrow$ $|z| < |z_0|$ をみたすすべての$z \in \mathbb{C}$に対し

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \infty$, つまり絶対収束する.

<u>証明</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ が収束するならば $c_n z_0^n \to 0$ $(n \to \infty)$

だから. $\exists M > 0$ s.t.

$|c_n z_0^n| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

とできる. 従って

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$
$$\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

となり，右辺の級数が公比 $\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$ の等比級数だから収束する。 □

定理4.1より，巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ に対し，

$\exists r>0$ s.t.

① $z\in D_r(0)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$ に対して
$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ は絶対収束．

② $z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$ $(\neq \mathbb{C}\setminus D_r(0))$
に対して $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ は発散

がわかる．この半径 r を**収束半径**という．
ただし，$z=0$ 以外で発散するときは $r=0$，
$\forall z\in\mathbb{C}$ で収束するときは $r=\infty$ と考える．

⑪ 係数 c_n から収束半径を決定したい

<u>定理3.2</u> (d'Alembert の判定法)
$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ に対し $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{r}$ が存在すれば
r は収束半径である． ▨

<u>証明</u>

<u>1.</u> $\rho<r$，$z\in D_\rho(0)$ に対し
$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|<\infty$ を示す．

まず

$$\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| \to \frac{|z|}{r} \quad (n\to\infty)$$

である。$\frac{|z|}{r} < \frac{\rho}{r} < 1$ より、$\varepsilon := \frac{1}{2}\left(1-\frac{|z|}{r}\right) > 0$

とおくと、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$n \geq N \Rightarrow \left|\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| - \frac{|z|}{r}\right| < \varepsilon,$$

とくに

$$\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| < \varepsilon + \frac{|z|}{r} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{|z|}{r}\right) =: \rho_0 < 1$$

となる。よって $n \geq N$ ならば

$$|c_{n+1}z^{n+1}| \leq \rho_0 |c_n z^n| \leq \rho_0^2 |c_{n-1}z^{n-1}|$$
$$\leq \cdots \leq \rho_0^{n-N+1}|c_N z^N|$$

となるから、

$$\sum_{n=N}^{\infty}|c_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\rho_0^{n-N+1}|c_N z^N|$$
$$= |c_N z^N|\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^n$$
$$= |c_N z^n|\frac{\rho_0}{1-\rho_0} < \infty$$

より $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する。

2. $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ に対し、

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が発散することを示す。

$$\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| \to \frac{|z|}{r} > 1 \quad (n\to\infty)$$

である。$\varepsilon := \frac{1}{2}\left(\frac{|z|}{r}-1\right) > 0$ とおくと、

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$n \geq N \Rightarrow \left| \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| - \frac{|z|}{r} \right| < \varepsilon,$$

とくに

$$\left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| > \frac{|z|}{r} - \varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|z|}{r}\right) = \rho_1 > 1$$

となる. よって $n \geq N$ ならば

$$|c_{n+1} z^{n+1}| > \rho_1 |c_n z^n| > \cdots > \rho_1^{n-N+1} |c_N z^N|$$

となり, $\rho_1 > 1$ より $n \to \infty$ とすると

$|c_n z^n| \to \infty$ となるので $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ は

発散する. □

<u>例3.1</u>

次の巾級数の収束半径を求めよ.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ (iii) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$

(i) $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = (n+1) \to \infty = \frac{1}{0}$ $(n \to \infty)$

よって 収束半径 は 0 となる.

(ii) $w = z^2$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n.$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} \right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 = \frac{1}{\infty} \quad (n \to \infty)$$

よって収束半径は $\sqrt{\infty} = \infty$ となる.

(iii) $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \right| \to 1 = \frac{1}{1}$ $(n \to \infty)$ ∴収束半径は1 ☒

定理3.3

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径をRとすると $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $D_R(0)$ 上正則であり

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \qquad (*)$$

となる。さらに(*)の右辺の収束半径もRとなる。

証明の概略

1. (*)の右辺の収束半径をR'とする

$$|c_n z^n| \le |n c_n z^n| \Rightarrow R' \le R.$$

$|z| < R$ となる $z \in \mathbb{C}$ に対し

$|z| < R_0 < R$ となる R_0 をとると $^\exists M > 0$ s.t.

$|c_n R_0^n| \le M$ となるので

$$|n c_n z^n| \le \left|n c_n \frac{z^n}{R_0^n} R_0^n\right|$$

$$\le n|c_n R_0^n| \left(\frac{|z|}{R_0}\right)^n$$

$$\le nM \left(\frac{|z|}{R_0}\right)^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{|z|}{R_0}\right)^n < \infty \quad \left(\because \frac{|z|}{R_0} < 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad R \le R'$$

2. $z \in D_R(0)$, $h \in \mathbb{C}$ に対し $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とおく

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((z+h)^n - z^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left({}_nC_1 z^{n-1} h + \cdots + {}_nC_k z^{n-k} h^k + \cdots + h^n\right)$$

だから

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n \left({}_nC_2 z^{n-2}h+\cdots+{}_nC_k z^{n-k}h^{k-1}+\cdots+h^{n-1}\right)\right|$$

となる. 1. での M を用いると

$$\leq |h|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\left({}_nC_2|z|^{n-2}+\cdots+{}_nC_k|z|^{n-k}|h|^{k-2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+|h|^{n-2}\right)\right)$$

$$\leq |h|\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M}{R_0^n}\left({}_nC_2|z|^{n-2}+\cdots+{}_nC_k|z|^{n-k}|h|^{k-2}+\cdots+|h|^{n-2}\right)\right)$$

$$=\frac{M|h|}{R_0^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left({}_nC_2\left(\frac{|z|}{R_0}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_k\left(\frac{|z|}{R_0}\right)^{n-k}\left(\frac{|h|}{R_0}\right)^{k-2}+\cdots+\left(\frac{|h|}{R_0}\right)^{n-2}\right)\right)$$

となる. 少し計算すると (cf. 杉浦 入門, 猪股 定理3.3)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left({}_nC_2\left(\frac{|z|}{R_0}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_k\left(\frac{|z|}{R_0}\right)^{n-k}\left(\frac{|h|}{R_0}\right)^{k-2}+\cdots+\left(\frac{|h|}{R_0}\right)^{n-2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{|z|+|h|}{R_0}\right)\left(1-\frac{|z|}{R_0}\right)^2}$$

となることより $h\to 0$ とすると

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\to\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

がわかる. □

例3.2

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は1であり

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

となる. よって $z \in D_1$ に対して微分することができて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

となる. ☒

例3.3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ と定めると

f は C^∞ 級であるが $x=0$ における Taylor 展開

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

の収束半径は1であり $f(x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$

とならない. 他方 $f(x), g(x)$ を x のかわりに

$z \in \mathbb{C}$ と拡張してみると, f は $z = \pm i$ で

正則でない(そもそも連続でない).

つまり, $z = \pm i$ での f の特異性が

f の Taylor 展開に影響を与えている. ☒

§3.2 初等関数

定義3.1 (指数関数, 三角関数)

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots$$

と定義する. □

定理 3.4 (指数法則)

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^{z+w} = e^z e^w$$ □

理由

$$e^{z+w} = 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z+w)^2 + \frac{1}{3!}(z+w)^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= \left(1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{1!} w + \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{3!} w^3 + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z^2 + 2zw + w^2) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(z^3 + 3z^2 w + 3zw^2 + w^3) \\
&= 1 + \frac{1}{1!}(z+w) + \frac{1}{2!}(z+w)^2 + \frac{1}{3!}(z+w)^3 + \cdots \\
&= e^{z+w}
\end{aligned}$$ □

㊟ 厳密には 吹田・新保 p.136 定理7, 洲之内・猪股 定理3.4, Cauchy積を参照せよ.

〈Eulerの公式〉

$z \in \mathbb{C}$に対し

$$e^{iz} = 1 + \frac{1}{1!}(iz) + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \frac{1}{3!}(iz)^3 + \frac{1}{4!}(iz)^4 + \frac{1}{5!}(iz)^5 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{i}{1!}z - \frac{1}{2!}z^2 - \frac{i}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{i}{5!}z^5 - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots\right) + i\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right)$$

$= \cos z + i \sin z$ (∵定義3.1)

<u>定理3.5</u> (Eulerの公式)

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

とくに

$$e^{i\pi} = -1$$ ☑

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ (∵定理3.4)

$= e^x(\cos y + i \sin y)$

(∵定理3.5)

と極形式表記できるので

$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x$

$\arg e^z = \mathrm{Im}\, z = y$

がわかる.

定義より $z \in \mathbb{C}$ に対して

$\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$

がわかる. これと Euler の公式をくみあわせると

次が得られる

系3.1

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$ ☒

☺ $z \in \mathbb{C}$ に対し, Euler の公式より

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

だから両辺 和, 差をとることで

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z,$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

が得られる □

定理3.6 (加法定理)

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対し

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

☒

証明 sin のみ示す.

$$(右辺) = \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_2}}{2i}\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right.$$

$$\left. + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right)$$

$$= \sin(z_1+z_2) \qquad \square$$

定理3.7（微分）

$z \in \mathbb{C}$ に対し

$$(e^z)' = e^z,\quad (\cos z)' = -\sin z,\quad (\sin z)' = \cos z$$

証明

1. $(e^z)' = e^z$ を示す。

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \qquad (\because 定理3.3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \qquad \left(\begin{array}{l} n=k+1 \\ と変換 \end{array}\right)$$

$$= e^z$$

2. $(\cos z)' = -\sin z$ を示す。

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'$$
$$= \frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})$$
$$= -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$(\sin z)' = \cos z$ も同様である。 □

定理3.8

$z\in\mathbb{C}$ に対して

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}$$

▨

証明

$x := \mathrm{Re}\, z,\ y := \mathrm{Im}\, z$ とおくと

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)}$$
$$= e^{x}(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))$$
$$= e^{x}(\cos y + i\sin y)$$
$$= e^{z}$$

□

注意3.1

定理3.8の証明で $\theta\in\mathbb{R}$ に対し

(*) $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\ \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$

をみとめている。しかし、そもそも我々の定義3.1で (*) は自明ではない。

厳密には、何らかの方法で円周率πを定義したうえで、定義3.1が高校で習うe^{θ}, $\sin\theta$, $\cos\theta$と等しいことを示さないといけない。詳しくは
杉浦,「解析入門I」東大出版 1980
を参照されたい。 ∎

例3.4

$\cos z = 2$ となる $z \in \mathbb{C}$ を求める。

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 2$$

より

$$e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0$$

$\xi := e^{iz}$ とおくと、

$\xi^2 - 4\xi + 1 = 0$ より $\xi = 2 \pm \sqrt{3}$.

$z = x + iy$ とおけば

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3}$$

だから、

$$\sin x = 0,\ e^{-y}\cos x = 2 \pm \sqrt{3} > 0 \ (\text{i.e. } \cos x > 0)$$

より

$x = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ だから $\cos x = 1$.

$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$ より $y = -\log(2 \pm \sqrt{3})$

従って

$$y = 2n\pi - i\log(2 \pm \sqrt{3})$$

∎

§3.3 対数関数

$x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ に対し

$$\log(e^x) = x, \quad e^{\log y} = y$$

であった．複素関数として log を定義したいが，定理3.8より

$$e^z = e^{z+2\pi i}$$

となるから，$w \in \mathbb{C}$ に対して $w = e^z$ となる $z \in \mathbb{C}$ はただ1つには決まらない．実際

$$w = r e^{i\theta} \quad (\text{極形式})$$

とかくと $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} e^{\log r + i(\theta + 2\pi n)} &= e^{\log r} e^{i(\theta + 2\pi n)} \\ &= r e^{i\theta} \quad (\because \text{定理3.8}) \\ &= w \end{aligned}$$

だから $w = e^z$ の $z \in \mathbb{C}$ についての解は

$$\begin{aligned} z &= \log r + i(\theta + 2n\pi) \\ &= \log|w| + i(\arg w + 2n\pi) \end{aligned}$$

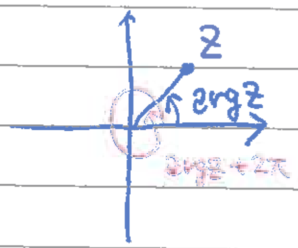
となる．つまり

$$\log w = \log|w| + i(\arg w + 2n\pi)$$

と多価関数になってしまう．

〈主値〉

$z \in \mathbb{C}$ の偏角 $\arg z$ に対し
$\arg z + 2\pi$ もまた z の
偏角であった．
そこで $-\pi < \arg z \leq \pi$
に制限して考えよう．



定義3.2 (対数関数)

$z \in \mathbb{C}$ に対し，偏角の主値 $\mathrm{Arg}\, z$ を

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z, \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$$

により定める．そして対数関数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ を $z \neq 0$ に対し

$$\mathrm{Log}\, z := \log |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z$$

により定める． $\boxed{/\!/}$

例3.5

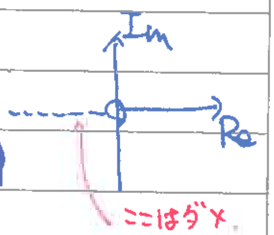
$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(e^{i\pi}) = \log 1 + i\, \mathrm{Arg}\, e^{i\pi}$$
$$= \pi i,$$
$$\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i$$
$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} i.$$

$\boxed{/\!/}$

定理3.9

Log は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log}\, z = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$$



証明

$z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し

$w = \mathrm{Log}\, z$, $w_0 = \mathrm{Log}\, z_0$ とおくと $e^w = z$, $e^{w_0} = z_0$ であり

$$\frac{\mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}\, z_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} \to \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0} \quad (z \to z_0)$$

$\square$

〈復習とここまでのまとめ〉

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad (\text{極形式})$$

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z$$

と極形式でかくと、$n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

(de Moivre の公式)

となった。これは

$$z = re^{i\theta} \quad (\text{これも極形式})$$

でかいたとき、指数法則

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

が成り立つことに他ならない。

(2) $D \subset \mathbb{C}$: 開集合 $f : D \to \mathbb{C}$ に対し

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (z = x + iy \in D)$$

とかいたときに f が D 上正則

$\Leftrightarrow$ (fは全微分可能で)

iff $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (CR)

(Cauchy-Riemann の方程式)

であった。これを用いれば、複素関数の正則性は、2変数関数の微分可能性 + (CR) におきかえられる。

⑪ Taylor展開を複素数に拡張することで

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

となる。つまり、複素関数として、指数関数の性質を調べることが三角関数の理解にもつながる。

<u>例</u> $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}\,\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x} + e^{-i(m+n)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{e^{i(m+n)x}}{i(m+n)} - \frac{e^{-i(m+n)}}{i(m+n)} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)} \right) dx \right).$$

← これは0

$$m-n \neq 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x} \right) dx = 0,$$

$$m-n = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x} \right) dx = 4\pi$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \pi\,\delta_{mn}$$

☒

第4章 複素積分とCauchyの積分定理

§4.1 複素積分

〈準備〉

連続関数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ を $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ $(t\in[a,b])$ とかいたとき

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \quad \text{—}(*)$$

と定める。φ が連続であることと、u, v が連続であることは同値だから $(*)$ の右辺の積分は定義できる。

命題4.1

連続関数 $\varphi, \psi:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $a<c<b$ に対して、次が成り立つ。

(1) $\int_a^b (\varphi(t)+\psi(t))\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$

(2) $\int_a^b (\lambda\varphi(t))\,dt = \lambda\int_a^b \varphi(t)\,dt$.

(3) $\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^c \varphi(t)\,dt + \int_c^b \varphi(t)\,dt$.

(4) $\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$.

証明 (4)のみ示す。

$\theta = \arg\int_a^b \varphi(t)\,dt$ とおくと

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

$$\left(\because \int_a^b \varphi(t)\,dt = \left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| e^{i\theta}\right)$$

$$= \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\varphi(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-i\theta}\varphi(t))\,dt$$

(左辺) $\in \mathbb{R}$ より $\int_a^b \mathrm{Im}(e^{-i\theta}\varphi(t))\,dt = 0$

よって

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\varphi(t))\,dt$$

$$\leq \int_a^b |\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\varphi(t))|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta}\varphi(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt \quad (\because |e^{-i\theta}|=1)$$

$\square$

<u>例4.1</u>

$\alpha, s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,\alpha$ のとき

$\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt$ を求める

$s = \sigma + i\tau$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ とおくと

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha_1)t}\left(\cos(\tau-\alpha_2)t - i\sin(\tau-\alpha_2)t\right)dt$$

$$= \frac{1}{(\sigma-\alpha_1)^2+(\tau-\alpha_2)^2}\left((\sigma-\alpha_1) - i(\tau-\alpha_2)\right)$$

$$= \frac{\overline{s-\alpha}}{(s-\alpha)(\overline{s-\alpha})} = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \square.$$

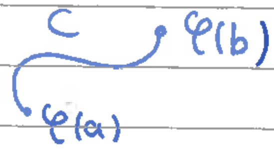
注意4.1

一般に $\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ を f の Laplace 変換という □

〈複素積分〉

$C : \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b)$

を $\mathbb{C}$ 上の曲線とする。



このとき、形式的に

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

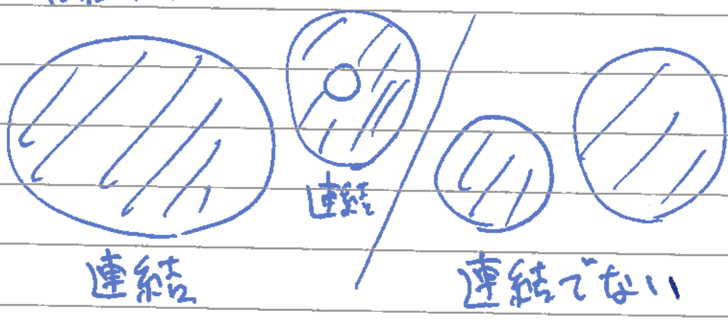
となる。 $\left(z = \varphi(t),\ dz = \varphi'(t)\,dt \quad \begin{array}{c|c} z & \varphi(a) \to \varphi(b) \\ \hline t & a \to b \end{array} \right)$

定義4.1（領域）

開集合かつ連結な集合 $D \subset \mathbb{C}$ を領域という。 □

注意4.2

領域 $D \subset \mathbb{C}$ の $^\forall z, w \in D$ について、$\varphi(a) = z$, $\varphi(b) = w$ をみたす D 内の曲線 $C : \varphi(t) \ (a \leq t \leq b)$ が存在する。



定義4.2 (複素積分)

領域$D\subset\mathbb{C}$上の連続関数$f:D\to\mathbb{C}$と
D内の曲線$C:\varphi(t)$ $(a\leq t\leq b)$に対し、
fのCに沿っての複素積分$\int_C f(z)dz$を

$$\int_C f(z)dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

で定義する。 $\boxed{}$

曲線の表示の仕方はいろいろあるが、次の補題から、曲線の表示の仕方に複素積分は依らない

補題4.1

$C:\varphi(t)$ $(a\leq t\leq b)$, $\psi(s)$ $(\alpha\leq s\leq\beta)$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(s))\psi'(s)ds$$ $\boxed{}$

証明

必要ならば$-\psi$を考えることで$\varphi(a)=\psi(\alpha)$としてよい。$\int_\alpha^\beta f(\psi(s))\psi'(s)ds$に対し$\psi(s)=\varphi(t)$と変数変換すると

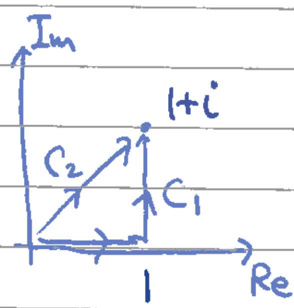
$$\psi'(s)ds=\varphi'(t)dt \qquad \begin{array}{c|c} s & \alpha\to\beta \\ \hline t & a\to b \end{array}$$

より

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(s))\psi'(s)ds = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

となる。 $\square$

例4.2



$\int_C z\,dz$ を右図の C_1, C_2 に沿って積分すると

$$C_1: \varphi(t) = \begin{cases} t & (0\le t\le 1) \\ 1+i(t-1) & (1\le t\le 2)\end{cases}$$

より $\varphi'(t)=\begin{cases}1 & (0\le t\le 1)\\ i & (1\le t\le 2)\end{cases}$ だから

$$\int_{C_1} z\,dz = \int_0^1 \varphi(t)\varphi'(t)\,dt + \int_1^2 \varphi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (1+i(t-1))\,i\,dt$$

$$= i \quad (\text{各自})$$

一方、$C_2: \psi(s) = s+is \quad (0\le s\le 1)$ より

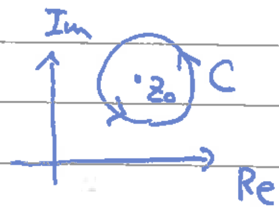
$\psi'(s)=1+i$ だから.

$$\int_{C_2} z\,dz = \int_0^1 (s+is)(1+i)\,ds = i \quad (\text{各自}).$$

となる. □

例4.2より、積分の値は C_1, C_2 の道のとり方に依らないことが予想できるが証明はあとでやる.

例4.3



$z_0\in\mathbb{C}, r>0$ に対し

$C: z_0+re^{it} \quad (0\le t\le 2\pi)$

とおく.

$n \in \mathbb{Z}$に対し $\int_C (z-z_0)^n dz$ を求める.

1. $n=-1$ のとき　$(z_0+re^{it})' = rie^{it}$ より

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0+re^{it})-z_0} rie^{it} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i.$$

2. $n \neq -1$ のとき.

$$\int_C (z-z_0)^{-n} dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt$$

$$= r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

$$= \frac{r^{n+1} i}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0$$

となる. ▨

定理4.1

$z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$ に対し, $C: z_0+re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とおく. このとき, $n \in \mathbb{Z}$に対し

$$\int_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

が成り立つ ▨

§4.2 Cauchyの積分定理

〈準備〉

命題4.2

$D \subset \mathbb{C}$：領域，$f: D \to \mathbb{C}$，D上正則

C：D内の曲線

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad (z = x+iy \in D)$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

㊟

証明　$C: \varphi(t) = x(t) + i\,y(t) \quad (a \leq t \leq b)$

とかくと

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b \big(u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))\big)\big(x'(t) + i\,y'(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \big(u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt$$

$$+ i\int_a^b \big(v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy) \qquad \square$$

注意4.3

一般に$\mathbb{R}^2$上の曲線 $C: \varphi(t) = (x(t), y(t)) \ (a \leq t \leq b)$

とC上の連続関数$f: C \to \mathbb{R}$に対し

C上の線積分 $\int_C f(x,y)\,dx$, $\int_C f(x,y)\,dy$ は

$$\int_C f(x,y)\,dx := \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_C f(x,y)\,dy := \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

で与えられる。 ▥

定理4.2 (Greenの定理)

$E\subset\mathbb{R}^2$：領域，∂Eは滑らか

$f, g : E \to \mathbb{R}$ C^1級

$$\Rightarrow \int_{\partial E}\left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\right) = \int_E\left(-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\,dy$$ ▨

Greenの定理は外微分の記号を用いると

$$\int_{\partial E}\left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\right)$$

$$=\int_E d\left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\right) \quad (\because \text{Stokesの定理})$$

$$=\int_E\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy\right)dy$$

$$+\int_E f(x,y)\,\underbrace{d(dx)}_{=0} + g(x,y)\,\underbrace{d(dy)}_{=0}$$

$$=\int_E\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\,dx+\frac{\partial g}{\partial x}dx\,dy\right) \quad \left(\because \begin{array}{l} dx\,dx = dy\,dy = 0 \\ d(dx)=d(dy)=0\end{array}\right)$$

$$=\int_E\left(-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\,dy \quad (\because dy\,dx = -dx\,dy)$$

により導ける。詳しくは解析概論D.で

〈Cauchyの積分定理〉

定義4.3 (単純閉曲線)

自己交叉しない

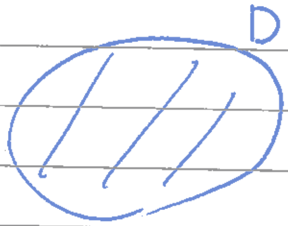
$C : \varphi(t)\ (a\le t\le b)$が単純閉曲線

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(a)=\varphi(b)$，$a<{}^{\forall}x, y<b$に対し$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow x=y$ ▨

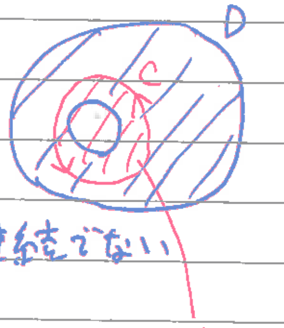
定義4.4（単連結領域）

領域 $D\subset\mathbb{C}$ が単連結領域

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ D 内の $^{\forall}$閉曲線 C に対し，C で囲まれた領域を E とすると $E\subset D$ ▨



単連結領域



単連結でない

$E\not\subset D$

定理4.3（Cauchyの積分定理）

$D\subset\mathbb{C}$：単連結領域，

$f:D\to\mathbb{C}$　D 上正則，

C：D 内の単純閉曲線

$$\Longrightarrow \int_C f(z)\,dz=0$$

▨

証明

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$　$(z=x+iy\in D)$

とおくと．命題4.2より

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C(u\,dx-v\,dy)+i\int_C(v\,dx+u\,dy)$$

となる．

ここで C の囲む領域 E に Green の定理を用いると

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = \iint_E \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

$$\int_C (v\,dx + u\,dy) = \iint_E \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy$$

となるから

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_E \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\iint_E \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy$$

$$= 0 \quad \left(\because \text{Cauchy-Riemann の方程式より } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

となる. □

注意 4.4

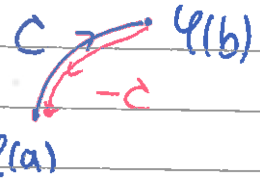
我々の正則の定義は「微分可能」のみであり、導関数の連続性は仮定していないため、この証明は本質的に正しくない. 厳密に示すためには Green の定理を用いずに示す必要がある.
この講義では、数学的厳密さはとりあえずおいておき、計算できることを目標にするため、これ以上たちいらないことにする. くわしくは アールフォルス などを参照せよ.

〈曲線の向き〉

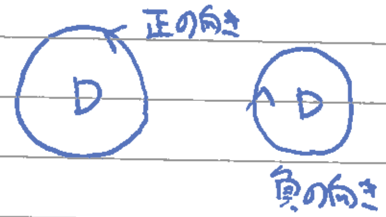
曲線 $C : \varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ について.
向きを強調するときは $C : \varphi(t)$ $t : a \to b$
とかく. このとき.

$$-C : \varphi(t) \quad t : b \to a$$

である.

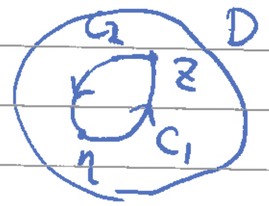


閉曲線の進む向きについて. 曲線の内側が左を向く向きを正の向きという.
正の向きと逆の向きを負の向きという.



〈不定積分〉

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則
$\eta, z \in D$ とする. 曲線 $C_i : \varphi_i(t)$ $t : a \to b$
$(i=1,2)$ が $\varphi_i(a)=\eta$, $\varphi_i(b)=w$ とすると.
$C_1 - C_2$ は閉曲線となる.



$C_1 - C_2$ が単純閉曲線なら. Cauchyの積分定理より

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)\,dz = 0$$

となるから.

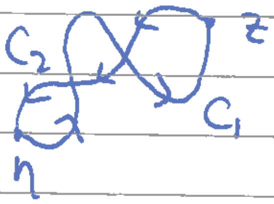
$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

すなわち

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

となり，曲線のとり方に依らないことがわかる。

$C_1 - C_2$ が単純閉曲線でないときは自己交叉する点で区切って Cauchy の積分定理を用いれば同様の結果が得られる



定理 4.4

$D \subset \mathbb{C}$：単連結領域，$f: D \to \mathbb{C}$ D上正則。
$z, \eta \in D$，C_1, C_2：始点η，終点zの曲線

$$\Rightarrow \quad \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

▨

定義 4.5

単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ と，$z, w \in D$，始点w，終点zの曲線Cに対し

$$\int_{w}^{z} f(\eta)d\eta := \int_{C} f(z)dz$$

と定める。$\int_w^z f(\eta)d\eta$ をfの不定積分という。

▨

www.generatedpaper.com/en

不定積分に対し実数の微積分と同様のことが成り立つ

定理 4.5

$D \subset \mathbb{C}$:単連結領域, $f: D \to \mathbb{C}$ D上正則

F : fの不定積分

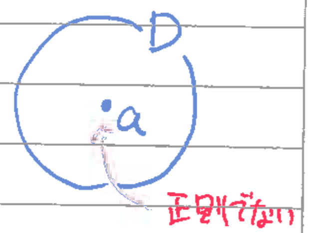
$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} = f \quad \text{in } D$$

∎

証明は洲之内-猪股 (p.60 定理4.2) を参照せよ.

この講義ではこれ以上このことに触れない.

$D \subset \mathbb{C}$ 内に正則でない点がある場合を考える. 話をかんたんにするため, $a \in D$ で正則でない場合を考える.



定理 4.6

$D \subset \mathbb{C}$:単連結領域, $a \in D$

$f: D\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$, $D\setminus\{a\}$上正則

C_1, C_2 : $D\setminus\{a\}$内の単純閉曲線

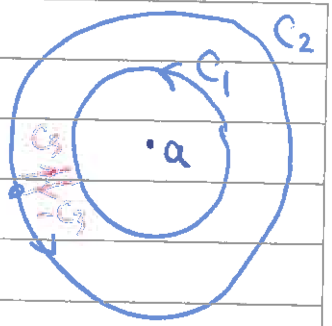
aを内側に含む. (互いに交わらない)

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

ただし閉曲線の向きは正の向きとする.

∎

証明



右図のように C_3 をとると
$C_2+C_3-C_1-C_2$
の内側で f は
正則だから, Cauchyの
積分定理より

$$\int_{C_2+C_3-C_1-C_2} f(z)\,dz = 0$$

となる. よって

$$\int_{C_2} f(z)\,dz+\int_{C_3} f(z)\,dz-\int_{C_1} f(z)\,dz-\int_{C_3} f(z)\,dz=0$$

より

$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz$$

となる. □

※実際に定理4.6を用いるとき, C_1 を原点 a, の円ととることが多い.

定理4.6の証明の議論をくり返せば, 次のように一般化できる.

定理4.7

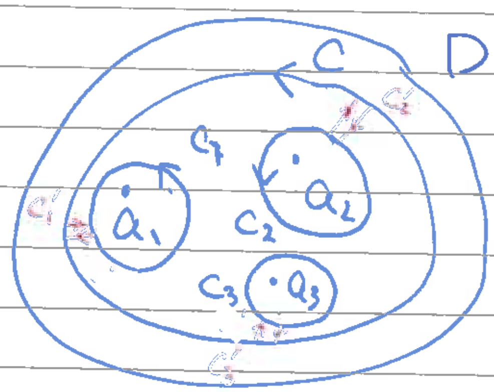
$D \subset \mathbb{C}$：単連結領域，$a_1, \cdots, a_n \in D$.
$f : D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$：$D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$上正則，
C：$D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$内の単純閉曲線で$a_1, \ldots, a_n$を
Cの内側に含む，
C_i：$D \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$内の単純閉曲線で$a_i$を
C_iの内側に含み，他のa_jは内側に含まない

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

ただし，閉曲線の向きは正の向きにとる. ☒

証明のアイデア

右図のように
各a_iごとに
補助的な
曲線を作り
Cauchyの積分定理
を用いればよい.



例4.4

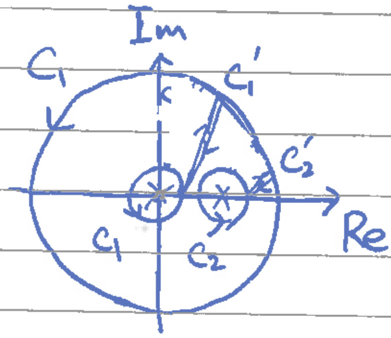
$\mathbb{C}$上の原点中心，半径2の円を$C = \{|z| = 2\}$と
するとき

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)} = 0$$

となる. ☒

証明

被積分関数 $\frac{1}{z(z-1)}$ は $z=0,1$ で正則でない。



右図のような
補助積分路
$C_1: \frac{1}{3}e^{i\theta}$ $\theta: 0\to 2\pi$,
$C_2: 1+\frac{1}{3}e^{i\theta}$ $\theta: 0\to 2\pi$,
C_1', C_2'' をとれば
Cauchyの積分定理から

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)} = \int_{C_1} \frac{dz}{z(z-1)} + \int_{C_2} \frac{dz}{z(z-1)}$$

となる。

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z(z-1)} = \int_{C_1} \frac{1}{z-1}dz - \int_{C_1} \frac{1}{z}dz$$

$$= 0 - 2\pi i$$ (∵ Cauchyの積分定理 定理4.1)

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z(z-1)} = \int_{C_2} \frac{1}{z-1}dz - \int_{C_2} \frac{1}{z}dz$$

$$= 2\pi i - 0$$ (∵ Cauchyの積分定理, 定理4.1)

だから

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)} = (0-2\pi i) + (2\pi i - 0) = 0$$

となる。 □

第5章 Cauchyの積分公式と定積分への応用

§5.1 Cauchyの積分公式

<u>定理5.1</u> (Cauchyの積分公式)

$D \subset \mathbb{C}$：領域，$f: D \to \mathbb{C}$ D上正則，$a \in D$.

$D_R(a) \subset D$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$$ ☒

〈Cauchyの積分定理のイミ〉

正則関数の1点の値は，そのまわりの積分で決定してしまう．

<u>定理5.1の証明</u>

<u>1.</u> $f(z) = f(a) + (f(z) - f(a))$ だから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz$$

$$=: I_1 + I_2 \qquad -(*)$$

とかける．定理4.1より

$$I_1 = \frac{f(a)}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{dz}{z-a} = f(a) \qquad -(**)$$

となる．

<u>2.</u> $I_2 = 0$ を示す．$\forall \varepsilon > 0$ に対し，f は a で連続より $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall z \in D$ に対して

$$|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

とできる．よって $0 < \forall r < \frac{\delta}{2}$ に対し，

Cauchyの積分定理より

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})-f(a)}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta\right|$$

（$|z-a|=r$ を $a+re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ と表示した）

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})-f(a)|\,d\theta$$

$$\leq \varepsilon \qquad (\because |a+re^{i\theta}-a| = r < \delta)$$

となる。$\varepsilon>0$ は任意であり，$|I_2|$ は ε に依らないので $\varepsilon\downarrow 0$ とすると $|I_2|=0$，すなわち

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0 \quad \text{—(***)}$$

となる。(*) (**)，(***) より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$$

がわかった。 □

例 5.1

C を原点中心，半径 2 の上半円 + $(-2,0)\to(2,0)$ への線分とすると

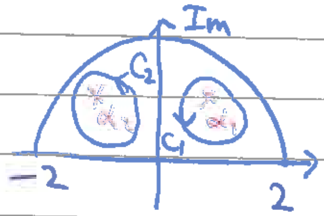
$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

四

証明

1. $\alpha_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$，$\alpha_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$，
$\alpha_3 = e^{\frac{5}{4}\pi i}$，$\alpha_4 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$

とすると。



$$1+z^4 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)$$

であり、α_1, α_2 は C の内側にある。

C_1, C_2 をそれぞれ α_1, α_2 中心、半径 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ の円とするとCauchyの積分定理より

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = \int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{C_2} \frac{dz}{1+z_4}$$

となる。

2. $$\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}}{(z-\alpha_1)} dz$$

とかくと、$\frac{1}{(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}$ は C_1 の内側で正則なのでCauchyの積分公式から

$$\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{2\pi i}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi(1-i) \quad \text{(答)}$$

となる。

3. $$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}}{(z-\alpha_2)} dz$$

とかくと $\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}$ は C_2 の内側で正則なのでCauchyの積分公式から

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{2\pi i}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi(1+i) \quad \text{(答)}$$

となる。

以上により

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi(1+i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。 □

定理5.2 (Cauchyの積分公式)

$D \subset \mathbb{C}$：領域，$f : D \to \mathbb{C}$：D上正則，$a \in D$

$\Rightarrow$ fはaで無限回微分可能，

$n \in \mathbb{N}$ と $D_R(a) \subset D$ となる $R>0$ に対し

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$ □

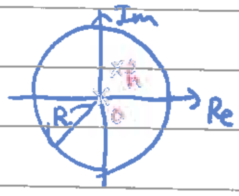
証明 かんたんのため $a=0$で示す。

1. $n=1$のとき。

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$ だから，Cauchyの

積分公式より，$|h|<\frac{R}{2}$となる $h\in\mathbb{C}$に対し

$$\frac{1}{h}(f(h)-f(0)) = \frac{1}{2\pi i h}\int_{\{|z|=R\}}\left(\frac{f(z)}{z-h} - \frac{f(z)}{z}\right)dz$$



$$= \frac{1}{2\pi i h}\int_{\{|z|=R\}}\frac{h f(z)}{z(z-h)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}}\frac{f(z)}{z(z-h)}dz$$

となる。形式的には $h\to 0$とすれば求めたい

結果が得られる。これを正当化する。

2. $\left| \frac{1}{h}(f(h)-f(0)) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}} \frac{f(z)}{z^2}dz \right|$

$= \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}} \left(\frac{f(z)}{z(z-h)} - \frac{f(z)}{z^2} \right) dz \right|$ ―(*)

となる。ここで

$$\frac{1}{z(z-h)} - \frac{1}{z^2} = \frac{z-(z-h)}{z^2(z-h)} = \frac{h}{z^2(z-h)}$$

であり $|z|=R$ ならば

$$|z-h| \geq |z| - |h| = R - |h| \geq \frac{1}{2}R$$

だから

$$(*) \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\{|z|=R\}} \left| \frac{hf(z)}{z^2(z-h)} \right| dz \right|$$

$$\leq \frac{|h|}{2\pi}\left|\int_{\{|z|=R\}} \frac{M}{R^2 \frac{R}{2}} dz \right| \quad \left(M := \sup_{z\in D}|f(z)| \text{ とおく} \right)$$

$$= \frac{2M|h|}{R^2} \to 0 \quad (h \to 0)$$

となるから

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}} \frac{f(z)}{z^2}dz$$

がわかる。

3. $n \in \mathbb{N}$ で定理が成り立つとすると $|h| < \frac{R}{2}$ をみたす $h \in \mathbb{C}$ に対し

$$\frac{1}{h}(f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)) = \frac{n!}{2\pi i h}\int_{\{|z|=R\}} \left(\frac{f(z)}{(z-h)^{n+1}} - \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right) dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i h}\int_{\{|z|=R\}} \frac{z^{n+1} - (z-h)^{n+1}}{z^{n+1}(z-h)^{n+1}} f(z)dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}} \frac{(n+1)z^n + R_n(z,h)}{z^{n+1}(z-h)^{n+1}} f(z)\,dz$$

となる ただし、

$(z-h)^{n+1} = z^{n+1} - (n+1)z^n h + R_n(z,h)h$

とかいた。このとき $R_n(z,h) \to 0 \quad (h\to 0)$ である

形式的に $h \to 0$ とすれば

$$f^{(n+1)}(0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\{|z|=R\}} \frac{f(z)}{z^{n+2}}\,dz$$

となる。厳密に示すには

$$\frac{(n+1)z^n + R_n(z,h)}{z^{n+1}(z-h)^{n+1}} - \frac{n+1}{z^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)z^{n+1} + zR_n(z,h) - (n+1)(z-h)^{n+1}}{z^{n+2}(z-h)^{n+1}}$$

$$= \frac{zR_n(z,h) + (n+1)^2 z^n h + (n+1)R_n(z,h)h}{z^{n+2}(z-h)^{n+1}}$$

を用いて、$|z| = R$ のとき、

(分子) $\to 0 \qquad (h \to 0)$

$|(\text{分母})| \geq \frac{1}{2^{n+1}} R^{2n+3}$

となることを用いて、$n=1$ のときと同様にすればよい □.

例5.2

$$\int_{\{|z-1|=1\}} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(5z^2-3z+2)''\Big|_{z=1} \quad \left(\begin{array}{l}\because \text{Cauchyの積分公式}\\ 5z^2-3z+2\text{は}\mathbb{C}\text{上正則}\end{array}\right)$$

$= 10\pi i$ □

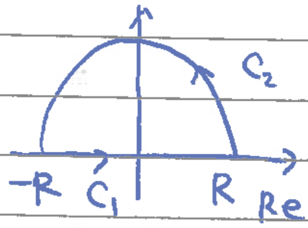
§5.2 定積分への応用

例5.3

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

証明

1. $z\in\mathbb{C}$ に対し $\frac{1}{1+z^4}$ を考えて
$R>0$ に対して右図の積分路



$C_1 : t \quad t: -R\to R,$

$C_2 : Re^{i\theta} \quad \theta: 0\to\pi$

を考える. $R>2$ に対し 例5.1とCauchyの積分定理より

$$\int_{C_1+C_2}\frac{dz}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \qquad —(*)$$

となる.

2. $$\int_{C_1}\frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^{R}\frac{dt}{1+t^4} = 2\int_0^R\frac{dx}{1+x^4}$$

$$\to 2\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4} \quad (R\to\infty)$$

となる.

3. $\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^4}$ を評価する.

$$\left|\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^4}\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{iRe^{i\theta}\,d\theta}{1+R^4e^{4i\theta}}\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left|\frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}}\right|d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\frac{R}{R^4-1}\,d\theta \quad \left(\because\ |1+R^4e^{4i\theta}| \geq |R^4e^{4i\theta}|-|1|\right)$$

$$= \frac{2\pi R}{R^4-1} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

4. (*)で $R\to\infty$ とすれば

$$2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

だから $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ となる。 □

例5.2

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a>b>0)$$

証明

$z=e^{i\theta}$ とおくと、
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \\ \quad\quad = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \end{cases}$$

より

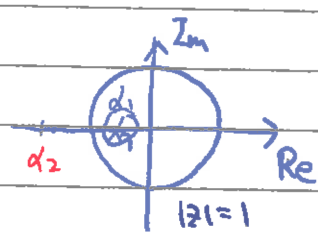
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \int_{\{|z|=1\}} \frac{1}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{d\theta}{iz}$$
$$= \frac{2}{i}\int_{\{|z|=1\}} \frac{dz}{bz^2+2az+b}$$

となる。$bz^2+2az+b=0$ となる z は

$$\alpha_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \alpha_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

となるが $\alpha_2 < -1 < \alpha_1 < 0$ に注意すると

$\{|z|=1\}$ の内側で正則でない点は α_1 のみである。



$$\left(\because\ \alpha_2 < \frac{-a}{b} < -1, \quad \sqrt{a^2-b^2} > a-b \right)$$

よって、Cauchyの積分定理，積分公式を用いると

$$\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2+2az+b} = \frac{2}{ib}\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{(z-\alpha_2)}}{(z-\alpha_1)}\,dz$$

$$= \frac{2}{ib}\,\frac{2\pi i}{(\alpha_1-\alpha_2)}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (答)$$

すなわち

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

となる。 □

注意

$z=e^{i\theta}$ の変換は $\sin\theta, \cos\theta$ の有理式の積分で有効なことが多い。

例5.5

$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-m}$$

問

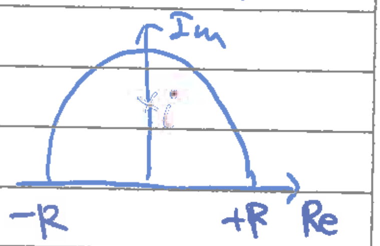
証明

1. $f(z)=\dfrac{e^{imz}}{1+z^2}$ を考えると正則でない点は

$z=\pm i$ となる. $R>1$ に対し

$C_1 : t \quad t: -R \to R$

$C_2 : Re^{i\theta} \quad \theta : 0 \to \pi$



を考えると. Cauchyの積分公式から

$$\int_{C_1+C_2} \frac{e^{imz}}{1+z^2}dz = \frac{(e^{imi})2\pi i}{(i+i)} = \pi e^{-m} \quad (*)$$

となる.

2. $$\int_{C_1} \frac{e^{imz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{imt}}{1+t^2}dt$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(mx)}{1+x^2}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(mx)}{1+x^2}dx$$

となる.

3. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{imz}}{1+z^2}dz$ を評価する.

$$\left|\int_{C_2} \frac{e^{imz}}{1+z^2}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{imRe^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R\left|e^{imRe^{i\theta}}\right|}{R^2-1} d\theta \quad \left(\because |1+R^2e^{2i\theta}| \geqq R^2-1\right)$$

であり.

$$\left|e^{imRe^{i\theta}}\right| = \left|e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta}\right|$$

$$= e^{-mR\sin\theta} \leq 1 \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

より

$$\left|\int_{C_2} \frac{e^{imz}}{1+z^2}dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}d\theta = \frac{2\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

よって (*) で $R\to\infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(mx)}{1+x^2}dx=\pi e^{-m}$$

となるから実部を比較すればよい　□

例15.6

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

証明

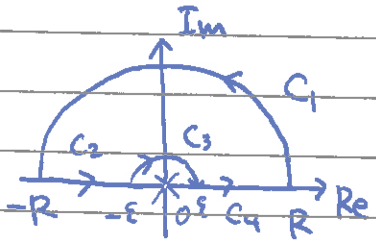
1. $\frac{e^{iz}}{z}$ を考えると、$z=0$ で正則でないので $R,\varepsilon>0$ に対して

$C_1 : Re^{i\theta}$　$\theta : 0\to\pi$

$C_2 : t$　$t : -R\to-\varepsilon$

$C_3 : \varepsilon e^{i\theta}$　$\theta : \pi\to 0$

$C_4 : t$　$t : \varepsilon\to R$



を考える。$\frac{e^{iz}}{z}$ は $C_1+C_2+C_3+C_4$ の内側で正則だから Cauchy の積分定理により

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \qquad -(*)$$

2. $$\left|\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-R\sin\theta}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

$$=2\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$\leq 2\int_0^{\pi/2}e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \quad \left(\because 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\text{ のとき } \sin\theta\geq\frac{2}{\pi}\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right)\to 0 \quad (R\to\infty)$$

3. $\displaystyle\int_{C_2+C_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x + i\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x + i\sin x}{x} dx$

$$= 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx \quad \left(\because \begin{array}{l} \frac{\cos x}{x} \text{ 奇関数} \\ \frac{\sin x}{x} \text{ 偶関数} \end{array} \right)$$

4. $\displaystyle\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}-1}{z} dz$

とおける．

$$\int_{C_3} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = -\pi i$$

となる．一方

$$|e^{iz}-1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \right| = |z| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{(n+1)!} \right|$$

$$\leq |z|\, e^{|z|}$$

より

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \right| \leq \left| \int_{+\pi}^{0} \frac{|\varepsilon e^{i\theta}|\, e^{\varepsilon}}{|\varepsilon e^{i\theta}|} |i\varepsilon e^{i\theta}|\, d\theta \right|$$

$$= \varepsilon e^{\varepsilon} \pi \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

以上より．(*)で $R \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0$$

すなわち

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

となる． □

第6章　関数の展開

§6.1　Taylor展開

定理6.1

$D\subset\mathbb{C}$：領域，$f:D\to\mathbb{C}$ D上正則，$a\in D$，
$D_R(a)\subset D$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (6.1)$$

$$=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$

$$(\forall z\in D_R(a))$$

□

定義6.1

定理6.1と同じ記号に対し，(6.1)の級数をfのaを中心とするTaylor展開という。また，$a=0$のときはfのMaclaurin展開という。□

注意6.1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が滑らか(無限回微分可能)であったとしても，Taylor展開できるとは限らない。一方，正則関数は常にTaylor展開できる。□

定理6.1の証明はあとにまわす。

例6.1

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots$$

とTaylor展開できる. また. $a \in \mathbb{C}$に対して

$(e^z)^{(a)}|_{z=a} = e^a$ より

$$e^z = e^a + e^a(z-a) + \frac{e^a}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$
$$= e^a(1 + (z-a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$
$$= e^a e^{z-a}$$

とTaylor展開できる. ☒

定理6.2

$D \subset \mathbb{C}$:領域, $f: D \to \mathbb{C}$ D上正則, $a \in D$,
$c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (6.2)$$

$\Rightarrow$ fの $z=a$におけるTaylor展開は(6.2)に一致する. とくに. $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ となる. ☒

〈定理6.2のイミ〉

正則関数が(6.2)のように巾級数でかけたらそれはTaylor展開になるということ.

証明は問題5.5を用いる. 詳しくは
ジル・ルカルブ? 猪股 p.111 例題1 を参照

例6.2

~~$\frac{1}{1-z}$ の Maclaurin展開は~~

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

となる. また $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ を中心とする
Taylor展開は

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-(z-a)}$$ ← $(z-a)$をつくりだす

$$= \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n$$

となる。 ☑

例16.3

$\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ のMaclaurin展開を z^2の項まで求める.

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

と展開できたとして $(z-1)(z-2)$ではらうと

$$z+1 = (z^2-3z+2)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$= 2a_0 + (2a_1 - 3a_0)z + (2a_2 - 3a_1 + a_0)z^2 + \cdots$$

となる. 係数を比較すると

$$2a_0 = 1,\ 2a_1 - 3a_0 = 1,\ 2a_2 - 3a_1 + a_0 = 0$$

だから $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $a_2 = \frac{13}{8}$, つまり

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}z + \frac{13}{8}z^2 + \cdots$$

となる。 ☑

定義6.2

$D \subset \mathbb{C}$：領域，$f: D \to \mathbb{C}$ D上正則, $a \in D$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots$$

かつ $c_m \neq 0$ となるとき, m を f の a における位数といい, $\mathrm{ord}[f;a]=m$ とかく。また, a を f の m 位の零点という □

例6.4

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots$$

より) $\mathrm{ord}[\sin z; 0] = 1$ となる.

$$\sin(z^2) = z^2 - \frac{1}{3!}z^6 + \frac{1}{5!}z^{10} - \frac{1}{7!}z^{14} + \cdots$$

より) $\mathrm{ord}[\sin(z^2); 0] = 2$ となる. □

つまり $\mathrm{ord}[f;a]=k$ というのは

$$f(z) = (z-a)^k (b_0 + b_1(z-a) + \cdots)$$

かつ $b_0 \neq 0$ とできるということである.

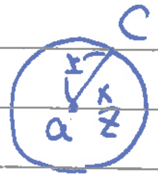
定理6.1の証明

1. $D_r(a) \subset D$ となる $r>0$ に対し,

$C := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - a| = r\}$

とおくと $z \in D_r(a)$ に対し, Cauchyの積分公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$



となる. ところで $\zeta \in C$ に対して

$$\frac{|z-a|}{|\varsigma-a|}=\frac{|z-a|}{r}=:q<1 \quad (\because |z-a|<r)$$

だから

$$\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{1}{\varsigma-a-(z-a)}$$

$$=\frac{1}{\varsigma-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\varsigma-a}}=\frac{1}{\varsigma-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\varsigma-a}\right)^n$$

となる。

2. 形式的には

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-a)^{n+1}}(z-a)^n d\varsigma$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-a)^{n+1}}d\varsigma\right)(z-a)^n \quad (\text{形式的})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad \left(\because \text{Cauchyの積分公式}\right)$$

となり証明がおわる。

3. 形式計算を証明するために

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-a)^{n+1}}d\varsigma\,(z-a)^n\to\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$$

$$(N\to\infty)$$

を示す。$M:=\sup_{\varsigma\in C}\{|f(\varsigma)|\}<\infty$ に注意すると

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_C |f(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n - \frac{1}{\zeta-z} \right| d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \left| \int_C \frac{1}{|\zeta-a|} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n d\zeta \right|$$

$$= \frac{M}{2\pi r} \frac{q^{N+1}}{1-q} 2\pi r \quad \left(\because |\zeta - a| = r \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n = \frac{q^{N+1}}{1-q} \right)$$

$$= \frac{M q^{N+1}}{1-q} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

となるので

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n$$

が得られた。 □

§6.2 Laurent展開と特異点解析

定義6.3 (特異点)

$D\subset\mathbb{C}$：領域，$a\in D$, $f:D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$.

aがfの特異点 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ fはaで微分可能でない。

aがfの孤立特異点 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ aはfの特異点

$\exists U$：aの近傍 s.t.

fは$U\setminus\{a\}$上正則 □

◎孤立特異点を中心とする展開を作りたい。

定義6.4 (Laurent展開)

$D\subset\mathbb{C}$：領域，$a\in D$, $f:D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$, $D\setminus\{a\}$上正則.

孤立特異点 a を中心とするfのLaurent展開を

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (6.3)$$

で定義する。 □

Laurent展開可能性はあとで示すことにして，計算法を先に説明する。

定理6.3

$D\subset\mathbb{C}$：領域，$a\in D$, $f:D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$, $D\setminus\{a\}$上正則.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (6.4)$$

と展開できたとすると，fの$z=a$における

Laurent展開は(6.4)に一致する。 □

証明は汐川之内一橋股 p.118 を参照

例6.5

$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ の $z=1$ を中心とするLaurent展開を求める。

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1}\,\frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$= \frac{-1}{z-1}\left(1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots\right.$$

より

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n \qquad (*)$$

となる。収束半径を考えると $z \in D_1(1)$ で $(*)$ は成り立つ

□

例6.6

$z^2e^{-\frac{1}{z}}$ の $z=0$ を中心とするLaurent展開を求める。

$$z^2e^{-\frac{1}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{2}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2-n} = z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \cdots$$

となる

□

定義6.5 (極と留数)

$D \subset \mathbb{C}$：領域，$a \in D$，$f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$，$D\setminus\{a\}$ 上正則

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (\text{Laurent展開})$$

① c_{-1} を f の a における留数(residue)といい，

$\mathrm{Res}[f; a] := c_{-1}$ で表す。

④ $k \in \mathbb{N}$ に対し a が f の k 位の極

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $c_{-k} \neq 0$, $c_{-(k+1)} = c_{-(k+2)} = \cdots = 0$ ☑

例6.7

例6.5において $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ は $z=1$ において 1位の極であり, $\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z-2)}; 1\right] = -1$ である. ☑

極の判定法を与えよう.

定理6.4

$D \subset \mathbb{C}$: 領域, $f, g : D \to \mathbb{C}$ D上正則. $a \in D$

$\mathrm{ord}[f; a] = n < m = \mathrm{ord}[g; a]$

$\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ は $z=a$ で $(m-n)$ 位の極 ☑

証明の概略

$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots$

$g(z) = d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots$

とTaylor展開したとき, $c_n, d_m \neq 0$ であり

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots}{d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots}$$

$$= \frac{c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots}{d_m(z-a)^{m-n} + d_{m+1}(z-a)^{m-n+1} + \cdots}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(z-a)^{m-n}}}_{\text{特異点}} \cdot \underbrace{\frac{c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots}{d_m + d_{m+1}(z-a) + \cdots}}_{\text{正則}}$$

だから $\frac{f}{g}$ は $z=a$ で $(m-n)$ 位の極となる

□

例6.8

$\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開

を z^0 の項まで求める．$z^3+5z^2=z^2(z+5)$ より

$z=0$ で2位の零点となる．一方 $z-3$ は

$z=0$ で零点ではないので $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$ は $z=0$

で2位の極となる．よって

$$\frac{z-3}{z^3+5z^2}=C_{-2}z^{-2}+C_{-1}z^{-1}+C_0z^0+C_1z+\cdots$$

と展開できる．z^3+5z^2 を両辺にかけることで

$$-3+z=(5z^2+z^3)(C_{-2}z^{-2}+C_{-1}z^{-1}+C_0+\cdots)$$
$$=5C_{-2}+(5C_{-1}+C_{-2})z+(5C_0+C_{-1})z^2+\cdots$$

だから係数をそれぞれ比較して

$$C_{-2}=-\frac{3}{5},\quad C_{-1}=\frac{8}{25},\quad C_0=\frac{-8}{125}$$

がわかる．とくに $\mathrm{Res}\left[\frac{z-3}{z^3+5z^2};0\right]=\frac{8}{25}$

である． ■

ところで，Cauchy の積分公式より

$$\int_{\{|z|=1\}}\frac{z-3}{z^3+5z^2}dz=\int_{\{|z|=1\}}\frac{\frac{z-3}{z+5}}{z^2}dz$$
$$=2\pi i\left(\frac{z-3}{z+5}\right)'\Big|_{z=0}$$
$$=2\pi i\left(\frac{(z+5)-(z-3)}{(z+5)^2}\right)\Big|_{z=0}$$
$$=2\pi i\left(\frac{8}{25}\right)=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z-3}{z^3+5z^2};0\right]$$

となる. また、形式的に定理4.1を用いると

$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{z-3}{z^3+5z^2}\,dz = \int_{\{|z|=1\}} (c_{-2}z^{-2}+c_{-1}z^{-1}+c_0+\cdots)\,dz$$

$$= 2\pi i\, c_{-1} \quad \left(\because \int_{\{|z|=1\}} z^{-m}\,dz = 2\pi i\, \delta_{m,(-1)}\right)$$

$$= 2\pi i\, \mathrm{Res}\left[\frac{z-3}{z^3+5z^2};0\right]$$

となり、複素積分は留数と関係がある

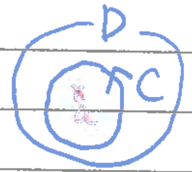
ことが推察できる. 実際に次が成り立つ.

定理6.5（留数定理）

$D\subset\mathbb{C}$:単連結領域, $a\in D$, $f:D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ $D\setminus\{a\}$上正則

C: D内の単純閉曲線, aを内側に含む

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \mathrm{Res}[f;a]$$



例6.9

$\frac{e^z}{z^{n+1}}$ の $z=0$ におけるLaurent展開を z^0

の項まで求める. $\mathrm{ord}[e^z;0]=0$, $\mathrm{ord}[z^{n+1};0]=n+1$

より $\frac{e^z}{z^{n+1}}$ は $z=0$で$(n+1)$位の極となる。よって

$$\frac{e^z}{z^{n+1}} = c_{-(n+1)}z^{-(n+1)}+c_{-n}z^{-n}+\cdots$$

$$+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

と展開すると. $e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$

だから. z^{n+1} をはらうと

$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$

$=C_{-(n+1)}+C_{-n}z+C_{-(n-1)}z^2+$

$\cdots+C_{-1}z^n+C_0z^{n+1}+C_1z^{n+2}+\cdots$

となる. 係数を比較することで

$C_{-(n+1)}=1,\ C_{-n}=1,\ C_{-(n-1)}=\frac{1}{2!},\ \cdots$

$,C_{-1}=\frac{1}{n!},\quad C_0=\frac{1}{(n+1)!},\ \cdots$

がわかる. また $\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^{n+1}};0\right]=\frac{1}{n!}$ である.

よって留数定理より

$$\int_{\{|z|=1\}}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^{n+1}};0\right]=\frac{2\pi i}{n!}$$

となる. 他方, $\{|z|=1\}$ を $e^{i\theta}$ $(\theta:0\to 2\pi)$ と表すと

$$\int_{\{|z|=1\}}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i(n+1)\theta}}(e^{i\theta})'d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{(e^{i\theta}-in\theta)}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{(\cos\theta+i(\sin\theta-n\theta))}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\{\cos(\sin\theta-n\theta)$$

$$+i\sin(\sin\theta-n\theta)\}d\theta$$

となるから. 実部, 虚部を比較すると

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta-n\theta))d\theta=\frac{2\pi}{n!},$$

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}(\sin(\sin\theta-n\theta))d\theta=0$$

がわかる. □.

定理6.6

$D\subset\mathbb{C}$;領域, $a\in D$, $f:D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$, $D\setminus\{a\}$上正則

$\Rightarrow$ aの近傍Uにおいて

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (z\in U\setminus\{a\})$$

とLaurent展開できる □

証明

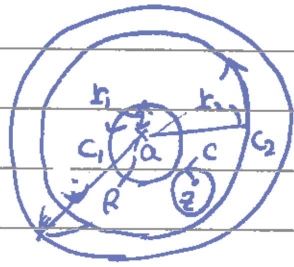
$R>0$ を $D_R(a)\subset D$ となるようにとる

1. $z\in D_R(a)$ に対し

$|z-a|=:\rho$ とおき,

$0<r_1<\rho<r_2<R$

なる $r_1,r_2>0$ をとり



$C_1:=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-a|=r_1\}$

$C_2:=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-a|=r_2\}$

$C:=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-z|=\varepsilon\}$

なる曲線をとる. ただし, CはC_1, C_2と交わらないように $\varepsilon>0$ を十分小さくとる. すると

Cauchyの積分定理より

$$\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

となり, Cauchyの積分公式

$$\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i\,f(z)$$

より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

となる.

2. C_2上では $|z-a| < |\zeta - a|$ だから.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)}$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

とかくと, 右辺の級数は 広義一様絶対収束する. よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n \quad —(*)$$

となる.

3. C_1上では $|\zeta - a| < |z-a|$ だから

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(a-z)+(\zeta - a)}$$

$$= -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^n$$

とかくと, 右辺の級数は広義一様絶対収束する. よって

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_1} (\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \quad —(**)$$

となる.

4. (*)(**) より

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(\zeta-a)^n f(\zeta)\,d\zeta\right)(z-a)^{n+1}$$

となる. ここで 右辺の被積分関数は $\zeta=a$ を
のぞいて正則だから $C_1=C_2$ としてよい
(つまり $r_1, r_2 \to \rho$ としてよい). 以上により

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$$

が得られる. ただし, C_0 は a を中心とする
D内の円である. □

〈複素積分とは何か?〉
複素関数の特異性, 正則性を定理的に表したもの.

〈項別積分の十分条件〉
定理 6.7
$D\subset\mathbb{C}$: 領域, C: D内の曲線, $f_n: C\to\mathbb{C}$ C上連続
〈仮定〉
$f=\exists\sum_{n=1}^{\infty}f_n$: C上の連続関数,
$0<\exists q<1$, $\exists M>0$ s.t. $|f_n(z)|\le Mq^n$ ($\forall z\in C, n\in\mathbb{N}$)
〈結論〉

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz$$ ☒

証明

$C:\varphi(t)\ (t:\alpha\to\beta)$ と表すと

$$\left|\int_C f(z)dz - \sum_{n=1}^{N}\int_C f_n(z)dz\right|$$

$$\leq \left|\int_\alpha^\beta \left|f(\varphi(t)) - \sum_{n=1}^{N} f_n(\varphi(t))\right| |\varphi'(t)|dt\right|$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(\varphi(t))\right| |\varphi'(t)|dt\right|$$

$$\leq \left|\int_\alpha^\beta \sum_{n=N+1}^{\infty} Mq^n\ |\varphi'(t)|dt\right|$$

$$= \frac{M\,q^{N+1}}{1-q}L \quad \left(L=\left|\int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|dt\right| \text{ は 曲線}C\text{の長さ}\right)$$

となる。$N\to\infty$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$$

となる。 □

Taylor 展開, Laurent 展開においては定理 6.7の仮定はみたされることが多い。

〈まとめ〉

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$$

つまり、複素積分は関数の展開における係数を表している。