複素関数論序論 演習問題 (2015年10月2日)

問題 1.1.

次の複素数を $a+ib$ の形で表せ.

(1) $\dfrac{1}{a+ib} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

(2) i^4

(3) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(4) $\dfrac{1}{1+i+i^2}$

問題 1.2.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して, 次の等式を示せ.

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(3) $|\overline{z_1}| = |z_1|$

問題 1.3.

次の複素数の極形式を求めよ. 必要に応じて, arctan を用いてよい.

(1) $1-i$

(2) $2+i$

(3) $10+\sqrt{3}i$

問題 1.4.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

問題 1.5.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}$ と極形式で書いたとき

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

となることを示せ.

問題 1.6.

$\left(\dfrac{\sqrt{3}i-1}{\sqrt{3}i+1}\right)^6$ を計算せよ.

問題 1.7.

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ を用いて表せ.

複素関数論序論 演習問題　(2015 年 10 月 9 日)

問題 2.1.

次の極限を求めよ.

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{(z-i)(z+1)}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)^3-z_0^3}{h} \quad (z_0\in\mathbb{C})$$

問題 2.2.

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$||z|-|w|| \leq |z-w|$$

を示せ (ヒント: $z = w + (z-w)$, $w = z + (w-z)$ を用いる).

問題 2.3.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して, $z_n \to z$ $(n\to\infty)$ をみたすならば, $|z_n| \to |z|$ $(n\to\infty)$ となることを示せ.

問題 2.4.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ と $z, w \in \mathbb{C}$ に対して, $z_n \to z$, $w_n \to w$ $(n\to\infty)$ をみたすならば, $z_n + w_n \to z + w$ $(n\to\infty)$ となることを示せ.

以下, 複素級数の基本的性質に関する問題を出す. 講義中に証明抜きに使うことがある.

定義 2.1.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対し, 部分和 $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ が $s\in\mathbb{C}$ に収束する, すなわち $s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k$ となるとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は s に収束するといい, $s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ と書く.

問題 2.5.

$c\in\mathbb{C}$ が $|c|<1$ をみたすとき, $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1}$ が収束し $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1} = \dfrac{1}{1-c}$ となることを示せ.

問題 2.6.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $x_n := \operatorname{Re} z_n$, $y_n := \operatorname{Im} z_n$ に対して次を示せ.

$$\text{複素数値級数}\sum_{n=1}^{\infty} z_n\text{が収束} \iff \text{実数値級数}\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n\text{が収束}$$

定義 2.2.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対し, 実数値級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき, 複素数値級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束するという.

問題 2.7.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するならば, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束することを示せ.

複素関数論序論 演習問題　(2015 年 10 月 16 日)

問題 3.1.

次の関数を微分せよ. 括弧は展開しなくてよい.

(1) $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z - 1}{z^2 - 1}$

(2) $f(z) = (1 - 3z + z^2)^3$

(3) $(z^3 + 2i)^6$

(4) $(4iz^2 + 3)^4$

問題 3.2.

$z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, 1 の n 乗根, すなわち $z^n = 1$ のすべての解が

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}$$

の形で書けることを示せ (ヒント: de Moivre の定理を使う).

問題 3.3.

$(a + bi)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i$ を $a^2 + b^2 = 1$ を仮定して (つまり $|a + bi| = 1$ として) 解くことにより, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos(22.5^\circ)$ と $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sin(22.5^\circ)$ を求めよ.

複素関数論序論 演習問題 (2015 年 10 月 23 日)

問題 4.1.

次の関数が正則であるかどうかを調べ, 正則ならば $f'(z)$ を求めよ.

(1) $f(z) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 + 5 + i(4x^3y - 4xy^3) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$

(2) $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$

(3) $f(z) = \operatorname{Im} z \quad (z \in \mathbb{C})$

(4) $f(z) = z + \dfrac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$

(5) $f(z) = xy \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$

(6) $f(z) = x^2 + iy^2 \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$

問題 4.2.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : D \to \mathbb{C} \quad (z = x + iy \in D)$ を D 上正則とする. このとき, 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

問題 4.3.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : D \to \mathbb{C} \quad (z = x + iy \in D)$ を D 上正則とする.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

とおく (∂ と d が違うことに注意).

(1) f が正則であることと $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ が同値であることを示せ. さらに, このとき $f' = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を示せ.

(2) 次を示せ.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$$

問題 4.4 (難).

問題 4.3 の記号をそのまま使う.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}, \ \dfrac{\partial}{\partial y} = i\dfrac{\partial}{\partial z} - i\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ を示せ (ヒント: z, $\overline{z}$ をそれぞれ x, y で微分してみよ).

(2) (1) を用いて, (4.1) を導出せよ.

複素関数論序論 演習問題 (2015 年 10 月 30 日)

問題 5.1.

次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $1 + z + 2z + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots$

(2) $1 - z + \dfrac{1}{2^2}z^2 - \dfrac{1}{3^2}z^3 + \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{n^2}z^n + \cdots$

(3) $1 + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{2}{3}z^2 + \dfrac{3}{4}z^3 + \cdots + \dfrac{n}{n+1}z^n + \cdots$

(4) $a, b, c > 0$ に対して,

$$1 + \frac{ab}{1c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3c(c+1)(c+2)}z^3 + \cdots$$

問題 5.2.

$\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \dfrac{1}{\rho} \quad (n \to \infty)$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ の収束半径を求めよ (ヒント: $w = z^2$ とおきかえてみよ).

問題 5.3.

$|z| < 1$ とするとき, 次の級数が表す関数は何か答えよ.

(1) $1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\cdots + (-1)^n z^n + \cdots$.

(2) $z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots + (-1)^{n-1} z^n + \cdots$.

問題 5.4.

$D_r(0)$ で収束する巾級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が与えられ, $z \in D_r(0)$ に対して, $f'(z) = 0$ ならば, $f(z)$ は定数で c_0 に等しいことを示せ (ヒント: 定理 3.3 を繰り返し使い, $z = 0$ を代入してみよ).

問題 5.5.

$D_r(0)$ で収束する 2 つの巾級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ が $D_r(0)$ 上で同じ関数を表すならば, $c_n = d_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ となることを示せ (ヒント: 同じように定理 3.3 を繰り返し使い, $z = 0$ を代入してみよ).

複素関数論序論 演習問題 (2015 年 11 月 6 日)

問題 6.1.

次の巾級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = 1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots$

問題 6.2.

すべての $z\in\mathbb{C}$ に対して $e^z\neq 0$ となることを示せ.

問題 6.3.

$z=x+iy\in\mathbb{C}$ とする.

(1) $\sin z = u(x,y)+iv(x,y)$ と書くとき, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めよ.

(2) $\sin z$ が $\mathbb{C}$ 上 Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを証明せよ.

問題 6.4.

$z=x+iy\in\mathbb{C}$ とする.

(1) $\cos z = u(x,y)+iv(x,y)$ と書くとき, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めよ.

(2) $\cos z$ が $\mathbb{C}$ 上 Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを証明せよ.

問題 6.5.

$z,w\in\mathbb{C}$ に対して, 次を示せ.

(1) $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$

(2) $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$

問題 6.6.

$z\in\mathbb{C}$ に対して $e^{\operatorname{Log} z}=z$ を示せ. また, $\operatorname{Log}(e^{3\pi i})$ を求めよ.

問題 6.7.

$\operatorname{Log}(-1+\sqrt{3}i)$ と $\operatorname{Log}(-\sqrt{3}+i)$, $\operatorname{Log}((-1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+i))$ をそれぞれ求めよ. そして

$$\operatorname{Log}((-1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+i))\neq\operatorname{Log}(-1+\sqrt{3}i)+\operatorname{Log}(-\sqrt{3}+i)$$

となることを確かめよ.

裏につづく

定義 6.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

と定める.

問題 6.8.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, 次を示せ.

(1) $\cosh iz = \cos z$

(2) $\cos iz = \cosh z$

(3) $\sinh iz = i \sin z$

(4) $\sin iz = i \sinh z$

(5) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

問題 6.9.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, 次を求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dz} \cosh z$

(2) $\dfrac{d}{dz} \sinh z$

問題 6.10.

$\cosh z$, $\sinh z$ がそれぞれ Cauchy-Riemann の方程式をみたしていることを示せ.

問題 6.11.

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して, 次を示せ.

(1) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$

(2) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$

複素関数論序論 演習問題　(2015 年 11 月 20 日)

今週の問題の提出は 12 月 4 日とする.

問題 7.1.

次の曲線 C を複素平面上に図示せよ. 向きもわかるように書くこと.

(1) $C : t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2) $C : (1-t) + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

(3) $C : t + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

問題 7.2.

次の曲線 C に沿って, 次の積分を計算せよ. ただし, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ とする.

(1) $\displaystyle\int_C (z+1)\,dz \quad C : t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2) $\displaystyle\int_C (x^2 + iy^3)\,dz \quad C : (1-t) + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

(3) $\displaystyle\int_C x\,dz \quad C : t + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

問題 7.3.

原点から i までの虚軸を C とするとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_C \frac{z}{1+z}\,dz$$

問題 7.4.

次の曲線 C を複素平面上に図示せよ. 向きもわかるように書くこと.

$$C : \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + it & 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}(2-t) + i & 1 \leq t \leq 3 \\ -\dfrac{\pi}{2} + i(4-t) & 3 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{\pi}{2}(t-5) & 4 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

問題 7.5.

問題 7.4 の曲線 C に対して, 次の積分を求めよ. ただし, $x = \operatorname{Re} z$ とする.

(1) $\displaystyle\int_C e^x\,dz$

(2) $\displaystyle\int_C e^{ix}\,dz$

(3) $\displaystyle\int_C \operatorname{Re} e^{iz}\,dz$

問題 7.6.

$A(1)$, $B(1+2i)$, $C(-1+2i)$, $D(-1)$ を複素平面上の 4 点とする. このとき, $ABCD$ の順に進む曲線 γ の式を求めよ.

複素関数論序論 演習問題 (2015 年 12 月 4 日)

問題 8.1.

C を原点 $z=0$ を内部に含む任意の閉曲線とするとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_C \frac{z+1}{z^2}\,dz$$

問題 8.2.

C を $z=1$ を中心, 半径 3 の円周とするとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_C \frac{2z}{z^2+1}\,dz$$

問題 8.3.

$r>0$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\int_{\{|z|=r\}} \operatorname{Re} z\,dz,$$

なお, $\{|z|=r\}$ は原点中心, 半径 r の円である. (ヒント: $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$)

問題 8.4.

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=1\}} ze^{2z}\,dz$$

問題 8.5.

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{(z^2+1)(z+5)}$$

問題 8.6.

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z-i|=1\}} \frac{dz}{(z^2+1)(z+5)}$$

問題 8.7.

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{(z^3+1)}$$

問題 8.8.

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z-i|=1\}} \frac{dz}{(z^3+1)}$$

注意 (留数を知っている方へ).

留数を使えば, これらの計算はもっと簡単にできることは知っているかもしれませんが, 留数を知らなくとも計算できますので, まずは計算できるようにしてください.

複素関数論序論 演習問題　(2015 年 12 月 11 日)

問題 9.1.
　次の積分を求めよ.
$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{(z-1)^4}\, dz$$

問題 9.2.
　次の積分を求めよ.
$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+9)}\, dz$$

問題 9.3.
　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に対して, $D_R(a) \subset D$ が成り立つとき
$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})\, d\theta$$
が成り立つことを証明せよ.

問題 9.4.
　次の積分を計算せよ.
$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^{\alpha z}}{z}\, dz$$

問題 9.5.
　次の積分を計算せよ.
$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^{\alpha z}}{z^2+2z}\, dz$$

問題 9.6.
　次の積分を計算せよ.
$$\int_{\{|z-2i|=2\}} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$

問題 9.7.
　次の積分を計算せよ.
$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-\pi/2)^2}\, dz$$

問題 9.8.
　次の積分を計算せよ.
$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^{\alpha z}}{z^n}\, dz$$

複素関数論序論 演習問題 (2015 年 12 月 18 日)

問題 10.1.

$a > 0$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx$$

問題 10.2.

次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x + x^2}\, dx$$

問題 10.3.

次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$

問題 10.4.

次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin x}\, dx$$

問題 10.5.

$\displaystyle\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z}\, dz$ を求めよ. そして, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\, d\theta$ を求めよ.

問題 10.6.

次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\sin\theta + p^2}\, dx \quad (0 < p < 1)$$

問題 10.7.

次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\sin\theta + 3}\, d\theta$$

問題 10.8 (Fresnel 積分)**.**

$\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx$ を求めたい.

(1) $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &C_1 : t && (t : 0 \to R) \\ &C_2 : Re^{i\theta} && (\theta : 0 \to \frac{\pi}{4}) \\ &C_3 : te^{\frac{\pi}{4}i} && (t : R \to 0) \end{aligned}$$

とおく. $C_1 + C_2 + C_3$ を図示せよ.

(2) $\displaystyle\int_{C_1+C_2+C_3} e^{-z^2}\, dz$ を求めよ.

(3) $R \to \infty$ とすることで, $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx$ を求めよ.

複素関数論序論 演習問題　(2016年1月8日)

問題 11.1.

$\sin z$ を $z=a$ を中心として Taylor 展開したときの $(z-a)^6$ までの係数を求めよ (ヒント: $z-a$ を作ってから加法定理を用いる).

問題 11.2.

$\dfrac{1}{z-2}$ と $\dfrac{1}{z}$ の $z=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ. 次に $\dfrac{1}{z(z-2)}$ の $z=1$ を中心とする Taylor 展開を求め, 収束半径を求めよ.

問題 11.3.

$\dfrac{1}{1+z^2}$ の $z=0$ を中心とする Taylor 展開を求め, 収束半径を求めよ.

問題 11.4.

$\dfrac{1}{(1-z)}$ の $z=0$ を中心とする Taylor 展開を求めよ. 次に, 両辺を微分することで, $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ の $z=0$ を中心とする Taylor 展開を求め, 収束半径を求めよ.

問題 11.5.

$\dfrac{1}{(1-z)^2}$ の $z=i$ を中心とする Taylor 展開を求め, 収束半径を求めよ.

問題 11.6.

$\dfrac{1}{z-2}$ の $z=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ.

問題 11.7.

$\dfrac{z-1}{z^2}$ の $z=1$ を中心とする Taylor 展開を求めよ.

問題 11.8.

$\tan z$ の 原点を中心とする Taylor 展開を z^7 の項まで求めよ.

問題 11.9.

$e^z\cos z$ の原点を中心とする Taylor 展開を z^4 の項まで求めよ.

複素関数論序論 演習問題 (2016年1月15日)

問題 12.1.
$\dfrac{1-\cos z}{z}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求めよ.

問題 12.2.
$\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ の $z=\pi$ を中心とする Laurent 展開を求めよ.

問題 12.3.
$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ の $z=1$ を中心とする Laurent 展開を $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ 上で求めよ.

問題 12.4.
$\dfrac{1}{z(z+3)^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\}$ 上で z^2 の項まで求めよ.

問題 12.5.
$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $a \in D$ に対して, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ は $D \setminus \{a\}$ 上正則とする.

(1) f が a で 1 位の極であるとき, $\mathrm{Res}[f;a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ となることを示せ.

(2) f が a で 2 位の極であるとき, $\mathrm{Res}[f;a] = \lim_{z\to a}\dfrac{d}{dz}((z-a)^2 f(z))$ となることを示せ.

(3) f が a で 3 位の極であるとき, $\mathrm{Res}[f;a] = \dfrac{1}{2}\lim_{z\to a}\dfrac{d^2}{dz^2}((z-a)^3 f(z))$ となることを示せ.

問題 12.6.
$\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$ の極とその点における留数を求めよ (ヒント: 問題 12.5 を用いよ)

問題 12.7.
$t \in \mathbb{R}$ に対して, $\dfrac{e^{tz}}{(z-2)^3}$ の極とその点における留数を求めよ.

問題 12.8.
$\dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}$ の極とその点における留数を求めよ. そして, 次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$$

問題 12.9.
$\dfrac{ze^z}{(z-1)^3}$ の極とその点における留数を求めよ. そして, 次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{ze^z}{(z-1)^3}\,dz$$

複素関数論序論 演習問題　(2016 年 1 月 22 日)

問題 13.1.
$\dfrac{\cos z}{z^3}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を z^3 の項まで求めよ.

問題 13.2.
$\dfrac{1}{z^3-z^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求めよ.

問題 13.3.
$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求めよ.

問題 13.4.
$\dfrac{z+1}{z^2-2z}$ の極とその位数, およびその点における留数を求めよ.

問題 13.5.
$\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ の極とその位数, およびその点における留数を求めよ.

問題 13.6.
$\dfrac{1}{z\sin z}$ の極とその位数, およびその点における留数を求めよ.

問題 13.7.
$a>0$ に対して, 次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=2a\}} \frac{z}{z^2+a^2}\,dz$$

問題 13.8.
$n\in\mathbb{N}$ に対して, 次の積分を計算せよ.

$$\int_{\{|z|=n\pi\}} \tan z\,dz$$

問題 13.9.
次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$$

問題 13.10.
次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

複素関数論序論 演習問題の略解

問題 12.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-1}$

問題 12.2 $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} (z-\pi)^n$

問題 12.3 $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$

問題 12.4 $\displaystyle\frac{1}{3^2}\frac{1}{z} - \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4}z - \frac{4}{3^5}z^2 + \cdots$

問題 12.6 $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+1)^2}\,;\,-i\right] = 0, \quad \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+1)^2}\,;\,i\right] = 0.$

問題 12.7 $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{e^{tz}}{(z-2)^3}\,;\,2\right] = \frac{t^2 e^{2t}}{2}$

問題 12.8 $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\,;\,1\right] = \frac{\cos 1}{4} - \frac{\sin 1}{16},$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\,;\,-3\right] = -\frac{\sin 3}{16},$$

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+3)}\,dz = \left(\frac{\cos 1}{2} - \frac{\sin 1}{8}\right)\pi i$$

問題 12.9 $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{ze^z}{(z-1)^3}\,;\,1\right] = \frac{3}{2}e, \quad \int_{\{|z|=2\}} \frac{ze^z}{(z-1)^3}\,dz = 3e\pi i$

問題 13.1 $\displaystyle\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{24}z - \frac{1}{720}z^3 + \cdots$

問題 13.2 $\displaystyle-\sum_{n=-2}^{\infty} z^n$

問題 13.3 $\displaystyle\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^n}{(n+4)!} z^n$

問題 13.4 $z=0$ で 1 位の極, $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z}\,;\,0\right] = -\frac{1}{2}$

$z=2$ で 1 位の極, $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z}\,;\,2\right] = -\frac{3}{2}$

問題 13.5 $z=1$ で 2 位の極, $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\,;\,1\right] = 2e^2$

問題 13.6 $z=0$ で 2 位の極, $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z}\,;\,0\right] = 0$

$n \in \mathbb{Z}$ に対して, $z = n\pi$ で 1 位の極, $\displaystyle\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z}\,;\,n\pi\right] = (-1)^n \frac{1}{n\pi}$

問題 13.7 $2\pi i$ **問題 13.8** $-4n\pi i$ **問題 13.9** $\dfrac{10}{27}\pi$ **問題 13.10** $\dfrac{\pi}{4}$