複素関数論序論 講義ノート (抜粋)

このプリントについて. このノートは複素関数論序論の講義ノートにおける, 定義や定理, 講義で説明しなかった定理の証明などを抜き出したものである. 定義や定理の意味, 理解すべき証明はここでは述べていないため, このノートのみで勉強をするのは不十分である. 各自, ノートや参考文献等を元にして, 自分用のノートを作成して欲しい. なお, 記述の間違い等あることに注意をすること.

第 1 章

複素数と複素平面

1.1. 複素数

例 1.1.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=i,\ \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-1$$

例 1.2.

$z^2=-i$ となる $z\in\mathbb{C}$ を求めると, $z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ となる.

1.2. 複素平面

例 1.3.

$1+i$, $-\sqrt{3}+i$ を複素平面上に書くことで,

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\quad -\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$$

がわかる.

例 1.4.

$r>0$, $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$D_r(c):=\{z\in\mathbb{C}:|z-c|<r\}$$

とおくと, $D_r(c)$ は複素平面上で中心 c, 半径 r の開円板を表す.

複素平面と積

定理 1.1.

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\in\mathbb{C}$ に対して次が成り立つ.

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$. すなわち

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

(2) $z_2 \neq 0$ ならば $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$. すなわち

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

系 1.1 (de Moivre の定理)**.**

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

となる.

例 1.5.

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

が得られる.

1.3. 複素数列の収束

定義 1.1 (収束)**.**

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が $z \in \mathbb{C}$ に収束することを

$$|z_n - z| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

で定義する.

命題 1.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
(2) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

定理 1.2.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z \in \mathbb{C}$ とする. このとき

$$z_n \to z \quad (n \to \infty) \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. つまり, $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ と書いたときに右側は

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n \to \infty)$$

となる.

定理 1.3.
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ を複素数列, $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, $w = \lim_{n\to\infty} w_n$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$,
(2) $\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = zw$,
(3) $z \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1}{z}$.

複素平面の位相

定義 1.2 (開集合)**.**
$U \subset \mathbb{C}$ が**開集合**であるとは, $\forall \eta \in U$ に対して, $\exists \varepsilon > 0$ が存在して

$$U_\varepsilon(\eta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \eta| < \varepsilon\} \subset U$$

をみたすことである.

定義 1.3 (閉集合)**.**
$F \subset \mathbb{C}$ が**閉集合**であるとは, $\mathbb{C} \setminus F$ が開集合になることである.

命題 1.2.
$F \subset \mathbb{C}$ に対して, 次は同値である.

(1) F は閉集合
(2) 任意の複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して, $z_n \to z \quad (n \to \infty)$ ならば $z \in F$.

第 2 章

正則関数

2.1. 連続関数

定義 2.1 (連続)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ に対し, $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で**連続**であるとは, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ が $z_n \to z_0 \quad (n \to \infty)$ ならば, $f(z_n) \to f(z_0) \quad (n \to \infty)$ が成り立つことをいう. また, $\forall z \in D$ で f が連続のとき, f は D 上連続とであるという.

例 2.1.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f(z) := \overline{z}$$

で定義すると, f は $z = 0$ で連続である.

定理 2.1.

$D \subset \mathbb{C}$ に対して, $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で連続であることと,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in D \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

は同値である.

$D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \in D$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して,

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z)$$

とおく. つまり

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.1}$$

である. u, v は二変数の**実数値**関数である.

定理 2.2.

$D \subset \mathbb{C}$ に対して, $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ で連続であることと, f を (2.1) で書いたときに, u, v が二変数 x, y の関数として (x_0, y_0) で連続であることは同値である.

定理 2.3.

$D \subset \mathbb{C}$ に対して, $f, g : D \to \mathbb{C}$ は $z_0 \in D$ で連続とすると次が成り立つ.

(1) $f+g$ は $z_0 \in D$ で連続.
(2) fg は $z_0 \in D$ で連続.

関数の極限

定義 2.2.
開集合 $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $f(z) \to \alpha$ $(z \to z_0)$, または $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$ に対して,

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.

定理 2.4.
開集合 $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f, g : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \alpha \pm \beta$.
(2) $\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = \alpha\beta$.

2.2. 微分可能性と正則関数

定義 2.3 (複素微分, 正則)**.**
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ とする. このとき, f が z_0 で**微分可能**であるとは

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在することをいう. この極限を $f'(z_0)$ とか $\frac{df}{dz}(z_0)$ と書く.
任意の $z \in D$ に対して, f が z で微分可能のとき, f は D 上**正則**であるといい, $f' : D \ni z \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$ を f の**導関数**という.

定理 2.5.
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. $f : D \to \mathbb{C}$ が D 上正則ならば, f は D 上無限回微分可能である.

例 2.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ とおく. $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} &= \frac{(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})}{z-z_0} \\ &= z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} = z_0^{n-1}+z_0^{n-2}z_0+\cdots+z_0z_0^{n-2}+z_0^{n-1} = nz_0^{n-1}$$

となる.

命題 2.1.

開集合 $D \subset \mathbb{C}$ に対し, $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で微分可能ならば, f は z_0 で連続となる.

定理 2.6.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f, g : D \to \mathbb{C}$ は D 上正則とする. このとき, $f \pm g$, fg も D 上正則であり,

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

となる.

定理 2.7.

$D, D' \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f = f(z) : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $g = g(w) : D' \to \mathbb{C}$ を D' 上正則とし, $f(D) \subset D'$ とする. このとき $F = g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は D 上正則であり,

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) \quad (z \in D)$$

となる.

例 2.3.

$F(z) = (2z^2 + i)^5$ とおくと, 定理 2.7 より $f(z) = 2z^2 + i$, $g(w) = w^5$ とおいて

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{dg}{dw}(f(z))\frac{df}{dz}(z) = 5(f(z))^4 4z = 20z(2z^2+i)^4.$$

例 2.4.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = |z|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$ で定めると, f は $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して, **微分可能ではない.** 証明は次のセクションにまわす.

2.3. Cauchy-Riemann の方程式

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則とし,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. すなわち

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく.

定理 2.8 (Cauchy-Riemann の関係式)**.**
$D \subset \mathbb{C}$ を開集合, $f : D \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. すなわち

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (x = z + iy \in D)$$

とおく. このとき, f が $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ で微分可能であることと, u, v が (x_0, y_0) で全微分可能であって

$$\text{(CR)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

をみたすことは同値である. さらに, このとき $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ となる.

この式 (CR) を **Cauchy-Riemann の方程式**という.

例 2.5.
$f(z) = |z|^2$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で正則でない. 実際,

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

より, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ とおくと, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ となる. ここで,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

より, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ だから, Cauchy-Riemann の関係式を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で満たさない.

定理 2.9.

$U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする. $h = h(x,y) : U \to \mathbb{R}$ に対し, $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$ が存在して, 連続であるとする. このとき, h は U 上全微分可能である.

例 2.6.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ $(z = x + iy \in \mathbb{C})$ により定めると, f は $\mathbb{C}$ 上正則である.

例 2.7.

次の関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ はすべての $z \in \mathbb{C}$ について微分可能でない.

(1) $f(z) = \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} = x$

(2) $f(z) = \overline{z} = x - iy$

第 3 章

巾級数と初等関数

3.1. 巾級数

定理 3.1.
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0 \neq 0$ で収束するならば, $|z| < |z_0|$ をみたすすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| < \infty$(つまり絶対収束) がなりたつ.

定理 3.2 (d'Alembert の判定法)**.**
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して, もし $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{r}$ が存在すれば, r は収束半径である.

例 3.1.
次の巾級数の収束半径を求める.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n.$$

定理 3.3.
巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を R とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $D_R(0)$ 上正則であり,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{3.1}$$

が成り立つ. さらに (3.1) の右辺の収束半径も R となる.

例 3.2.
$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は 1 であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

となる. よって, $z \in D_1$ に対して微分することができて

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

がわかる.

例 3.3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ と定めると, f は C^∞ 級であるが, $x = 0$ における Taylor 展開

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

の収束半径は 1 であり, $f(x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ とならない. 他方, $f(x)$, $g(x)$ を x のかわりに $z \in \mathbb{C}$ と拡張してみると f は $z = \pm i$ で正則でない (そもそも連続ですらない). つまり, $z = \pm i$ での特異性が f の Taylor 展開に影響を与えている.

3.2. 初等関数

定義 3.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = 1 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots$$

と定義する.

定理 3.4 (指数法則)**.**

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

が成り立つ.

定理 3.5 (Euler の公式)**.**

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

となる．とくに

$$e^{i\pi} = -1$$

が成り立つ．

系 3.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

が成り立つ．特に $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ が成り立つ．

定理 3.6 (加法定理)**.**

z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

が成り立つ．

定理 3.7 (微分)**.**

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(e^z)' = e^z, \qquad (\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

が成り立つ．

定理 3.8.

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

が成り立つ．

注意 3.1.

定理 3.8 では $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \tag{3.2}$$

をみとめている．しかし，そもそも我々の定義 3.1 では (3.2) は自明ではない．厳密には，何らかの方法で円周率 π を定義したうえで，定義 3.1 が高校で習う e^θ, $\sin\theta$, $\cos\theta$ と等しいことを示さないとならない．詳しくは杉浦 [Sgur] を参照せよ．

例 3.4.

$\cos z = 2$ となる $z \in \mathbb{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ に対して $z = 2n\pi - \log(2 \pm \sqrt{3})$.

3.3. 対数関数

定義 3.2 (対数関数)**.**
$z \in \mathbb{C}$ に対して, 偏角の主値 $\operatorname{Arg} z$ を

$$\operatorname{Arg} z = \arg z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

により定める. そして, 対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ を

$$\operatorname{Log} z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

により定める.

例 3.5.
$\operatorname{Log}(-1) = \pi i$, $\operatorname{Log}(1+i) = \dfrac{1}{2}\log 2 + \dfrac{\pi}{4} i$.

定理 3.9.
Log は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で正則であり

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$$

となる.

第 4 章

複素積分と Cauchy の積分定理

4.1. 複素積分

命題 4.1.

連続関数 $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ と $\lambda \in \mathbb{C}$, $a < c < b$ に対して次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_a^b (\varphi(t) + \psi(t))\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt.$

(2) $\displaystyle\int_a^b (\lambda\varphi(t)\,dt = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,dt.$

(3) $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^c \varphi(t)\,dt + \int_c^b \varphi(t)\,dt.$

(4) $\displaystyle\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$

例 4.1.

$\alpha, s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,\alpha$ のときに $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{s-\alpha}.$

注意 4.1.

一般に $\displaystyle\mathscr{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ を f の Laplace 変換という.

定義 4.1 (領域)**.**

開集合かつ連結な集合 $D \subset \mathbb{C}$ を**領域**という.

注意 4.2.

領域 $D \subset \mathbb{C}$ の任意の二点 $z, w \in D$ について, z と w を結ぶ曲線 $C : \varphi(t)$ $(a \le t \le b)$ が存在する.

定義 4.2 (複素積分)**.**

領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と D 内の曲線 $C : \varphi(t)$ $(a \le t \le b)$ に対して, f の C **に沿っての複素積分** $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を

$$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

で定義する.

補題 4.1.
$C:\varphi(t)$ $(a \le t \le b)$, $\psi(s)$ $(\alpha \le s \le \beta)$ を同じ曲線の表示とするとき

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(s)\,ds$$

が成り立つ.

例 4.2.
$\displaystyle\int_C z\,dz$ を $C_1 : \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ 1 + i(t-1) & (1 \le t \le 2) \end{cases}$ と $C_2 : s + is$ $(0 \le s \le 1)$ に沿って積分すると, どちらも答えは i となる.

例 4.3.
$z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して $C : z_0 + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ とおく. このとき, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\displaystyle\int_C (z - z_0)^n\,dz$ を求める.

定理 4.1.
$z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して $C : z_0 + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ とおく. このとき, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_C (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \ne -1 \end{cases}$$

となる.

4.2. Cauchy の積分定理

命題 4.2.
$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則関数, C を D 内の曲線とする. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy \in D)$ とおくと

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

が成り立つ.

注意 4.3.
一般に $\mathbb{R}^2$ の曲線 $C : \varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \le t \le b)$ と C 上の連続関数

$f : C \to \mathbb{R}$ に対して, C 上の線積分 $\displaystyle\int_C f(x,y)\,dx$, $\displaystyle\int_C f(x,y)\,dy$ は

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,dt$$
$$\int_C f(x,y)\,dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)\,dt$$

で与えられる.

定理 4.2 (Green の定理)**.**

領域 $E \subset \mathbb{R}^2$ は境界が十分に滑らかとする. $f, g : E \to \mathbb{R}$ が C^1 級のとき

$$\int_{\partial E} (f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy) = \int_E \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy$$

が成り立つ.

定義 4.3 (単純閉曲線)**.**

$C : \varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が**単純閉曲線**であるとは $\varphi(a) = \varphi(b)$ かつ, すべての $a < x, y < b$ に対して $\varphi(x) = \varphi(y)$ なら $x = y$ となることである.

定義 4.4 (単連結領域)**.**

領域 $D \subset \mathbb{C}$ が**単連結領域** であるとは, D 内の閉曲線 C に対して, C で囲まれた領域を E とするときに $E \subset \mathbb{C}$ となることである.

定理 4.3 (Cauchy の積分定理)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, C を D 内の単純閉曲線とすると

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ.

注意 4.4.

我々の正則の定義は「微分可能」のみであり, 導関数の連続性は仮定していないため, この証明は本質的に正しくない. 厳密に証明するためには, Green の定理を用いずに示す必要がある. この講義では, 数学的厳密さはとりあえずおいておき, 計算できることを目標にするので, これ以上たちいらないことにする. 詳しくはアールフォルス [Ahl] を見よ.

定理 4.4.

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $z, \eta \in D$ とする. C_1, C_2 をそれぞれ始点 η, 終点 z の D 内の曲線とすると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つ.

定義 4.5.

単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と $z, w \in D$, 始点 $w \in D$, 終点 $z \in D$ の D 内の曲線 C に対して

$$\int_w^z f(\eta)\,d\eta := \int_C f(z)dz$$

と定める. $\displaystyle\int_\eta^z f(w)\,dw$ を f の**不定積分**という.

定理 4.5.

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, F を f の不定積分とすると

$$\frac{dF}{dz} = f \quad \text{in } D$$

が成り立つ.

定理 4.6.

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $D \setminus \{a\}$ 上正則とし, C_1, C_2 を $D \setminus \{a\}$ 内の単純閉曲線で, 内側に a を含み, 互いに交わらないとすると,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つ. ただし, 閉曲線の向きは正の向きにとるものとする.

定理 4.7.

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $a_1, \ldots, a_n \in D$, $f : D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$ を $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ 上正則とし, C を $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ 内の単純閉曲線で, 内側に $a_1, \ldots, a_n$ を含むとする. C_i $(i = 1, \ldots, n)$ を $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ 内の単純閉曲線で, それぞれは互いに交わらず, C_i は a_i を内側に含み, 他の a_j を内側に含まないとすると

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

が成り立つ. ただし, 閉曲線の向きは正の向きにとるものとする.

例 4.4.

$\mathbb{C}$ 上の原点中心, 半径 2 の円を C とするとき $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-1)} = 0$ となる.

第 5 章

Cauchy の積分公式と定積分への応用

5.1. Cauchy の積分公式

定理 5.1 (Cauchy の積分公式)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $a \in D$ とし, $D_R(a) \subset D$ となる $R > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$$

が成り立つ.

例 5.1.

C を原点中心, 半径 2 の上半円と $(-2, 0)$ から $(2, 0)$ へ向かう線分をつなげたものとすると

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

となる.

定理 5.2 (Cauchy の積分公式)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $a \in D$ とする. このとき, f は a で無限回微分可能であり, $n \in \mathbb{N}$ と $D_R(a) \subset D$ となる $R > 0$ に対して

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R\}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

が成り立つ.

例 5.2.

$\displaystyle\int_{\{|z-1|=1\}} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ は $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$ とおけば $\{|z-1| = 1\}$ 内で正則だから Cauchy の積分公式を用いることで

$$\int_{\{|z-1|=1\}} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(1) = 10\pi i$$

となる.

5.2. 定積分への応用

例 5.3.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例 5.4.

$a > b > 0$ に対して $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$

注意 5.1.

$z = e^{i\theta}$ の変数変換は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の有理式の積分で有効なことが多い.

例 5.5.

$m \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(mx)}{1+x^2} = \pi e^{-m}.$

例 5.6.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

第 6 章

関数の展開

6.1. Taylor 展開

定理 6.1.

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則とする. このとき $a \in D$ と $D_R(a) \subset D$ をみたす $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{6.1}$$

がすべての $z \in D_R(a)$ に対してなりたつ.

定義 6.1.

定理 6.1 と同じ記号に対し, (6.1) の級数を f の a を中心とする **Taylor 展開**という. また, $a = 0$ のときは f の **Maclaurin 展開**という.

注意 6.1.

実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が滑らか (無限回微分可能) であったとしても, Taylor 展開可能であるとは限らない. 他方, **正則関数は常に Taylor 展開ができる.**

例 6.1.

$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots \end{aligned}$$

と Taylor 展開できる．また, $a \in \mathbb{C}$ に対して $(e^z)^{(n)}|_{z=a} = e^a$ より

$$\begin{aligned} e^z &= e^a + e^a(z-a) + \frac{e^a}{2!}(z-a)^2 + \cdots \\ &= e^a \left(1 + (z-a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 + \cdots \right) = e^a e^{z-a} \end{aligned}$$

と Taylor 展開ができる.

定理 6.2.

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則とする．このとき $a \in D$ と $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{6.2}$$

と展開できたとすると, f の $z = a$ における Taylor 展開は (6.2) に一致する．とくに $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ となる.

例 6.2.

$\dfrac{1}{1-z}$ の Maclaurin 展開は

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

となる．また, $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ を中心とする Taylor 展開は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-a-(z-a)} \\ &= \frac{1}{1-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^n \end{aligned}$$

となる.

例 6.3.

$\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ の Maclaurin 展開の z^2 までの項を求める.

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

と展開できたとして, $(z-1)(z-2)$ で払ってから係数を比較すると $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $a_2 = \frac{13}{8}$ となる.

定義 6.2.
領域 $D \subset \mathbb{C}$ と D 上正則な関数 $f : D \to \mathbb{C}$, $a \in D$ に対して

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + c_{m+2}(z-a)^{m+2} + \cdots$$

かつ, $c_m \neq 0$ となるとき, m を f の a における**位数** といい, $\mathrm{ord}[f\,;a] = m$ とかく. また, a を f の m 位の**零点**という.

例 6.4.
$\mathrm{ord}[\sin z\,;0] = 1$, $\mathrm{ord}[\sin(z^2)\,;0] = 2$ となる.

6.2. Laurent 展開と特異点解析

定義 6.3.
領域 $D \subset \mathbb{C}$ と $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ に対して, a が f の**特異点** であるとは, f が a で微分可能でないことをいう. a が f の**孤立特異点**であるとは, a は f の特異点であって, ある a の近傍 U 上で f が$U \setminus \{a\}$ 上正則であることをいう.

定義 6.4.
領域 $D \subset \mathbb{C}$ と $a \in D$, $D \setminus \{a\}$ 上正則な関数 $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ に対して,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.3}$$

が $z \in D_R(a) \subset D$ で成り立つとき, この展開 (6.3) を f の a を中心とする **Laurent 展開**という.

定理 6.3.
$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $D \setminus \{a\}$ 上正則とする. このとき $a \in D$ と $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ に対して

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.4}$$

と展開できたとすると, f の $z = a$ における Laurent 展開は (6.4) に一致する.

例 6.5.

$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ の $z=1$ を中心とする Laurent 展開を求める.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-2} \\ &= -\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1}(1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots\end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

となる.

例 6.6.

$z^2 e^{-\frac{1}{z}}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を求める.

$$\begin{aligned}z^2 e^{-\frac{1}{z}} &= z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{2}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2-n} = z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \cdots\end{aligned}$$

となる.

定義 6.5 (極と留数)**.**

領域 $D\subset\mathbb{C}$ と $a\in D$, $D\setminus\{a\}$ 上正則な関数 $f: D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ に対する Laurent 展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

に対して, c_{-1} を f の a における**留数**といい, $\mathrm{Res}[f\,;a]$ で表す. また, $k\in\mathbb{N}$ に対して, a が f の k **位の極**であるとは, $c_{-k}\neq 0$ かつ, $n<-k$ となるすべての $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $c_n=0$ となることをいう.

例 6.7.

例 6.5 において, $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ は $z=1$ において, 1 位の極であり, 留数は $\mathrm{Res}[\frac{1}{(z-1)(z-2)}\,;1]=-1$ である.

定理 6.4.

$D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上正則, $a \in D$, $\mathrm{ord}[f\,;\,a] = n$, $\mathrm{ord}[g\,;\,a] = m$, $n < m$ とする. このとき, $\dfrac{f}{g}$ は a で $(m-n)$ 位の極となる.

例 6.8.

$\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を z^0 の項まで求めると

$$\frac{z-3}{z^3+5z^2} = -\frac{3}{5}z^{-2} + \frac{8}{25}z^{-1} - \frac{8}{125} + \cdots$$

となる. とくに, $\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$ は 0 で 2 位の極であり, 留数は $\mathrm{Res}[\frac{z-3}{z^3+5z^2}\,;\,0] = \frac{8}{25}$ である.

定理 6.5 (留数定理)**.**

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $D \setminus \{a\}$ 上正則な関数, C を D 内の単純閉曲線で, a を内側に含むとする. このとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \mathrm{Res}[f\,;\,a]$$

となる.

例 6.9.

$\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$ の $z=0$ における Laurent 展開 を z^0 の項までもとめると

$$\frac{e^z}{z^{n+1}} = z^{-(n+1)} + z^{-n} + \frac{1}{2!}z^{-(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n!}z^{-1} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

がわかる. $\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$ は $z=0$ で $(n+1)$ の極であり, $\mathrm{Res}[\frac{e^z}{z^{n+1}}\,;\,0] = \frac{1}{n!}$ である.

定理 6.6.

領域 $D \subset \mathbb{C}$ と $a \in D$, $D \setminus \{a\}$ 上正則な関数 $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ に対して, a の近傍 U において

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in U \setminus \{a\})$$

と Laurent 展開できる.

定理 6.7.

領域 $D \subset \mathbb{C}$ と D 内の曲線 C, C 上の連続関数 $f_n : C \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ を

考える．無限級数 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が存在して C 上の連続関数となることと，ある $0 < q < 1$ と $M > 0$ が存在して $|f_n(z)| \leq Mq^n$ がすべての $z \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つと仮定する．このとき

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\,dz$$

が成り立つ．

参考文献

[Ahl] L.V. アールフォルス, 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社, 1982.
[Sgur] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.
[Sun-Ino] 洲之内治男, 猪股清二, 改訂 関数論, サイエンス社, 1992.