§1 集合

§§1.1 集合とは何か？

数学は集合を使って記述する．

定義 1.1（集合）

ある特定の性質をそなえた「もの」のあつまりを集合という．
集合を構成する一つ一つの「もの」を集合の元または要素という．

㊟ 言葉の意味を定めることを定義するという．

例 1.1（集合の書き方）

㊟ 集合は普通，アルファベットの大文字で書く．
集合は $\{\cdots\}$ の形で書く．

$$A := \{2, 3, 5, 7\}$$ ~~{10以下の素数}~~

左辺を右辺で定義する．

$$= \{10\text{以下の素数}\}$$

あとできちんと定義する．

㊟ $B := \{10000\text{以下の}3\text{で割り切れる自然数}\}$

$$= \{3, 6, 9, \cdots, 9996, 9999\}$$

$$= \{3n : n = 1, 2, \cdots, 3333\}$$

例1.1.2（よく使う集合）

$\mathbb{N}$: 自然数全体の集合.

$\mathbb{Z}$: 整数 全体の集合

$\mathbb{Q}$: 有理数 全体の集合

$\mathbb{R}$: 実数 全体の集合

$\mathbb{C}$: 複素数 全体の集合

ϕ : 元が一つもない集合（空集合という）

$(a, b) := \{x : x$は実数, $a < x < b\}$: 開区間という.

$[a, b] := \{x : x$は実数, $a \leq x \leq b\}$: 閉区間という.

$\leqq$ と同じ

定義.1.2

aが集合Aの元であるとき. aはAに属するといい,

$a \in A$と書く. また, aがAの元でないとき.

$a \notin A$と書く.

例.1.3

・$A := \{10$以下の素数$\}$とおくと

$3 \in A, \quad 11 \notin A.$

・$B = \{3n : n = 1, 2, \ldots, 3333\}$

$= \{3n : n \in \mathbb{N}, n \leq 3333\}$

例 集合 X_1, X_2, X_3 をそれぞれ

$$X_1 := \{x \in \mathbb{Q} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$

$$X_2 := \{x \in \cancel{\mathbb{Q}}\,\mathbb{R} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$

$$X_3 := \{x \in \mathbb{C} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$

とおくと

$$X_1 = \phi,\ X_2 = \{\pm\sqrt{2}\},\ X_3 = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{-1}\}$$

となる.

定義1.3 (包含関係, 集合の等号)

A, B を集合とする. $A \subset B$ であるとは.

任意の $a \in A$ ~~ならば~~ に対して $a \in B$

が成り立つことをいう. $A \subset B$ でないとき.

$A \not\subset B$ とかく. さらに. $A = B$ であるとは.

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成り立つことをいう.

注意1.1 (論理記号)

定義1.3 は

任意の

$$A \subset B \underset{\text{定義}}{\iff} \forall a \in A,\ a \in B$$

左を右で定義する

とかくことができる.

例 1.4

$\mathbb{Z}_3 := \{3n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_6 := \{6n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_9 := \{9n : n \in \mathbb{N}\}$

とすると

$$\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3 \quad , \quad \mathbb{Z}_9 \not\subset \mathbb{Z}_6 .$$

証明.

1. $\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3$ を示す.

〈考え方〉

$\mathbb{Z}_9$ の元ならば $\mathbb{Z}_3$ の元となることを示せばよい. だから.

$^{\forall}a \in \mathbb{Z}_9$ に対して. ‥‥. $a \in \mathbb{Z}_3$

「任意の」

という流れになる

$^{\forall}a \in \mathbb{Z}_9$ に対して. ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して.

$a = 9n$ とかける. $a = 9n = 3 \times (3n)$ であり

$3n \in \mathbb{N}$ だから $a = 3 \times (3n) \in \mathbb{Z}_3$ が成り立つ.

従って ~~$a \in \mathbb{Z}_3$ と~~ $\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3$ が成り立つ.

2. $\mathbb{Z}_9 \not\subset \mathbb{Z}_6$ を示す.

〈考え方〉

「$^{\forall}a \in \mathbb{Z}_9$ に対して $a \in \mathbb{Z}_6$」が成り立たないので

「$a \in \mathbb{Z}_9$ だが $a \notin \mathbb{Z}_6$」となる $a \in \mathbb{Z}_9$ をみつければよい.

$9 \in \mathbb{Z}_9$ だが $9 \notin \mathbb{Z}_6$ である. 従って

$\mathbb{Z}_9 \not\subset \mathbb{Z}_6$ となる $\square$

20. APR

数学に必要な論理学

§§ 任意と存在

〈任意〉

$\forall$: 任意の (for all, for any の A)

⑪「$\forall$ ～ に対して」の書き方をすることが多い.

例

(1)「$^{\forall}x>0$ に対して $(x-1)^2 \geq 0$」 真

(2)「$^{\forall}x>0$ に対して $(x-1)^2 > 0$」 偽

($x=1$ は $(x-1)^2>0$ をみたさない)

(1)を $^{\forall}x>0, \quad (x-1)^2 \geqq 0$

(2)を $^{\forall}x>0, \quad (x-1)^2 > 0$

と省略して書くことがある.

〈存在〉

$\exists$: 存在する (There exist の E)

⑪「$\exists$ ～ s.t. 」の書き方をすることが多い.

such that (so that の~~形式~~格式ばった書き方)

例

(1)「$^{\exists}x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x-1)^2=0$」 真

ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して.

(2)「$^{\exists}x \in \mathbb{R}$ s.t $(x-1)^2+1=0$」 偽

注意

(1)を英語でかくと

There exists $x \in \mathbb{R}$ such that $(x-1)^2=0$.

となり、記号とつじつまがあう.(しかし、日本語の文章とはあわないので本講義では(本節以外は)使わない.)

例

「$k>0$ に対し、$x^2-2x-k=0$ となる実数xがあることを示せ」

は

「$\forall k>0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x^2-2x-k=0$」を示せ.

と書ける.

§§ and と or.

p and q : p かつ q.

p or q : p または q

例

「$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $(x+1)^2 \geq 0$ and $(x-1)^2 \geq 0$」 真

任意の$x \in \mathbb{R}$に対して $(x+1)^2 \geq 0$ かつ $(x-1)^2 \geq 0$

「$\exists x, \exists y > 0$ s.t. $\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy$ and $x \neq y$」 偽

「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x+1)^2=0$ or $(x-1)^2=0$」 真

「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x+1)^2<0$ or $(x-1)^2<0$」 偽

ある$x \in \mathbb{R}$が存在して $(x+1)^2<0$ または $(x-1)^2<0$

§§ ならば

$p \Rightarrow q$: p ならば q が成り立つ.

⑩ p が成り立ってないときは何も主張していない.
たとえば

$x > 0$ ならば $2(x+1)^2 - 1 > 0$

という主張で, $x \leq 0$ のことは何も主張していない.
($x \leq 0$ のときは. あるイミどうでもいい). よって

$p \Rightarrow q$ は「p が不成立 or q が成立」
とかくこともできる.

例

⑩ 「$x > 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 - 1 > 0$」 真

⑩ 「$x > 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 - 10 > 0$」 偽

$\because$ $x = 1$ とおくと $x > 0$ だが

なぜならば

$2(x+1)^2 - 10 = 2(1+1)^2 - 10 = 8 - 10 = -2 < 0$

となるから.

§§ 否定

pの否定 : pが成り立たない.

※「pが成立 or pの否定が成立」は常に真.

〈否定の作り方〉

① $\forall \xleftrightarrow[\text{否定}]{} \exists$

② and $\xleftrightarrow[\text{否定}]{}$ or.

③ $p \Rightarrow q \xleftrightarrow[\text{否定}]{}$ pが成立 and qが不成立.

例

① 集合 A. B に対し.

$$A \subset B \overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}} {}^{\forall}a \in A,\ a \in B$$

だった. $A \subset B$の否定, すなわち $A \not\subset B$ は.

${}^{\forall} \to \exists$, $\in \to \notin$ とすればよいので

$$A \not\subset B \iff {}^{\exists}a \in A,\quad a \notin B.$$

ある $a \in A$ が存在して $a \notin B$.

⑪ 「${}^{\forall}k > 0$, ${}^{\exists}x \in \mathbb{R}$ s.t. $x^2 - 2x - k = 0$」

の否定は.

「${}^{\exists}k > 0$. ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$ $x^2 - 2x - k \neq 0$」

⑾（数列の収束）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義は．

$$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ ^\forall n \in \mathbb{N}.$$

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

である．これを否定すると．

$$^\exists \varepsilon > 0\ \text{s.t.}\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists n \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}$$

ある $\varepsilon > 0$ が存在して．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して．ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \text{ and } |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

$$n \geq N \text{ かつ } |a_n - a| \geq \varepsilon$$

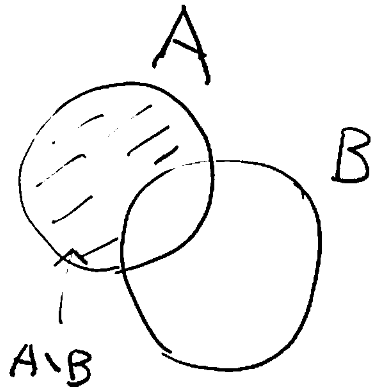
§§1.2 集合の演算

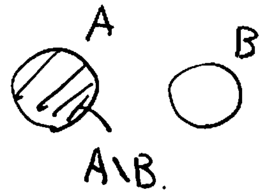
定義1.4 (差集合)

集合 A, B に対し

$$A \setminus B := \{a \in A : a \notin B\}$$

で定める. $A \setminus B$ を差集合という.





例1.5

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}$$

無理数全体

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{R}\}$$

$$= \{x + \sqrt{-1}\,y : x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\}.$$

定義1.5 (補集合)

集合 A に対し

$$A^c := \{a : a \notin A\}$$

で定める. A^c を補集合という.

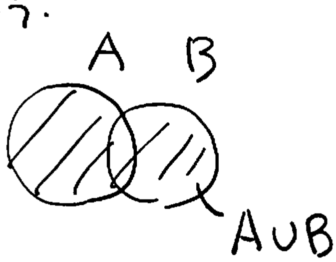
定義1.6 (和集合, 共通部分)

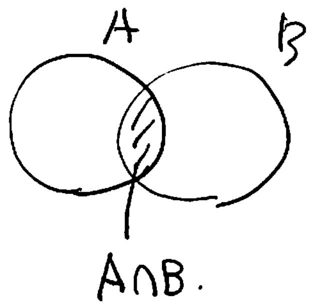
集合 A, B に対し

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

と定める. $A \cup B$ を AとBの和集合, $A \cap B$ を共通部分という.





例1.6.

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A \cap B = \{3, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 2\}$. $B \setminus A = \{5, 6\}$

(ii) $A := \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

$B := \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$

$A \cup B = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} = \mathbb{Z}$.

$A \cap B = \{0\}$.

(iii) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

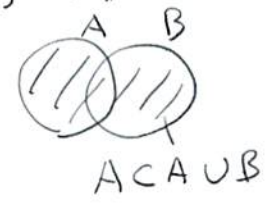
定理 1.1

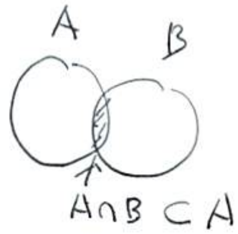
集合 A, B に対し、次が成り立つ.

(1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

(2) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

〈考え方〉





証明をかくときには、任意の左の集合の元をとることがとても重要.

証明

(1) $A \subset A \cup B$ のみ示す. $\forall a \in A$ に対し、「$a \in A$ または $a \in B$」が成り立つから $a \in A \cup B$ となる. 従って $A \subset A \cup B$ が成り立つ.

(2) $A \cap B \subset A$ のみ示す. $\forall a \in A \cap B$ に対して、「$a \in A$ かつ $a \in B$」が成り立つから特に $a \in A$ も成り立つ. 従って $A \cap B \subset A$ が成り立つ $\square$.

定理 1.2 (交換法則)

集合 A, B に対し、次が成り立つ。

(1) $A \cup B = B \cup A$, (2) $A \cap B = B \cap A$.

〈考え方〉

集合の $\overset{\text{イコール}}{=}$ を示すときには $A \cup B \subset B \cup A$ と $B \cup A \subset A \cup B$ の両方を示す必要がある

証明 $A \cup B = B \cup A$ のみ示す。

1. $\forall a \in A \cup B$ に対し「$a \in A$ ~~または~~ or $\cancel{b}\, a \in B$」が成り立つ。よって「$a \in B$ ~~または~~ or $a \in A$」も成り立つから $a \in B \cup A$ がわかる。従って $A \cup B \subset B \cup A$ が成り立つ。

$A \cup B \subset B \cup A$ 示す

2. ~~$\forall a \in B \cup A$~~ $B \cup A \subset A \cup B$ を示す。
$\forall a \in B \cup A$ に対して「$a \in B$ ~~かつ~~ or $a \in A$」が成り立つ。よって「$a \in A$ ~~かつ~~ or $a \in B$」も成り立つから $a \in A \cup B$ がわかる。従って $B \cup A \subset A \cup B$ が成り立つ。

3. $A \cup B \subset B \cup A$ と $B \cup A \subset A \cup B$ より $A \cup B = B \cup A$ が成り立つ □

注意 1.2

定理 1.2 の 1. と 2. はほとんど同じだが、最初のうちはきちんと書いてみること。とくに「同様である」はしばらくは使わないようにすること

定理 1.3.（結合法則）

A, B, C を集合とする

$\Rightarrow$ (1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

証明 (1) のみ示す.

1. $^\forall a \in (A \cap B) \cap C$ に対し. 「$a \in (A \cap B)$ かつ $a \in C$」が成り立つ. よって「[$a \in A$ かつ $a \in B$] かつ $a \in C$」が成り立つから. 「$a \in A$ かつ [$a \in B$ かつ $a \in C$]」も成り立つ. だから「$a \in A$ かつ $a \in B \cap C$」が成り立つので $a \in A \cap (B \cap C)$ が成り立つ.

2. $^\forall a \in A \cap (B \cap C)$ に対し. $a \in (A \cap B) \cap C$ が成り立つことは各自確かめよ.

3. $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ と
$A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ より
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ □.

12. Mar. 2012

定理 1.4（分配法則）

A, B, C : 集合

$\Rightarrow$ (1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

証明 (1)のみ示す.

1. $\forall a \in (A \cap B) \cup C$ に対し,「$a \in A \cap B$ または $a \in C$」が成り立つ. よって「$[a \in A$ かつ $a \in B]$ または $a \in C$」が成り立つから「$[a \in A$ または $a \in C]$ かつ $[a \in B$ または $a \in C]$」も成り立つ. だから「$a \in A \cup C$ かつ $a \in B \cup C$」となるから $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ が成り立つ.

2. $\forall a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ に対し,
「$a \in A \cup C$ かつ $a \in B \cup C$」が成り立つから
「$[a \in A$ または $a \in C]$ かつ $[a \in B$ または $a \in C]$」が成り立つ.
ここから「$[a \in A$ かつ $a \in B]$ または $a \in C$」がわかる

(∵) $a \notin C$ として $a \in A$ かつ $a \in B$ を示せばよい.
仮定より $[a \in A$ または $a \in C]$ だから $a \in A$ となる
また $[a \in B$ または $a \in C]$ から $a \in B$ となる.

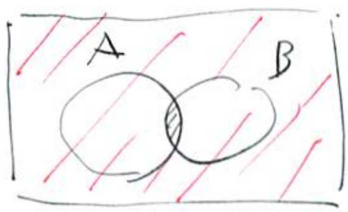
従って「$a \in A \cap B$ または $a \in C$」より
$a \in (A \cap B) \cup C$. □

定理1.5 (de Morganの法則)

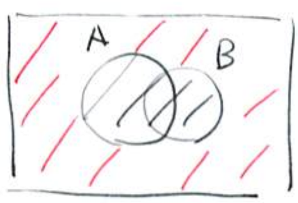
A, B : 集合

$\Rightarrow$ (1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$A \cap B$ $(A \cap B)^c$



$A \cup B$ $(A \cup B)^c$

〈考え方〉

否定が入っているから、「かつ」「または」の否定を考える。

「p かつ q」の否定は「[p でない] または [q でない]」etc.

<u>証明</u> (1) のみ示す。

<u>1</u> $^\forall a \in (A \cap B)^c$ に対し、$a \notin A \cap B$ だから

「$a \in A$ かつ $a \in B$」の否定、すなわち

「$a \notin A$ または $a \notin B$」が成り立つから $a \in A^c \cup B^c$

が成り立つ　従って $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ が成り立つ

<u>2.</u> $^\forall a \in A^c \cup B^c$ に対し、「$a \notin A$ または $a \notin B$」が

成り立つ。これは「$a \in A$ かつ $a \in B$」の否定だから

$a \notin A \cap B$ が成り立つ。従って $a \in (A \cap B)^c$ より

$\therefore A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ が成り立つ　□

§§ 1.3 直積集合

<u>定義 1.7</u>（直積集合）

集合 A, B に対し、<u>直積集合</u> $A \times B$ を

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

で定義する。

例 1.7

(i) $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{4.5\}$

$$A \times B = \{(1.4), (1.5), (2.4), (2.5), (3.4), (3,5)\}$$

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x.y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ とかく. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ではない.

(iii) $\mathbb{R} \times (0.\infty) = \{(x.y) : x \in \mathbb{R},\ 0 < y < \infty\}$

$\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times (0.\infty)$ (半空間という).

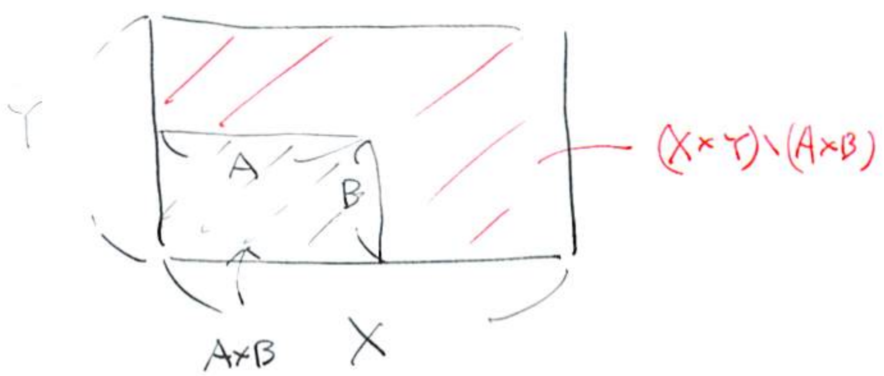
(iv) $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{コ}}$.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) ; x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$

定理. 1.6.

集合 $X. Y$, $A \subset X$. $B \subset Y$ に対し

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)).$$



証明

1 $\forall (x, y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ に対し. $(x, y) \in X \times Y$ かつ $(x, y) \notin A \times B$ が成り立つから. 「$x \notin A$ または $y \notin B$」が成り立つ. $x \notin A$ ならば. $(x, y) \in (X \setminus A) \times Y$ が成り立つ $y \notin B$ ならば $(x, y) \in X \times (Y \setminus B)$ が成り立つから
$(x, y) \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ が成り立つ.

2. $\forall (x, y) \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ に対し.
「$(x, y) \in (X \setminus A) \times Y$ または $(x, y) \in X \times (Y \setminus B)$」
が成り立つから とくに $(x, y) \in X \times Y$ が成り立つ.

一方 $(x, y) \in A \times B$ と仮定すると.
「$(x, y) \notin (X \setminus A) \times Y$ かつ $(x, y) \notin X \times (Y \setminus B)$」
が成り立つので矛盾. 従って $(x, y) \notin A \times B$ より
$(x, y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ となる.

〈質問〉

$A \cap B \subset B \cap A$ の証明で $A \cap B = \phi$ のとき、

$\forall a \in A \cap B$ はどうなるか？

〈答〉

$\forall a \in A \cap B$ととれる a はない ⇒ 成立。

〈なぜか？〉

~~少し解~~ $\phi \subset A$ で説明する これを示すには、

$\forall a \in \phi$ に対し $a \in A$

を示せばよいが、これの否定は

$\exists a \in \phi$ ~~なる~~が存在して $a \notin A$

である。これは 不成立（空集合には元がないから存在もしない）

~~また~~従って、否定の否定、つまり

$\forall a \in \phi$ に対し $a \in A$

は成立となる!!

(注) $\forall a \in \phi$ は常に真

(注) $\exists a \in \phi$ は常に偽