数学入門 A 講義ノート

イントロダクション –今までの問題を振り返る–

まず, 次の問題を考えてみて欲しい.

> **問題.** $x^4 - x^2 - 2 = 0$ をみたす x を求めよ.

この問題を正しく答えることは実はできない. なぜなら

- もし x **が有理数**なら, 解はなし.
- もし x **が実数**なら, 解は $x = \pm\sqrt{2}$.
- もし x **が複素数**なら, 解は $x = \pm\sqrt{2}$, または $x = \sqrt{-1}$, または $x = -\sqrt{-1}$.

となる. だから, 書き手の意図が正しく伝わらないと, 答える側も正しい答えが出せない. こんなことが起きてしまうのは, x が何かを問題がきちんと書いていないからである. つまり, これは問題が悪いのである.

さて, 他にもこんな問題を考えてみよう.

> **問題.** 今, 消費期限が明日のお弁当が目の前にあったとしよう. つまり, 明日までならば, 安全にお弁当が食べられるということである. では, 明後日にこのお弁当を食べたらどうなるだろうか?

さて, 実際だったらどうするか?どうでもいいことだが, 私は 3 日消費期限が過ぎたおにぎりを食べたことがあるが何も問題はなかった. また, 2 年賞味期限が過ぎたレトルトのあんかけを食べた時は, お腹を壊して大変な目にあった. つまり, 答えは**どうなるかわからない**のである. 明日を過ぎてしまったら, わからないだけであって, **危険とは限らないのである**. しかし, 世の中では**明後日になってしまうとお弁当を食べたら危険**と思い, 捨ててしまうことが多々ある. 自分で判断して, 大丈夫そうだったら, 食べてよいのである (それでお腹を壊しても自己責任だが).

この問題は一見数学とまったく関係ないように思えるだろう. しかし, 数学では, この「ならば」が頻繁に使われる. そして, この「ならば」の意味を正しく理解することが数学を勉強するうえで欠かせないのである. これはどちらかというと, 数学よりも国語の現代文 (論説) に近い分野である. 高校の頃に国語が苦手な人は多いかもしれないが, 実は大学で数学を勉強するときに, こういう国語の知識は避けては通れないのである.

この講義では次を目標として勉強して欲しい.

- 集合論の基礎がわかるようになる.
- 証明が書けるようにする.
- 数学の独特な言い回しに慣れる.
- 論理学に慣れる.
- わからないことはわからないと言えるようにする.

1. 集合

1.1. 集合とは何か?. 数学は集合を用いて記述される. そこで, 数学を学ぶ上で欠かすことのできない集合を素朴に考えることにする.

定義 1.1 (集合)**.**
ある特定の性質をそなえた「もの」の集まりを**集合**という. 集合 A を構成する一つ一つの「もの」を集合 A の**元**, または**要素**という.

なお, 言葉の意味を定めることを**定義する**という.

例 1.1 (集合の書き方)**.**

- 集合は普通, アルファベットの大文字で書く. 集合は $\{\cdots\}$ の形で書く.
$$A := \{2, 3, 5, 7\} = \{10\text{ 以下の素数 }\}.$$
このとき, 集合 A の元は 2, 3, 5, 7 である. この集合の $=$ については後述する. とりあえずは, 集合が同じものだと思っていればよい.
- 同じ集合でも書き方はいろいろある.
$$\begin{aligned} B &:= \{10000\text{ 以下の }3\text{ で割り切れる数 }\} \\ &= \{3, 6, 9, \ldots, 9996, 9999\} \\ &= \{3n : n = 1, 2, \ldots, 3333\}. \end{aligned}$$
一般に集合の元をすべて書き下すのは大変なことが多い.

例 1.2 (よく使う集合)**.**

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\emptyset$: 元が一つもない集合 (**空集合**という)
- $(a, b) = \{x : x\text{ は実数},\ a < x < b\}$: 開区間という
- $[a, b] = \{x : x\text{ は実数},\ a \leq x \leq b\}$: 閉区間という

定義 1.2.
a が集合 A の元であるとき, **a は A に属する**といい, $a \in A$ と書く. また, a が A の元でないとき, $a \notin A$ と書く.

例 1.3.

- $A := \{10\text{ 以下の素数 }\}$ とおくと,
$$3 \in A, \qquad 11 \notin A.$$
- $B := \{3n : n = 1, 2, \ldots, 3333\}$ は $B = \{3n : n \in \mathbb{N},\ n \leq 3333\}$ とも書ける.

- 集合 X_1, X_2, X_3 をそれぞれ

$$X_1 := \{x \in \mathbb{Q} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$
$$X_2 := \{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$
$$X_3 := \{x \in \mathbb{C} : x^4 - x^2 - 2 = 0\}$$

  とおくと, $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \{\pm\sqrt{2}\}$, $X_3 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$ となる.
- どちらの書き方がわかりやすいかを考えてみてほしい. 計算には左側の方がいいこともあるが, 意味を理解するには右側の方がわかりやすい.

$$Z = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}.$$

定義 1.3 (包含関係, 集合の等号)**.**
A, B を集合とする. このとき, $A \subset B$ であるとは,

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対して } a \in B$$

が成り立つことをいう. また, $A \subset B$ でないとき, $A \not\subset B$ と書く. さらに, $A = B$ であるとは

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成り立つことをいう.

注意 1.1 (論理記号を使った書き方)**.**
定義 3.5 を論理記号を使って書くと,

$$A \subset B \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \text{“}\forall a \in A,\ a \in B\text{”}$$

となる. いくつか記号を説明しよう.

- $\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$　左を右で定義する (右を左で定義することもある).
- $\forall$: 「任意の」を表す記号 (for all, for any の A をひっくりかえしたもの)

例 1.4.
$\mathbb{Z}_3 := \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_6 := \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_9 := \{9n : n \in \mathbb{Z}\}$ とすると,

$$\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_9 \not\subset \mathbb{Z}_6$$

証明.
1. $\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3$ を示す.

> **考え方** 定義 3.5 から, $\mathbb{Z}_9$ の元ならば, $\mathbb{Z}_3$ の元になっていることを示せばよい. だから, 任意の $a \in \mathbb{Z}_9$ に対して, ... だから $a \in \mathbb{Z}_3$ という流れになる. $\mathbb{Z}_9$ の元は「9 で割り切れる自然数」であり, $\mathbb{Z}_3$ の元は「3 で割り切れる自然数」である. あとは, これをきちんと書けばよい.

任意の $a \in \mathbb{Z}_9$ に対して, ある $n \in \mathbb{Z}$ がとれて, $a = 9n$ と書ける. $9n = 3 \times (3n)$ であり, $3n \in \mathbb{Z}$ だから, $a = 3 \times (3n) \in \mathbb{Z}_3$ となる. 従って, $a \in \mathbb{Z}_9$ ならば $a \in \mathbb{Z}_3$ となることから $\mathbb{Z}_9 \subset \mathbb{Z}_3$ である.
2. $\mathbb{Z}_9 \not\subset \mathbb{Z}_6$ を示す.

考え方 「$\forall a \in \mathbb{Z}_9,\ a \in \mathbb{Z}_6$」が成り立たないので, $a \in \mathbb{Z}_9$ **が成り立っているのに,** $a \in \mathbb{Z}_6$ **が成り立っていないことがある**ということである．だから, $a \in \mathbb{Z}_9$ だが, $a \notin \mathbb{Z}_6$ となる $a \in \mathbb{Z}_9$ を一つみつければよい.

$27 = 9 \times 3$ だから $27 \in \mathbb{Z}_9$ である．しかし, 27 は 6 で割り切れないから, $27 \notin \mathbb{Z}_6$ である. □

1.2. **集合の演算.** 二つ以上の集合から新しい集合を定義しよう．これは集合にどのような演算を考えるかということでもある．講義ではベン図も用いて説明するが, ベン図の理解をきちんと証明として記述できるようにして欲しい.

定義 1.4 (差集合)**.**
集合 A, B に対して, **差集合**$A \backslash B$ を

$$A \setminus B := \{a \in A : a \notin B\}$$

で定める．つまり, 差集合は A **に入っていて** B **に入っていない**集合である.

例 1.5.
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q}\}$ は有理数でない実数, すなわち無理数全体の集合である．また, $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ は実数でない複素数である．だから

$$\mathbb{C} \backslash \mathbb{R} = \{x + \sqrt{-1}y : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$$

となる.

定義 1.5 (補集合)**.**
集合 A に対して, A の補集合 A^c を

$$A^c := \{a : a \notin A\}$$

で定める.

注意.
通常, 集合 A の補集合を定めるときには, A を部分集合とする全体集合 X が定まっている．すなわち, $A \subset X$ となる集合 X が定まっており, $A^c = X \setminus A$ により定まっている．従って, 全体集合が異なると, 補集合も異なることがある．例えば, $X = \mathbb{R}$ で $A = \mathbb{Q}$ のとき, $A^c = \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は無理数全体の集合になるが, $X = \mathbb{C}$ で $A = \mathbb{Q}$ のとき, $A^c = \mathbb{Q}^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ は, 複素数の中で, 有理数でない数全体の集合となる．ただし, たいていの場合は全体集合は明らかであるため, 明記されないことが多い．以下, 補集合については, 常に何かしらの全体集合 X が定まっていると仮定する.

定義 1.6 (和集合, 共通部分)**.**
A, B を集合とする．このとき, A と B の和集合 $A \cup B$ と A と B の共通部分 $A \cap B$ を

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定める.

例 1.6.

- 集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ に対して,
  $$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},\ A\cap B=\{3,4\},\ A\setminus B=\{1,2\},\ B\setminus A=\{5,6\}.$$
- $A:=\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\dots\}=\{0\text{ 以上の整数 }\}$, $B:=\{-n:n\in\mathbb{N}_0\}$ とおく. このとき,
  $$A\cup B=\{x:x\in A \text{ または } x\in B\}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}=\mathbb{Z},$$
  $$A\cap B=\{x:x\in A \text{ かつ } x\in B\}=\{0\}$$
  となる.
- $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$ である.
- $(x^2-2)(x^2+1)=0$ をみたす有理数 x, 実数 x を集合を用いて
  $$\{x\in\mathbb{C}:(x^2-2)(x^2+1)=0\}\cap\mathbb{Q}=\emptyset,$$
  $$\{x\in\mathbb{C}:(x^2-2)(x^2+1)=0\}\cap\mathbb{R}=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$$
  と書くことができる.

定理 1.1.
集合 A, B に対して, 次が成り立つ.

(1) $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$;
(2) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$;

証明.

> **考え方**: 左の集合から任意の元をとったときに, 右の集合の元となっていることを示せばよい. 証明を書くときには, **任意の左の集合の元を取ること**がとても重要.

(1) $A\subset A\cup B$ のみ示す. $\forall a\in A$ に対して, 「$a\in A$ または $a\in B$」が成り立つ. 従って, $a\in A\cup B$ となるから, $A\subset A\cup B$ となる.
(2) $A\cap B\subset A$ のみ示す. $\forall a\in A\cap B$ に対して, 「$a\in A$ かつ $a\in B$」が成り立つ. 従って, 特に $a\in A$ も成り立つから, $A\cap B\subset A$ となる.

$\square$

注意 1.2.
もし A が空集合ならば, $\forall a\in A$ は意味がないと思うだろう. 実際に, 空集合ならば元がないのだから, 任意に元を取るということに意味付けはできない. このときは, 実は常に成立すると考えるのである. なぜな
ら,「$\forall a\in A$ に対して $a\in B$」の否定を考えると,「$\exists a\in A$ が存在して, $a\notin B$」となるが, A が空集合だから, $a\notin B$ となる $a\in A$ は存在しない (くどいが, A は空集合だから, 元が存在しない!). 従って, 否定が常に成立しないのだから, もとの命題は常に成立する. すなわち,「$\forall a\in A$ に対して $a\in B$] は A が空集合のときも成立しているのである.

問題 1.1.
定理 1.1 について, $B\subset A\cup B$ と $A\cap B\subset B$ を示せ.

定理 1.2 (交換法則)**.**
集合 A, B に対して, 次が成り立つ.

(1) $A \cup B = B \cup A$.
(2) $A \cap B = B \cap A$.

証明.

考え方: 「左の集合から任意の元をとったときに, 右の集合の元となっていること」と「右の集合から任意の元をとったときに, 左の元となっていること」の両方を示す必要がある.

$A \cup B = B \cup A$ のみ示す.

1. $\forall a \in A \cup B$ に対して, 「$a \in A$ または $a \in B$」が成り立つ. よって「$a \in B$ または $a \in A$」も成り立つから, $a \in B \cup A$ がわかる. 従って, $A \cup B \subset B \cup A$ となる.

2. $\forall a \in B \cup A$ に対して, 「$a \in B$ または $a \in A$」が成り立つ. よって「$a \in A$ または $a \in B$」も成り立つから, $a \in A \cup B$ がわかる. 従って, $B \cup A \subset A \cup B$ となる.

3. $A \cup B \subset B \cup A$ と $B \cup A \subset A \cup B$ がわかったので, $A \cup B = B \cup A$ が得られる. □

注意 1.3.
定理 1.2 の証明で **1.** と **2.** は同じように見えると思う. 実際, 証明に本質的な違いは何もない. しかし, 最初のうちは, どんなに当たり前だと思うことであっても, きちんと書く癖をつけて欲しい. 特に, **同様である**などで済ますのは, しばらくは使わないようにすること. 教科書などで書かれている**「同様である」**は, **「同様であるから自分で確かめてみよ」**という意味である. より専門的な問題では,「同様である」が同様では証明できないことなどがよくある.

問題 1.2.
定理 1.2 において, $A \cap B = B \cap A$ を示せ.

定理 1.3 (結合法則)**.**
集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

(1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

証明.
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ のみ示す.

1. $\forall a \in (A \cap B) \cap C$ に対して, 「$a \in A \cap B$ かつ $a \in C$」が成り立つ. よって「[$a \in A$ かつ $a \in B$] かつ $a \in C$」も成り立つから, 「$a \in A$ かつ [$a \in B$ かつ $a \in C$]」が成り立つ. だから「$a \in A$ かつ $a \in B \cap C$」が成り立つ. 従って, $a \in A \cap (B \cap C)$ が成り立つので $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ が成り立つ.

2. $\forall a \in A \cap (B \cap C)$ に対して, 「$a \in A$ かつ $a \in B \cap C$」が成り立つ. よって「$a \in A$ かつ [$a \in B$ かつ $a \in C$]」も成り立つから, 「[$a \in A$ かつ $a \in B$] かつ $a \in C$」が成り立つ. だから「$a \in A \cap B$ かつ $a \in C$」が成り立つ. 従って, $a \in (A \cap B) \cap C$ が成り立つので $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ が成り立つ.

3. $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ と $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ がわかったので, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ がわかる. □

問題 1.3.
定理 1.3 において, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ を示せ.

定理 1.4 (分配法則)**.**
集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

(1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
(2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

証明.
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ のみ示す.

1. $\forall a \in (A \cap B) \cup C$ に対して, 「$a \in A \cap B$ または $a \in C$」が成り立つ. よって「[$a \in A$ かつ $a \in B$] または $a \in C$」が成り立つから, 「[$a \in A$ または $a \in C$] かつ [$a \in B$ または $a \in C$]」が成り立つ. だから「$a \in A \cup C$ かつ $a \in B \cup C$」が成り立つ. 従って, $a \in (A \cup C) \cap (A \cup C)$ が成り立つので $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ が成り立つ.

2. $\forall a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ に対して, 「$a \in A \cup C$ かつ $a \in B \cup C$」が成り立つ. よって「[$a \in A$ または $a \in C$] かつ [$a \in B$ または $a \in C$]」が成り立つ. ここから, 「[$a \in A$ かつ $a \in B$] または $a \in C$」がわかる. なぜならば, $a \in C$ のときは正しく, $a \notin C$ ならば, $a \in A$ かつ $a \in B$ が成り立たなければならないからである. 従って, 「$a \in A \cap B$ かつ $a \in C$」となるから $a \in (A \cap B) \cup C$ となる. よって, $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$ となる.

3. $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ と $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$ がわかったので, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ がわかる. □

問題 1.4.
定理 1.4 において, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ を示せ.

定理 1.5 (de Morgan の法則)**.**
集合 A, B に対して, 次が成り立つ.

(1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
(2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

証明.

> **考え方**: 否定が入っているから, 「かつ」と「または」の否定を思いだそう. 「p かつ q」の否定は「[p でない] または [q でない]」だったことを使う.

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ のみ示す.

1. $\forall a \in (A \cap B)^c$ に対して, 「$a \notin A \cap B$」だから「[$a \in A$ かつ $a \in B$] の否定」が成り立つ. よって, 「$a \notin A$ または $a \notin B$」が成り立つから, $a \in A^c \cup B^c$ が成り立つ. 従って, $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ が成り立つ.

2. $\forall a \in A^c \cup B^c$ に対して, 「$a \notin A$ または $a \notin B$」が成り立つ. これは, 「[$a \in A$ かつ $a \in B$] の否定」だったことに注意すると, $a \notin A \cap B$ が成り立つ. 従って, $a \in (A \cap B)^c$ だから, $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ が成り立つ.

3. $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ と $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ が成り立つから, $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ が成り立つ. $\square$

問題 1.5.
定理 1.5 において, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ.

問題 1.6.
集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ をみたすとする. このとき, $A \subset C$ を示せ.

1.3. **直積集合.** 平面や空間を考える上で集合の積が重要になる. 高校で学んだ関数のグラフも直積集合の部分集合と考えることができる.

定義 1.7 (直積集合)**.**
集合 A, B に対して, **直積集合**$A \times B$ を

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

で定義する.

例 1.7.

- 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ に対して,
$$A \times B = \{(1, 4),\ (1, 5),\ (2, 4),\ (2, 5),\ (3, 4),\ (3, 5)\}.$$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ である. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と書く. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ではないことに注意せよ.
- $\mathbb{R} \times (0, \infty) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ 0 < y < \infty\}$ である. $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times (0, \infty)$ と書く (半空間という). このとき, $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$ となる.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(n, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\}$
- n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ を
$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ \text{個}}$$
で定める.
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$
である.

問題 1.7.
集合 A, B, C について, 次が成り立つことを示せ.

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

定理 1.6.
集合 X, Y, $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (A \times (Y \setminus B))$$

が成り立つ.

証明.

1. $\forall(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ に対して, $(x,y) \in X \times Y$ かつ $(x,y) \notin A \times B$ が成り立つから, 「$[x \in A$ かつ $y \in B]$ の否定」, すなわち「$x \notin A$ または $y \notin B$」が成り立つ. $x \notin A$ ならば $(x,y) \in (X \setminus A) \times Y$ が成り立ち, $x \notin B$ ならば $(x,y) \in X \times (Y \setminus B)$ が成り立つから, $(x,y) \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ が成り立つことがわかる. 従って, $(X \times Y) \setminus (A \times B) \subset ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ が成り立つ.

2. $\forall(x,y) \in ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ に対して, 「$(x,y) \in (X \setminus A) \times Y$ または $(x,y) \in X \times (Y \setminus B)$」が成り立つ. これから特に $(x,y) \in X \times Y$ が成り立つ. 一方, $(x,y) \in A \times B$ と仮定すると, 「$(x,y) \notin (X \setminus A) \times Y$ かつ $(x,y) \notin X \times (Y \setminus B)$」が成り立つので, 矛盾するから, $(x,y) \notin A \times B$. 従って, $(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ となるから, $((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)) \subset (X \times Y) \setminus (A \times B)$ が成り立つ. □

問題 1.8.

集合 A, B に対して, $A \setminus B = A$ が成り立つことと $A \cap B = \emptyset$ が同値となることを示せ.

問題 1.9.

A, B を集合としたとき, 次が互いに同値であることを示せ.

(1) $A \subset B$
(2) $A \cup B = B$
(3) $A \cap B = A$
(4) $A \setminus B = \emptyset$
(5) $A \cup (B \setminus A) = B$
(6) $A = B \setminus (B \setminus A)$

問題 1.10.

A, B を集合としたとき, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定める. この集合 $A \triangle B$ を A と B の対称差という. 次を示せ.

(1) $A \triangle B = B \triangle A$
(2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(3) $A \triangle B = \emptyset$
(4) $A \triangle \emptyset = A$
(5) 任意の集合 A, B に対して, $A \triangle X = B$ をみたす集合 X がただ一つ存在する.

2. 写像

以下, この節ででてくる集合は空でないとする.

2.1. **写像とは何か?.** 高校までに, 二次関数や三次関数を勉強したと思う. また, 三角関数や指数関数, 対数関数も学んだと思う. これらについて, 簡単に復習してみよう.

関数	$y = f(x)$ としたときの $f(x)$ の形の典型例	x の範囲	y の範囲
三次関数	$f(x) = x(x+1)(x-1)$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$
三角関数	$f(x) = \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
指数関数	$f(x) = e^x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \infty$
対数関数	$f(x) = \log x$	$0 < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$

さて, すぐにわかることとして, 対数関数 $f(x) = \log x$ では x の範囲として $(-\infty, 0]$ では定義できない. また, 三角関数 $f(x) = \sin x$ においては, $-\infty < x < \infty$ では, y の範囲は $[-1, 1]$ としてもよいことがわかる.

高校の数学で関数とは何か?ということは実は書かれているのだが, 少し曖昧なところがある. この関数, より一般に写像を定義しよう.

定義 2.1 (写像)**.**
X, Y を空でない集合とする. f が集合 X から集合 Y への写像であるとは, X のどんな元に対しても, Y の元をただ一つ対応させる規則のことをいう. このとき, $f : X \to Y$ と書き, X を f の定義域, Y を f の値域という. そして, $x \in X$ に対して, 対応する Y の元 y を $f(x) = y \in Y$ と書く. さらに, $Y = \mathbb{R}$ のとき, f を (実数値) 関数という.

写像でない例を先に説明しよう.

例 2.1 (写像でない例)**.**

- (定義域に問題がある場合) $X = Y = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ として, $f : X \to Y$ を $x \in X$ に対して $f(x) = \log x$ により定めようとすると, f は写像にならない. なぜなら, $0, -1 \in X = \mathbb{R}$ であるが, $f(0)$ や $f(-1)$ を定めることができないからである.
- (値域に問題がある場合, その 1) $X = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $Y = (0, \infty)$ として, $f : X \to Y$ を $x \in X$ に対して $f(x) = \cos x$ により定めようとすると, f は写像にならない. なぜなら, $\pi \in X = \mathbb{R}$ であるが, $f(\pi) = -1 \notin Y = (0, \infty)$ だからである.
- (一つずつ対応していない例) $X = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $Y = \mathbb{C}$ として, $f : X \to Y$ を $x \in X$ に対して $f(x) =$ "$y^2 + ay + 1 = 0$ をみたす $y \in \mathbb{R}$" により定めようとすると, f は写像にならない. なぜなら, $0 \in X = \mathbb{R}$ であるが, $f(0) = \sqrt{-1}$または $-\sqrt{-1}$ となり, $f(0)$ の値が一意に定まっていないからである.
- (値域に問題がある場合, その 2) $X = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ として, $f : X \to Y$ を $x \in X$ に対して

$$f(x) = (y_1, y_2) \quad \text{ただし, } y^2 + ay + 1 = 0 \text{ をみたす } y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ は } y_1 \leq y_2 \text{をみたす}$$

により定めようとすると, f は写像にならない. なぜなら, $(y_1, y_2) \notin Y = \mathbb{R}$ だからである. この場合は $Y = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ とすれば写像として定義される.

例 2.2 (写像の例)**.**

- $X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ とする．$x \in (0, \infty)$ に対して
$$f_1(x) := x^2$$
により写像 $f_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を定めることができる．
- $X = Y = \mathbb{R}$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に対して
$$f_2(x) := x^2$$
により写像 $f_2 : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ を定めることができる．
- $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に対して
$$g_1(x) := \sin x$$
により写像 $g_1 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ を定めることができる．
- $X = Y = \mathbb{R}$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に対して
$$g_2(x) := \sin x$$
により写像 $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定めることができる．

これらのように写像を定義するときは, **定義域** X, **値域** Y, $\forall x \in X$ **に対する** $f(x) \in Y$ の 3 つを明らかにする必要がある．高校までの数学で関数を定義するときは, 定義域をきちんと明らかにしていなかったこともあるかと思う．**定義域をきちんと決めること**はとくに注意すること．

注意 2.1.
例 2.2 において, f_1 と f_2, g_1 と g_2 は別の写像として考える必要がある．f_1 も f_2 も同じ対数関数で定まっているから, 同じ写像 (関数) と思うかもしれないが, f_1 と f_2 は定義域が異なっている．このことはとても重要な違いで, f_1 は成り立っているが f_2 では成り立っていない性質がある．同様に, g_1 と g_2 は同じ三角関数で定まっているが, g_1 と g_2 は値域が異なっている．このこともとても重要な違いであり, g_1 は成り立っているが gR_2 では成り立っていない性質がある．どのような性質が成り立っていないのかはあとで説明するが, f_1 と f_2, g_1 と g_2 にどのような違いがあるかを考えてみて欲しい．

定義 2.2 (写像の等号)**.**
集合 X, Y に対して, 写像 $f : X \to Y$ と $g : X \to Y$ が等しいとは, 任意の $x \in X$ に対して
$$f(x) = g(x)$$
が成り立つことをいう．このとき $f = g$ と書く ($f \equiv g$ と書くこともある)．$f = g$ が成り立たないとき $f \neq g$ と書く．

例 2.2 において, $f_1 \neq f_2$ である．なぜなら, f_1 と f_2 は定義域が違うからである．同様に $g_1 \neq g_2$ である．なぜなら, g_1 と g_2 の値域が違うからである．

例 2.3 (写像の等号の例)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して
$$f(x) := \sin^2 x, \quad g(x) = 1 - \cos^2 x$$
によって定める．このとき, $f = g$ である．

証明.

> **考え方** f と g の定義域, 値域は等しいから, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$ であることを示せばよい. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使えばよい.

f と g の定義域と値域は等しい. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ だから

$$f(x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = g(x)$$

となるので, $f(x) = g(x)$ がわかる. 従って, $f = g$ となる. $\square$

例 2.4 (写像が等号にならないこと)**.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := \cos x, \quad g(x) := 1 - \frac{1}{2}x^2$$

によって定める. このとき, $f \neq g$ である.

証明.

> **考え方** f と g の定義域, 値域は等しいから, 「$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$」の否定を示せばよい. だから, 「ある $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $f(x_0) \neq g(x_0)$」を示すことになる. この場合は, どうやってもいいから, $f(x_0) \neq g(x_0)$ をみたす x_0 を一つみつけてくればよい

$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ とおくと,

$$f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g(x_0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8} \neq 0 = f(x_0)$$

である. 従って, $f \neq g$ である. $\square$

注意.
もし, $1 - \frac{\pi^2}{8} \neq 0$ であることをしっかりと証明したいなら, 例えば, 次のようにすればよいだろう. $\pi > 3$ から $\pi^2 > 9$ となる. 従って,

$$1 - \frac{\pi^2}{8} < 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} < 0$$

だから, 特に $1 - \dfrac{\pi^2}{8} \neq 0$ である.

定義 2.3 (合成写像)**.**
X, Y, Z を集合とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. このとき, f と g の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ を $x \in X$ に対して

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

によって定める. つまり, x を f によって写したものをさらに g によって写したもので定める.

例 2.5.

$f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を, $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, \infty)$ に対してそれぞれ

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(y) = \log y$$

により定める. このとき, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $f \circ g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ を定めることができて

$$g \circ f(x) = g(x^2 + 1) = \log(x^2 + 1), \qquad f \circ g(x) = f(\log x) = \log^2 x + 1$$

となる. しかし, $g \circ g$ は g の値域と g の定義域が異なる, すなわち $(0, \infty) \neq \mathbb{R}$ だから定めることができない.

注意 2.2.

f も定義域と値域が異なるが, $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ だから, 実は $f \circ f$ を定めることができて

$$f \circ f(x) = (x^2 + 1)^2 + 1$$

となる. 一般に集合 X, Y, Z, W が $Y \subset Z$ をみたすとき, 写像 $f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ の合成 $g \circ f$ を定義することができる.

問題 2.1.

二つの写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = 3x + 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

で与える. 合成写像 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ を式で表せ.

定理 2.1 (写像の合成に関する結合法則)**.**

集合 X, Y, Z, W と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ について

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

証明.

考え方 任意の $x \in X$ に対して,

$$h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$$

が成り立つことを示せばよい. だから, 証明の最初は「任意の $x \in X$」になる.

$\forall x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))),$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

が成り立つ. よって, $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ だから, とくに $(h \circ (g \circ f))(x)((h \circ g) \circ f)(x)$ がわかる. 従って, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ. □

2.2. **像, 逆像.** X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像とする.

定義 2.4 (像, 逆像)**.**
　$A \subset X$ に対して,

$$f(A) := \{f(a) \in Y : a \in A\}$$

を f による A の**像**という.
　$B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

を f による B の**逆像**という.

例 2.6.
　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^2$$

で定める. $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ を

$$A_1 := [-3, 1],\ A_2 := [-1, 2],\ B_1 := [-1, 1],\ B_2 := [1, 9]$$

で定める. このとき,

$$\begin{aligned}
f(A_1) &= \{f(a) : a \in A_1\} \\
&= \{a^2 : a \in [-3, 1]\} = [0, 9] \\
f(A_2) &= \{f(a) : a \in A_2\} = [0, 4] \\
f^{-1}(B_1) &= \{a \in \mathbb{R} : f(a) \in B_1\} \\
&= \{a \in \mathbb{R} : a^2 \in [-1, 1]\} \\
&= \{a \in \mathbb{R} : -1 \leq a^2 \leq 1]\} = [-1, 1] \\
f^{-1}(B_2) &= \{a \in \mathbb{R} : f(a) \in B_2\} \\
&= \{a \in \mathbb{R} : 1 \leq a^2 \leq 9]\} = [-3, -1] \cup [1, 3]
\end{aligned}$$

となる.

定理 2.2.
　$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次が成り立つ:
(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;
(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;
(7) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

証明.

(1) **1.** $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ を示す. $\forall y \in f(A_1 \cup A_2)$ に対して, ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して, $y = f(x)$ と書ける. 「$x \in A_1$ or $x \in A_2$」だから, 「$f(x) \in f(A_1)$ or $f(x) \in f(A_2)$」が成り立つ. 従って, $y = (x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$ が成り立つ.

2. $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ を示す. $\forall y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ に対して, 「$y \in f(A_1)$ or $y \in f(A_2)$」が成り立つから,

$$「x_1 \in A_1 \text{が存在して } y = f(x_1)」\text{or}「x_2 \in A_2 \text{が存在して } y = f(x_2)」$$

が成り立つ. $x_1 \in A_1$ が存在して $y = f(x_1)$ ならば, $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ より, $x_1 \in A_1 \cup A_2$ だから, $y = f(x_1) \in f(A_1 \cup A_2)$ となる. 同様にして, $x_2 \in A_2$ が存在して, $y = f(x_2)$ ならば, $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ を使って, $y = f(x_2) \in f(A_1 \cup A_2)$ がわかる. 従って, どちらの場合でも, $y \in f(A_1 \cup A_2)$ が成り立つ.

(2) (1) の証明にならって, 各自, 証明せよ. (1) と違い, 等号が成立しないことに注意.

(3) あとの (4) の証明にならって, 各自, 証明せよ.

(4) **1.** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ を示す. $\forall x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ に対して, $f(x) \in B_1 \cap B_2$ が成り立つ. よって, 「$f(x) \in B_1$ and $f(x) \in B_2$」が成り立つから, 「$x \in f^{-1}(B_1)$ and $x \in f^{-1}(B_2)$」となる. 従って, $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つ.

2. $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ を示す. $\forall x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ に対して, 「$x \in f^{-1}(B_1)$ and $x \in f^{-1}(B_2)$」が成り立つから, 「$f(x) \in B_1$ and $f(x) \in B_2$」が成り立つ. よって, $f(x) \in B_1 \cap B_2$ となるから, $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ となる.

(5) $\forall x \in A_1$ に対して, 示したいことは $x \in f^{-1}(f(A_1))$ だから, $f(x) \in f(A_1)$ であることを示せばよいが, $x \in A_1$ だったから, $f(x) \in f(A_1)$ は成立する. 従って, $x \in f^{-1}(f(A_1))$ も成立する.

(6) $\forall y \in f(f^{-1}(B_1))$ に対して, ある $x \in f^{-1}(B_1)$ がとれて, $y = f(x)$ と書ける. また, $x \in f^{-1}(B_1)$ だから, $f(x) \in B_1$ が成り立つ. 従って, $y = f(x) \in B_1$ が成り立つ.

(7) 各自, 証明せよ.

(8) 各自, 証明せよ.

□

注意 2.3.

定理 2.2 の (2), (5), (6), (7) について, 等号は一般に成立しないことを説明しよう. 例 2.6 の f, $A_1 = [-3, 1]$, $A_2 = [-1, 2]$, $B_1 = [-1, 1]$ について

$$\begin{aligned}
f(A_1 \cap A_2) &= f([-1, 1]) = [0, 1] \\
f(A_1) \cap f(A_2) &= [0, 9] \cap [0, 4] = [0, 4] \neq f(A_1 \cap A_2) \\
f^{-1}(f(A_1)) &= f^{-1}([0, 9]) = [-3, 3] \neq A_1 \\
f(f^{-1}(B_1)) &= f([1, 1]) = [0, 1] \neq B_1 \\
f(A_1) \setminus f(A_2) &= [0, 9] \setminus [0, 4] = (4, 9] \\
f(A_1 \setminus A_2) &= f([-3, 1)) = (1, 9] \neq f(A_1) \setminus f(A_2)
\end{aligned}$$

となり, 一般に等号が成立しないことがわかる.

問題 2.2.

定理 2.2 において, (2), (3), (7), (8) を証明せよ.

2.3. **全射, 単射, 逆写像.** 先の例 2.6 において, $f(1)=f(-1)=1$ であった. つまり, $1\in\mathbb{R}$ に対して, $f(x)=1$ となる $x\in\mathbb{R}$ が二つ (以上) あることになる. つまり, $y=1$ に対しては, $y=f(x)$ となる x が二つ以上あるから, **逆関数が作れない**ことになる. 逆関数 (より正確には逆写像) が定められるためには写像 f になんらかの条件を課さないといけない. この節では, 逆写像が作れるための条件を考えることにする.

定義 2.5 (単射)**.**
X,Y を集合, $f:X\to Y$ を写像とする. f が**単射**であるとは, $\forall x_1,x_2\in X$ に対して

$$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

が成り立つことをいう.

問題 2.3.
単射の否定を述べよ

注意 2.4.
$f:X\to Y$ が単射であることは, 次と同値である.

(1) $\forall x_1,x_2\in A$ に対して,

$$x_1\neq x_2\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

が成り立つ. これは, 定義の「ならば」に対して対偶をとったものであり, 意味は定義よりもわかりやすいだろう. しかし, 証明にはあまり向かない. なぜなら, **等しくないことを示すのは, 等しいことを示すよりも難しいことが多いからである**.

(2) $\forall y\in Y$ に対して, $f^{-1}(\{y\})$ はたかだか一点の集合となる. これをみると, 逆像の記号が逆写像の記号となっていてもそれほど不思議ではないことがわかるだろう. ただし, $f^{-1}(\{y\})$ は空集合もありうることに注意すること.

例 2.7.
例 2.2 の $f_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を例にする. すなわち

$$f_1(x):=x^2\quad(x\in(0,\infty)),\qquad f_2(x):=x^2\quad(x\in\mathbb{R})$$

である. このとき, f_1 は単射であり, f_2 は単射でない.

例 2.7 の証明.

> **考え方** 単射は $\forall x_1,x_2\in(0,\infty)$ に対して, $f_1(x_1)=f_1(x_2)$ を**仮定して**, $x_1=x_2$ を示せばよい. 逆に単射でないことを示すには, 否定を示せばよいのだから, 「ある $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ が存在して, $f_2(x_1)=f_2(x_2)$ だが, $x_1\neq x_2$」となる x_1,x_2 をみつけてくればよい.

1. f_1 が単射になることを示す. $\forall x_1,x_2\in(0,\infty)$ に対して, $f_1(x_1)=f_1(x_2)$ を仮定すると, $x_1^2=x_2^2$ だから, $(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$ である. ここで, $x_1,x_2>0$ **だから**$x_1+x_2\neq0$ であり, $x_1-x_2=0$ が従う. よって, $x_1=x_2$ が成り立つから, f_1 は単射である.

2. f_2 が単射にならないことを示す. 「$f_2(x_1)=f_2(x_2)$ だが, $x_1\neq x_2$」となる $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ をみつければよい. そこで, $1,-1\in\mathbb{R}$ をとると $f_2(1)=f_2(-1)$ だが, $1\neq-1$. よって, f_2 は単射でない. □

注意 2.5.

例 2.7 の単射性の証明は $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定して $x_1 = x_2$ を示したが, この証明方法は「**何かが唯一つ存在する**」の証明をするときによく使う方法である. 実際に「何か」が二つ存在したとして, その二つが等しいことを示すことで存在は唯一つということがわかる. このように**唯一つ存在する**を論理記号では $\exists 1$ とか $\exists!$ と書く.

単射の場合では, 写像の値に対する定義域の点が一つしかないことを主張している. 実際に値が同じ点が二つあったとして, その二つが等しいことを示しているので, 写像の値に対する定義域の点が一つしかないことがわかる.

問題 2.4.

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を単射とする. このとき, $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$, $f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$ を示せ. (従って, 単射性は定理 2.2 の (2), (5) の等号が成立する十分条件になっている)

さて, 注意 2.4 において, f が単射であっても, $\forall y \in Y$ に対して, $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ がありうることを述べた. 逆写像を作るためには, $\forall y \in Y$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在しなければばならない. この性質を述べる.

定義 2.6 (全射)**.**

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする. f が**全射**であるとは, $\forall y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成り立つことをいう.

問題 2.5.

全射の否定を述べよ

注意 2.6.

$f : X \to Y$ が全射であることと $f(X) = Y$ が成り立つことは同値である.

例 2.8.

例 2.2 の $g_1 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を例にする. すなわち

$$g_1(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g_2(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

であった. このとき, g_1 は全射であり, g_2 は全射ではない.

例 2.8 の証明.

考え方 全射を示すには, $\forall y \in [-1, 1]$ に対して, $\sin x = y$ となる $x \in \mathbb{R}$ **をみつけてくればよい**. 逆に全射でないことを示すには, 全射の否定を示せばよいのだから, ある $y \in \mathbb{R}$ が存在して, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin x \neq y$ を示せばよい.

1. g_1 が全射となることを示す. $\forall y \in [-1, 1]$ に対して,

$$x := \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \in \mathbb{R}$$

とおくと,

$$g_1(x) = \sin x = \sin\left(\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = y$$

となる (なぜ, これが成り立つのかは, 次の注意を参照). 従って, g_1 は全射である.

2. g_2 が全射でないことを示す. ある $y \in \mathbb{R}$ をみつけて, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin x \neq y$ を示せばよい. そこで, $2 \in \mathbb{R}$ をとると, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $-1 \leq \sin x \leq 1$ だから, $g_2(x) = 2$ とならない. すなわち, $g_2(x) \neq 2$. 従って, g_2 は全射ではない. □

注意 (sin の定義 (やや難しい))**.**

どうして $\sin\left(\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = y$ となるかを少し形式的に説明しておく. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対して, $y = \sin x$ とおくと,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

より, sin の逆関数 arcsin について

$$\frac{d}{dy}(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \arcsin 0 = 0$$

がわかる. そこで, 変数 y について, $[0, y]$ で積分すると, 微積分の基本定理から

$$\arcsin y = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \tag{2.1}$$

がわかる. このことを使って, sin の逆関数 arcsin を (3.1) の右辺の積分で定義して, arcsin の逆関数が sin であるという定義をすることがある.

問題 2.6.

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, $B \subset Y$ に対して, $B \subset f(f^{-1}(B))$ を示せ. (従って, 全射性は定理 2.2 で (6) の等号が成立する条件となっている)

さて, $f : X \to Y$ が全単射であるとは, f が全射かつ単射であるときをいう. このときは, 全射の性質より, $\forall y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ がとれる. さらに単射の性質より, この x は一意である. 従って, $y \in Y$ に対して一意に $x \in X$ がとれて, $y = f(x)$ とできる. そこで, この対応を考える.

定義 2.7 (逆写像)**.**

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を全単射とする. このとき, f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ を $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ により定める.

例 2.9.

逆写像の例を述べる. また, 単射であれば, 逆写像を構成することもできる例を述べる.

- $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = e^x$ で定めると, f は全単射になる (各自, 確かめよ). 従って, f の逆写像 $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を定義することができる. 実際, よく知られているように, $y \in (0, \infty)$ に対して, $f^{-1}(y) = \log y$ である.
- $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を, $x \in (0, \infty)$ に対して, $g(x) = x^2$ で定めると, g は単射であるが, 全射ではない (各自, 確かめよ). しかし, $y \in g((0, \infty))$ に対して, $g(x) = y$ をみたす $x \in (0, \infty)$ は一意に決まる. このことから, $h : g((0, \infty)) \to (0, \infty)$ を $y \in g((0, \infty))$

に対して, $g(x) = y$ をみたす $x \in (0, \infty)$ として定めることができる. この写像 h を g^{-1} と書くことがある.

定理 2.3.
X, Y を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を写像とする. 任意の $x \in X$ に対して, $g \circ f(x) = x$ が成り立つならば, g は全射であり, f は単射である.

系 2.1.
X, Y を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を写像とする. 任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して, $g \circ f(x) = x$ かつ $f \circ g(y) = y$ が成り立つならば, f は全単射であり, $f^{-1} = g$ となる.

定理 2.3 の証明.
1. f が単射であることを示す. 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ と仮定する. このとき, $g \circ f(x_1) = x_1$ かつ $g \circ f(x_2) = x_2$ より $x_1 = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_2$ だから, $x_1 = x_2$ が成り立つ.
2. g が全射であることを示す. 任意の $x \in X$ に対して, $y = f(x)$ とおくと, $g \circ f(x) = x$ より, $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = x$ となる. □

問題 2.7.
集合 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 次を示せ.
(1) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である.
(2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である.

問題 2.8.
$a < b$ に対して, 閉区間 $[0, 1]$ から閉区間 $[a, b]$ 区間への全単射, および開区間 $(0, 1)$ から開区間 $(1, b)$ 区間への全単射を与える関数を構成せよ (ヒント: 一次関数を考えよ).

問題 2.9.
$f : [0, 1] \to (0, 1)$ を $x \in [0, 1]$ に対して次で定める.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{x}{4}, & x = \frac{1}{2^n}\ (n = 0, 1, 2, \dots) \\ x, & x \neq 0 \text{ or } x \neq \frac{1}{2^n}\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

この f は全単射となることを示せ.

注意.
開区間 (a, b) から閉区間 $[c, d]$ への全単射な関数は連続になりえない. この事実は, 位相空間における連続の概念を理解するうえで, 非常に重要である.

問題 2.10.
X, Y を空でない集合とし, $\pi : X \times Y \to X$ を $(x, y) \in X \times Y$ に対して

$$\pi(x, y) := x$$

で定める. π は全射であることを示せ. この π を射影という (ヒント: 空でないことを強調するのには意味がある. 一見するとあたりまえな主張だが, 証明を正しく書こうとすると, 少しやっかいになる).

3. 無限個の集合

3.1. **集合族.** 本来は, 集合の章で学ぶべき話であるが, ここで, 集合を要素とする集合を考える.

定義 3.1 (集合族)**.**
集合を要素とする集合を**集合族**という. 花文字 (スクリプト体の文字) で書かれることがある.

例 3.1.
集合 X において, その部分集合を集めた集合は集合族になる (このように, 集合 X の部分集合からなる集合族を一般に X 上の集合族という). この集合族を 2^X と書く. すなわち

$$2^X := \{A : A \subset X\}$$

である. 例えば, $X = \{0, 1\}$ のとき,

$$2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

である.

例 3.2.
$p \geq 2$ を自然数とする (実際には素数で使うことが多い). このとき, $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\overline{a} := \{x \in \mathbb{Z} : x - a \text{ は } p \text{ で割り切れる }\}$$

とおく. このとき, 集合族 $\mathbb{Z}_p$ を

$$\mathbb{Z}_p := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

で定義する. p が素数の時が特に重要である. これは, p でわった余りで $\mathbb{Z}$ をわけたものとみることもできる. このことについては, 同値関係, 商集合を考えるときにさらに詳しく説明する.

例 3.3.
実数上の集合族 $\mathscr{B}$ を

$$\mathscr{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

で定める. つまり, 開区間全体を集めた集合が $\mathscr{B}$ である. この集合は位相空間を学ぶときに重要となる. これは, このあと述べる無限個の集合の例ともなっている

問題 3.1.
$X = \{1, 2, 3\}$ のときに, 2^X を具体的に求めよ (空集合と全体を忘れないように).

3.2. **無限個の集合の例.** 集合が無限個ある場合を考えよう. 先の例 3.3 は, 集合の要素が無限個あるわけであるが, 集合の要素が開区間だったから, 開区間が無限個ある, すなわち集合が無限個あることになる. 他の例を挙げよう.

例 3.4.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, 集合 $A \subset \mathbb{R}$ を

$$A_n := \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

と定める. このとき, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は無限個の集合 (集合列ということもある) である.

例 3.5.
$\lambda > 0$ に対して, 集合 $A_\lambda \subset \mathbb{R}$ を

$$A_\lambda := (0, \lambda)$$

と定める. このとき, $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ は無限個の集合である.

無限個の集合に対して, なんらかのラベル付け (A_n での A_λ の n や λ) があると便利である.

定義 3.2 (添字集合と集合族)**.**
空でない集合 Λ と $\lambda \in \Lambda$ に対して, 集合 A_λ を考える. このとき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考えたときに, λ を**添字**といい, Λ を**添字集合**という.

例 3.4 では添字集合は $\mathbb{N}$ であり, 例 3.5 では添字集合は $(0, \infty)$ である. また, $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_{n,m} := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$$

とおけば, 添字集合は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ となる.

3.3. **無限個の集合の和集合, 共通部分.** 話を過度に抽象化しないために, しばらくの間, 考える集合族は $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ として, 添字集合は $\mathbb{N}$ とする. 実際には添字集合はなんでもよい.

定義 3.3 (和集合)**.**
集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 和集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x : \exists n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x \in A_n\}$$

で定義する.

定義 3.4 (共通部分)**.**
集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x : \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } x \in A_n\}$$

で定義する.

注意 3.1.
添字集合が $\mathbb{N}$ のときは, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ を $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ を $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}$ と書くことがある.

例 3.6.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, 集合

$$A_n := \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right)$$

を考える. このとき,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2-\frac{1}{n}\right) = (0,2), \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2-\frac{1}{n}\right) = (0,1)$$

となる.

例 3.6 の証明.

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,2)$ について, $\displaystyle(0,2) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ のみ示す. $\forall x \in (0,2)$ に対して, $2 - x > 0$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\frac{1}{N} < 2 - x$ とできる (厳密にやるなら Archimedes の原理). 従って, この $N \in \mathbb{N}$ に対して, $2 - \frac{1}{N} > 2 - (2 - x) = x$ だから $x \in A_N$ となる. 従って, $\displaystyle x \in A_N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となるから, $\displaystyle(0,2) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が示された.

2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1)$ について, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0,1)$ のみ示す. $\displaystyle\forall x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ に対して, $\forall n \in \mathbb{N}$ について $x \in A_n$ だから, $0 < x < 2 - \frac{n}{1}$ が成り立つ. 特に $n = 1$ とすると $0 < x < 1$ となるから, $x \in (0,1)$ となる. 従って, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0,1)$ が成り立つ. □

問題 3.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle A_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 3.3.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle B_n = \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ を求めよ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

集合の演算に対する結合法則や分配法則, de Morgan の法則や定理 2.2 の主張は, 無限個の集合の和集合, 共通部分についても, ほぼそのまま成り立つ. これらは問題としておく.

問題 3.4 (分配法則)**.**

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B), \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B)$$

を示せ.

問題 3.5 (de Morgan の法則)**.**

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c, \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

を示せ.

問題 3.6 (写像と集合の演算)**.**
　X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(2) $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

問題 3.7 (上極限集合, 下極限集合, やや難しい)**.**
　$\mathbb{N}$ を添字集合とする集合族 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ に対して $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ の上極限集合 $\limsup_{n\to\infty} A_n$ と下極限集合 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ を

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n\right)$$

でそれぞれ定義する. 集合族 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 次を示せ.

(1) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$,

(2) $A_n \subset B_n$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} B_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} B_n.$$

注意.
　上極限集合 $\limsup_{n\to\infty} A_n$ と下極限集合 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ が一致するとき, これを $\lim_{n\to\infty} A_n$ と書き, 極限集合という.

3.4. **無限個の集合の直積と選択公理.** ここでも話を抽象化しないために, 考える集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ として, 添字集合は $\mathbb{N}$ とする. 無限個の集合に対する直積を定義したいのだが, そのために 2 個の直積集合 $A_1 \times A_2$ について考え直してみよう. $A_1 \times A_2$ は

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1 \text{ かつ } a_2 \in A_2\}$$

であった. そこで, $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ に対して, $f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$ を

$$f(n) = a_n \quad (n = 1, 2)$$

で定めると $f(n) \in A_n$ をみたす. 逆に $f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$ が $n = 1, 2$ に対して, $f(n) \in A_n$ をみたすとすると, $(f(1), f(2)) \in A_1 \times A_2$ となる. このことから

$$T : A_1 \times A_2 \to \{f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2, f(1) \in A_1, f(2) \in A_2\}$$

を $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ と $n = 1, 2$ に対して $T(a_1, a_2)(n) := a_n$ と定めることができて, この写像 T は全単射となる. つまり, $A_1 \times A_2$ と $\{f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2, f(1) \in A_1, f(2) \in A_2\}$ は (集合として) 同じものとみなすことができる. この考察から, 次の定義が得られる.

定義 3.5 (無限個の直積)**.**
集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して直積集合 $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n := \left\{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \in A_n \right\} \tag{3.1}$$

で定める.

直感的には $a \in \displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ということは, $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ と思えばよいのであるが, 点々の部分を厳密に述べようとすると定義 3.5 にようにしなければいけない. さらに, この定義にはもっと重大な問題がある. 有限個の場合とは異なり (3.1) の右辺の集合が空でないことを確かめておかないといけないのである. $\exists n \in \mathbb{N}$ が存在して, $A_n = \emptyset$ となっているときは, 右辺は空集合となる (これは写像のときにきちんと述べてはいなかったのだが, 値域が空集合となる写像は存在しない). しかし, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n \neq \emptyset$ のときに (3.1) の右辺はどうなっているのだろうか？直感的に考えれば, (3.1) の右辺は空でない, すなわち, $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は空集合ではないと考えるべきであるが, これは公理, すなわち証明せずに認める事実として考えられている. このことを**選択公理**という.

> **選択公理**　Λ を添字集合とする. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して, $A_\lambda \neq \emptyset$ を仮定する. このとき, $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ となる.

このあたりまえに見える公理から, 実に不思議ともいえる結果が得られる. 例えば

- (Lebesgue 測度の意味で) 面積を決定できない集合が存在する.
- 3 次元の球体を適当に分割して, くっつけなおすと, 同じ半径の球体を 2 つ作ることができる (Banach-Tarski のパラドックス). ただし, できた 2 つの球体は, (Lebesgue 測度の意味で) 面積を決定できない.

このことから, 選択公理を認めるか否かについては, 様々な意見がある. とりわけ, 面積を決定できない集合が存在することは, 現実的には奇妙とも思えるため, 物理や工学への応用をも念頭においた数学者などで, 「選択公理を使わないようにしている」研究者もいる. 実際に, 選択公理 (と同値な命題) を使うような状況はかなり込み入っていることが多く, 使わなければ使わないにこしたことはないというのが筆者の意見である.

Appendix A. 数学に必要な論理学

数学に必要となるであろう論理学を概観する. より詳しいことについては,

- 中内伸光, 「数学の基礎体力をつけるためのろんりの練習帳」, 共立出版, 2002.

を参考にして欲しい.

A.1. **任意と存在.** $\forall$ は「**任意の**」を表す. これは, for all や for any の A をひっくりかえしたものである. 日本語では「$\forall$ ○○に対して」の書き方をすることが多い.

例 A.1.

(1) 「$\forall x > 0$ に対して $(x-1)^2 \geq 0$」は真.
(2) 「$\forall x > 0$ に対して $(x-1)^2 > 0$」は偽. なぜなら, $x = 1$ は $x > 0$ だが $(x-1)^2 > 0$ をみたさない.

このとき, より簡潔に次のように書くことがある.

(1) $\forall x > 0 \quad (x-1)^2 \geq 0$
(2) $\forall x > 0 \quad (x-1)^2 > 0$

$\exists$ は「**存在する**」を表す. これは, There exists の E をひっくりかえしたものである. 「$\exists$ ○○ s.t. 」の書き方をすることが多い. ここで, 「s.t.」は such that の略であり, so that の格式ばった言い方である.

例 A.2.

(1) 「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x-1)^2 = 0$」は真. これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x-1)^2 = 0$」となる.
(2) 「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x-1)^2 + 1 = 0$」は偽 ($(x-1)^2$ は負にならないから). これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x-1)^2 + 1 = 0$」となる.

注意 A.1.
「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x-1)^2 = 0$」を英語で書くと

$$\text{There exists } x \in \mathbb{R} \text{ such that } (x-1)^2 = 0$$

となり, 記号とつじつまがある. しかし, 日本語の文章と $\exists$ はあわないので, 本稿では (本節以外では) 使わない.

例 A.3.

$$k > 0 \text{ に対して, } x^2 - 2x - k = 0 \text{ となる実数 } x \text{ があることを示せ.}$$

は, 記号を用いて

$$\text{「}\forall k > 0,\ \exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x^2 - 2x - k = 0\text{」を示せ.}$$

と略記できる.

A.2. **「かつ」と「または」.** 「p and q」は「p **かつ** q」をあらわす. また「p or q」は「p **または** q」をあらわす.

例 A.4.

(1) 「$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x+1)^2 \geq 0$ and $(x-1)^2 \geq 0$」は真. これを和訳すると, 「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x+1)^2 \geq 0$ かつ $(x-1)^2 \geq 0$」となる.
(2) 「$\exists x,\ \exists y > 0$ s.t., $\dfrac{x^2+y^2}{2} \leq xy$ and $x \neq y$」は偽. これを和訳すると, 「ある $x,\ y > 0$ が存在して $\dfrac{x^2+y^2}{2} \leq xy$ かつ $x \neq y$」となる.
(3) 「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x+1)^2 = 0$ or $(x-1)^2 = 0$」は真. これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 = 0$ または $(x-1)^2 = 0$」となる.
(4) 「$\exists x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x+1)^2 < 0$ or $(x-1)^2 < 0$」は偽. これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 < 0$ または $(x-1)^2 < 0$」となる.

A.3. **ならば.** 「$p \Longrightarrow q$」は「p ならば q が成り立つ」をあらわす. ここで, p が成り立っていないときは何も主張していない. 例えば

$$x > 0 \text{ ならば } 2(x+1)^2 - 1 > 0$$

という主張で $x \leq 0$ のことは何も主張していない ($x \leq 0$ のときは, ある意味, **どうでもいい**). よって, 「$p \Longrightarrow q$」は「p が不成立 or q が成立」と書くこともできる.

例 A.5.

(1) 「$x > 0 \Longrightarrow 2(x+1)^2 - 1 > 0$」は真となる.
(2) 「$x > 0 \Longrightarrow 2(x+1)^2 - 10 > 0$」は偽となる. なぜなら $x = 1$ とおくと $x > 0$ だが

$$2(x+1)^2 - 10 = 2(1+1)^2 - 10 = 8 - 10 = -2 < 0$$

となるからである.

A.4. **否定.** 「p の否定」とは「p **が成り立たない**」である. 従って, 「p が成り立つ or p の否定が成り立つ」は常に真となる.

否定の作り方は次のようにすればよい.

$$\forall \underset{\text{否定}}{\longleftrightarrow} \exists$$

$$p \text{ and } q \underset{\text{否定}}{\longleftrightarrow} p \text{ が不成立 or } q \text{ が不成立}$$

$$p \Longrightarrow q \underset{\text{否定}}{\longleftrightarrow} p \text{ が成立 and } q \text{ が不成立}$$

これ以外については, 主張の否定を書けばよい. 具体例を示す.

例 A.6.

- 集合 A, B に対して

$$A \subset B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A,\ a \in B$$

であった. $A \subset B$ の否定, すなわち $A \not\subset B$ は, $\forall \underset{\text{否定}}{\longrightarrow} \exists$, $a \in B \underset{\text{否定}}{\longrightarrow} a \notin B$ とすればよいので,

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists a \in A,\ a \notin B$$

となる. つまり, 「ある $a \in A$ が存在して $a \notin B$」となる.

- 「$\forall k > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x^2 - 2x - k = 0$」の否定は

$$\exists k > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x - k \neq 0$$

となる.

- (数列の収束) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義は

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{s.t.}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

である. これを和訳してみると

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$」

となる. これを否定すると,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \text{s.t.}\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}\ \text{s.t.} n \geq N \text{ and } |a_n - a| \geq \varepsilon$$

となる. これを和訳してみると

「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ かつ $|a_n - a| \geq \varepsilon$」

となる.