数学入門 A 演習問題

学籍番号　　　　　　　名前

問題 1.1.
$\mathbb{Z}_2 := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_4 := \{4n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_6 := \{6n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくとき,

$$\mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z}_2, \qquad \mathbb{Z}_6 \not\subset \mathbb{Z}_4,$$

を示せ.

問題 1.2.
集合 A, B, C が $A \subset B$ かつ $B \subset C$ をみたすならば $A \subset C$ を示せ (ヒント: $A \subset C$ を示したいのだから, 証明の最初の一文は「任意の $a \in A$ に対して」となるはずで, この a に対して, 証明のどこかで $a \in C$ となるはず).

問題 1.1 の証明.
1. $a \in \mathbb{Z}_4$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ がとれて, $a = 4n$ と書ける. $4n = 2 \times (2n)$ であり, $2n \in \mathbb{N}$ だから, $a = 2 \times (2n) \in \mathbb{Z}_2$ となる. 従って, $a \in \mathbb{Z}_4$ ならば $a \in \mathbb{Z}_2$ となることから $\mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z}_2$ である.
2. $6 = 6 \times 1$ だから $6 \in \mathbb{Z}_6$ である. しかし, 6 は 4 で割り切れないから, $6 \notin \mathbb{Z}_4$ である. □

問題 1.2 の証明.
任意の $a \in A$ に対して, $A \subset B$ だから, $a \in B$ が成り立つ. さらに, $B \subset C$ と $a \in B$ だったことから $a \in C$ も成り立つ. 従って, $A \subset C$ が成り立つ. □

問題 1.3 (問題 1.2 の類題)**.**
集合 A, B, C が $A = B$ かつ $B = C$ をみたすならば $A = C$ を示せ (ヒント: $A = B$ かつ $B = C$ から $A = C$ が導けることは自明ではない. 集合の等号の定義に基いて示す必要がある. この場合は $A \subset C$ と $C \subset A$ の両方を示せばよい. 証明の方針は問題 1.2 とだいたい同じである).

数学入門 A 演習問題　(2012 年 4 月 27 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 2.1.

集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対して, 次の主張を考える.

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \varepsilon \Longrightarrow y \in U. \tag{2.1}$$

(1) (2.1) を和訳せよ.
(2) (2.1) の否定を作れ. 回答は日本語にしなくてよい.

問題 2.2.

A, B を集合とする. このとき, 次の否定を作れ

(1) $x \notin A$ and $x \notin B$
(2) $x \notin A$ or $x \notin B$
(3) $x \in A$ and $x \notin B$
(4) $(x \in A$ and $x \in B)$ or $x \in B$

問題 2.1 の回答.

(1) 任意の $x \in U$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $|x-y| < \varepsilon$ ならば $y \in U$.
注意「ある $\varepsilon > 0$ が存在するような任意の $y \in U$ に対して」という誤答がけっこういた. こう書いてしまうと, $y \in U$ の任意性に条件がつく文章になってしまい, もともとの意味とは異なる. この誤答を論理記号だけで書くのは少し難しいのだが, あえて書くならば, 例えば

$$\forall y \in \mathbb{R} \text{ satisfying } \exists \varepsilon > 0$$

となる.

(2) $\forall$ は $\exists$ に, $\exists$ は $\forall$ に, $p \Longrightarrow q$ は「p and q でない」とかえればよい. なお, s.t. は $\exists$ のあとにのみつける (つけなくてもよい).

$$\exists x \in U,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \varepsilon \text{ and } y \notin U.$$

□

問題 2.2 の回答.

(1) $x \in A$ or $x \in B$
(2) $x \in A$ and $x \in B$
(3) $x \notin A$ or $x \in B$
(4) 丸括弧のつけかたに注意すると

$$(x \notin A \text{ or } x \notin B) \text{ and } x \notin B.$$

注意 $x \notin B$ という誤答が結構多かった. 実は誤答ではないのだが, $(x \notin A$ or $x \notin B)$ and $x \notin B$ と同値であることを示す必要がある. つまり, $x \notin B$ を仮定して, $(x \notin A$ or $x \notin B)$ and $x \notin B$ を示すことと, 逆に $(x \notin A$ or $x \notin B)$ and $x \notin B$ を仮定して, $x \notin B$ を示す必要がある.

□

数学入門A 演習問題

この問題では, 主張が正しいかどうかは問題にはしないが, 主張が真となるか, もしくは主張の否定が真となるかを考えてみて欲しい.

問題 2.3 (単射)**.**
次の主張を考える:「任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $x_1^2 = x_2^2$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つ.」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.4 (全射)**.**
次の主張を考える:「任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $y = x^2$ とできる.」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.5 (線形写像)**.**
A を 3 次の正方行列として, 次の主張を考える:「任意の 3 次の実数値ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ かつ $A(c\vec{x}) = cA\vec{x}$ が成り立つ」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.6 (一次独立)**.**
$\vec{x}_1 = (2,3,1), \vec{x}_2 = (1,2,3), \vec{x}_3 = (1,1,-1)$ として, 次の主張を考える:「任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対して, $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 = \vec{0}$ ならば $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる.」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.7 (連続)**.**
次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x| < \delta$ ならば $|\sin x| < \varepsilon$ が成り立つ.」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.8 (一様連続)**.**
次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in (0,\infty)$ に対して, $|x-y| < \delta$ ならば $|\log x - \log y| < \varepsilon$ が成り立つ.」
(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.
(4) 問題 2.7 との違いを考えよ.

問題 2.9 (各点収束).

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in (0,1)$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ ならば $|x^n| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.10 (一様収束).

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in (0,1)$ に対して, $n \geq N$ ならば $|x^n| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.
(4) 問題 2.9 との違いを考えよ.

数学入門 A 演習問題　(2012 年 5 月 11 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 3.1.
集合 A, B に対して, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B$ を示せ.

問題 3.2.
集合 A, B に対して, $A \cap B = B \cap A$ を示せ.

問題 3.1 の回答.
1. $B \subset A \cup B$ を示す. $\forall b \in B$ に対して, 「$b \in A$ または $b \in B$」が成り立つから, $b \in A \cup B$ も成り立つ. 従って, $B \subset A \cup B$.
2. $A \cap B \subset B$ を示す. $\forall b \in A \cap B$ に対して, 「$b \in A$ かつ $b \in B$」が成り立つから, 特に $b \in B$ も成り立つ. 従って, $A \cap B \subset B$.

□

問題 3.2 の回答.
1. $A \cap B \subset B \cap A$ を示す. $\forall x \in A \cap B$ に対して, 「$x \in A$ かつ $x \in B$」が成り立つから, 「$x \in B$ かつ $x \in A$」も成り立つ. 従って, $x \in B \cap A$ より $A \cap B \subset B \cap A$ が成り立つ.
2. $B \cap A \subset A \cap B$ を示す. $\forall x \in B \cap A$ に対して, 「$x \in B$ かつ $x \in A$」が成り立つから, 「$x \in A$ かつ $x \in B$」も成り立つ. 従って, $x \in A \cap B$ より $B \cap A \subset A \cap B$ が成り立つ.
3. $A \cap B \subset B \cap A$ かつ $B \cap A \subset A \cap B$ が成り立つので, $A \cap B = B \cap A$ が成立する. □

問題 3.3.
集合 A, B に対して, $A \setminus B = A \cap B^c$ を示せ.

数学入門A 演習問題 (2012年5月18日)

学籍番号　　　　　名前

問題 4.1.
集合 A, B に対して, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立つことを示せ.

問題 4.2.
集合 A, B, C について, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つことを示せ.

問題 4.1 の証明.
1. $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ を示す. $\forall x \in (A \cup B)^c$ に対して, $x \notin A \cup B$ だから,「$x \in A$ または $x \in B$」の否定, すなわち「$x \notin A$ かつ $x \notin B$」が成り立つ. 従って,「$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$」だから, $x \in A^c \cap B^c$ となり, $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ が成り立つ.
2. $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ を示す. $\forall x \in A^c \cap B^c$ に対して,「$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$」だから,「$x \notin A$ かつ $x \notin B$」が成り立つ. これは,「$x \in A$ または $x \in B$」の否定であることに注意すると, $x \notin A \cup B$ がわかる. 従って, $x \in (A \cup B)^c$ だから, $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ が成り立つ. □

問題 4.2 の証明.
1. $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$ を示す. $\forall (x, y) \in A \times (B \cap C)$ に対して, $x \in A$ かつ $y \in B \cap C$ が成り立つ. よって,「$y \in B$ かつ $y \in C$」が成り立つから,「$(x, y) \in A \times B$ かつ $(x, y) \in A \times C$」が成り立つ. 従って, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つ.
2. $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$ を示す. $\forall (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ に対して, $(x, y) \in A \times B$ かつ $(x, y) \in A \times C$ が成り立つ. だから,「$x \in A$ かつ $y \in B$ かつ $y \in C$」が成り立つから,「$x \in A$ かつ $y \in B \cap C$」が成り立つ. 従って $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ となるから, $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$ が成り立つ. □

数学入門 A 演習問題　(2012 年 5 月 25 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 5.1.

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad g(w) = \sqrt{1-w^2}$$

について, f と g の定義域と地域を定めて関数を定義せよ.

問題 5.2.

$f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ と $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, それぞれ

$$f(x) := \max\{0, x\}, \qquad g(x) := \frac{|x|+x}{2}$$

で定める. このとき, $f = g$ となることを証明せよ.

問題 5.3.

$GL(3,\mathbb{R})$ を 3 次の実数係数正則行列のなす集合, $Sym(3,\mathbb{R})$ を 3 次実数係数対称行列のなす集合とする. $f : GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R}) \to GL(3,\mathbb{R})$ と $g : Sym(3,\mathbb{R}) \times Sym(3,\mathbb{R}) \to Sym(3,\mathbb{R})$ をそれぞれ, $X, Y \in GL(3,\mathbb{R})$, $Z, W \in Sym(3,\mathbb{R})$ に対して

$$f(X,Y) := XY, \qquad g(Z,W) := ZW$$

で定めたとき, f と g が関数になるか考えよ.

問題 5.1 の証明.

f はたとえば, $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ とすればよい. もしくは, $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ としてもよい. さらに

$$\frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$$

に注意すれば, $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ともできる.

w はたとえば, $w : [-1,1] \to \mathbb{R}$ とか $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とすればよい. とにかく, $f(z)$ や $g(w)$ が意味を持つように定めてあればよい. □

問題 5.2 の証明.

f と g の定義域と値域は同じである. そこで, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = g(x)$ を示せばよい. 場合わけをしてしめす.

1. $x \geq 0$ のときは, $f(x) = x$ かつ $|x| = x$ だから

$$g(x) = \frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = x = f(x)$$

となり, $f(x) = g(x)$ となる.

2. $x < 0$ のときは, $f(x) = 0$ かつ $|x| = -x$ だから

$$g(x) = \frac{|x|+x}{2} = \frac{-x+x}{2} = 0 = f(x)$$

となり, $f(x) = g(x)$ となる.

3. よって, どちらの場合でも $f(x) = g(x)$ となるから, $f = g$ となる. □

数学入門A 演習問題　(2012年6月1日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 6.1.

二つの写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := 3x+1, \qquad g(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

で与える．合成写像 $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ を式で表せ．

問題 6.2.

$n,m\in\mathbb{N}$ に対して, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ を n 行 m 列の行列全体のなす集合とし, $A\in M_{3,2}(\mathbb{R}), B\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ とする．$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ と $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ をそれぞれ $x\in\mathbb{R}^2$, $y\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$(*) \qquad f(x) := Ax, \qquad g(y) := By$$

と定める．このとき, $f\circ g$ と $g\circ f$ の定義ができるか考えよ．そして, 定義できるときは, その写像を求めよ．余裕があれば, 行列の積 AB が定義できるとき, $(*)$ のようにして写像を定義するときの写像 f, g の定義域, 値域を考察してわかることを述べよ．

問題 6.1 の解答.

$$f\circ g(x) = \frac{3}{x^2+1}+1, \qquad g\circ f(x) = \frac{1}{(3x+1)^2+1},$$

$$f\circ f(x) = \frac{3}{(3x+1)}+1 = 9x+4, \qquad g\circ g(x) = \frac{1}{(\frac{1}{x^2+1})^2+1} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}.$$

□

問題 6.2 の解答.

g の値域と f の定義域が同じなので, $f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が定義できて, $y\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$f\circ g(y) = f(g(y)) = f(By) = ABy$$

となる．

また, f の値域と g の定義域が同じなので, $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が定義できて, $x\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(Ax) = BAx$$

となる．

注意すべきことは, 行列の積 AB, BA が定義できることである．$(*)$ で定めるときに, 合成写像が定義できることと, 行列の積 AB が定義できることが同値になる． 実際に, $A\in M_{l,n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{m,l}(\mathbb{R})$ とすると, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ と $g:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ が $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^l$ に対して $(*)$ によって定義できる．このときに行列の積 BA が定義できるし, 合成写像 $g\circ f$ も定義できる．代数学幾何学で学ぶが, 「行列は線型写像である」が認識として正しい．

□

数学入門A 演習問題　(2012 年 6 月 8 日)

問題 7.1.

A を 6 の倍数からなる整数全体の集合, B を 12 の倍数からなる整数全体の集合, C を 18 の倍数からなる整数全体の集合とする.

(1) 集合 A, B, C を具体的に表示せよ. できるだけ厳密な表示で与えよ ($\ldots$ を使わずに表示してみよ).

(2) $B \subset A$, $B \not\subset C$ を示せ.

問題 7.2.

集合 A, B に対して, $A \setminus B = A \cap B^c$ を示せ.

問題 7.3.

集合 A, B, C に対して $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ を示せ.

問題 7.4.

集合 A, B, C に対して $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ を示せ.

問題 7.5.

集合 A, B に対して, $A \setminus B = A$ が成り立つことと $A \cap B = \emptyset$ が同値となることを示せ. つまり,「$A \setminus B = A$ ならば $A \cap B = \emptyset$」となることと「$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \setminus B = A$」の両方を示せ.

問題 7.6.

A, B を集合としたとき, 次が互いに同値であることを示せ (ヒント: 例えば, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) を示したあとに, 問題 7.2 に注意して, (1) $\Leftrightarrow$ (5) と (1) $\Leftrightarrow$ (6) を示してみよ).

(1) $A \subset B$

(2) $A \cup B = B$

(3) $A \cap B = A$

(4) $A \setminus B = \emptyset$

(5) $A \cup (B \setminus A) = B$

(6) $A = B \setminus (B \setminus A)$

問題 7.7 (やや難)**.**

A, B を集合としたとき, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定める. この集合 $A \triangle B$ を A と B の対称差という. 次を示せ.

(1) $A \triangle B = B \triangle A$

(2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

(3) $A \triangle B = \emptyset$

(4) $A \triangle \emptyset = A$

(5) 任意の集合 A, B に対して, $A \triangle X = B$ をみたす集合 X がただ一つ存在する (存在と一意性は別々の証明が必要).

問題 7.8.

$$f(x) = (x^2+1)x^{-1}, \quad g(y) = \log(1+y)$$

について,

(1) f と g の定義域と値域を定めて関数を定義せよ.
(2) $f \circ g$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.
(3) $g \circ f$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.

問題 7.9 (単射)**.**

X, Y を空でない集合し, $f : X \to Y$ を写像とする. f が**単射**であるとは, 「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つ」ことをいう.

(1) 論理記号を使って単射の定義を述べよ.
(2) 単射の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 単射の否定を和訳せよ.

問題 7.10 (全射)**.**

X, Y を空でない集合し, $f : X \to Y$ を写像とする. f が**全射**であるとは, 「任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して, $y = f(x)$ とできる」ことをいう.

(1) 論理記号を使って全射の定義を述べよ.
(2) 全射の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 全射の否定を和訳せよ.

問題 7.11.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(3) $f(A_1 \setminus A_2) \subset f(A_1) \setminus f(A_2)$;
(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 7.12.

X, $Y \subset \mathbb{R}$ を空でない集合とし, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ を $x \in X$ に対して

$$f(x) := x^2, \quad g(x) := \sin x$$

で定義する.

(1) f が単射になるように X, Y を定めよ (理由も書くこと).
(2) g が全射になるように X, Y を定めよ (理由も書くこと).

問題 7.13 (やや難)**.**

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ とする.

(1) f が単射であることと, 「$\forall y \in Y$ に対して, $f^{-1}(\{y\})$ がたかだか一点の集合」が同値であることを示せ.
(2) f が全射であることと $f(X) = Y$ が同値であることを示せ.

数学入門A 演習問題 (2012年6月15日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 8.1.

$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ と $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sin x \quad \left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ g(x) &:= \sin x \quad (x\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

で定義する.

(1) f が単射であることを示せ.

(2) g が単射でないことを示せ.

問題 8.2.

$A\in M_3(\mathbb{R})$ に対し, $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

$$Tx=T(x):=Ax \quad (x\in\mathbb{R}^3)$$

とおく (線形写像については, 丸括弧を省略することが多い).

(1) A が正則のとき, T は全単射となることを示せ.

(2) A が正則でないとき, T は全射にも単射にもならないことを, A の具体例を挙げて示せ.

問題 8.1 の証明.

(1) $\forall x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に対して $f(x_1)=f(x_2)$ と仮定すると, $\sin x_1=\sin x_2$ だから, 積和の公式より

$$0=\sin x_1-\sin x_2=2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

となる. $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ だったから,

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{x_1-x_2}{2}<-\frac{\pi}{2}$$

がわかる. よって, $\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\neq 0$ となるから, $\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0$ となり, $\frac{x_1-x_2}{2}=0$ となる. 従って, $x_1=x_2$ が得られる.

(2) $x_1=0$, $x_2=\pi$ とおくと, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ であり, $g(x_1)=g(x_2)$ だが, $x_1\neq x_2$ となるから, g は単射ではない.

□

問題 8.2 の証明.

(1) T が単射であることを示す. $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^3$ に対して, $Tx_1=Tx_2$ ならば, $Ax_1=Ax_2$ より, とくに $A(x_1-x_2)=0$. 両辺 A^{-1} を左からかけると, $x_1-x_2=0$ となり, $x_1=x_2$ が得られる. 従って, T は単射である.

T が全射であることを示す. $\forall y\in\mathbb{R}^3$ に対して, $x=A^{-1}y$ とおくと, $Tx=A(A^{-1}y)=y$ となる. 従って, T は全射である.

(2) 例えば, A をゼロ行列とすると, $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $Te_1 = Te_2 = 0$ だが, $e_1 \neq e_2$, また, $y = e_1 \in \mathbb{R}^3$ とおくと, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ に対して, $Tx = 0 \neq y$ となるので, T は単射でも全射でもない.

$\square$

数学入門A 演習問題　(2012 年 6 月 22 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 9.1.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, $B \subset Y$ に対して, $B \subset f(f^{-1}(B))$ を示せ. (従って, 全射性は定理 2.2 の (6) の等号が成立する条件となっている)

問題 9.2.

空でない集合 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 次を示せ.

(1) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である (ヒント: f が単射であることを示したいのだから, $\forall x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定する. g に代入して, $g \circ f$ が単射であることを用いよ).

(2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である (ヒント: g が全射であることを示したいのだから, $\forall z \in Z$ に対して, $g(y) = z$ となるような $y \in Y$ をみつけてくればよい. $g \circ f$ が全射であることを使うと, 先の z について何が言えるか考えてみよ).

問題 9.1 の証明.

$\forall y \in B$ に対して, $f : X \to Y$ が全射だから, ある $\exists x \in X$ が存在して, $y = f(x)$ と書ける. $y \in B$ だったから, $x \in f^{-1}(B)$ となり, $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ となる. よって, $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ がわかる. □

問題 9.2 の証明.

(1) $\forall x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定する. このとき, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ だから, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ となる. ここで, $g \circ f$ が単射だったことから, $x_1 = x_2$ となるので, $f : X \to Y$ は単射である.

(2) $\forall z \in Z$ に対して, $g \circ f$ が全射だから, $g \circ f(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する. このとき $y := f(x)$ とおくと, $y \in Y$ であり, $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$ となる. したがって, $z = g(y)$ となる $y \in Y$ の存在が示された.

□

注意.

今回の問題は少し難しかったので, 出来なかった人もあまり落ち込まないでください. むしろ, みなさんの証明の書き方がしっかりしてきていて, よく書けているなという印象を持っています. 次の講義で, 答えを書くときのちょっとしたコツみたいなものを説明します.

注意.

「この講義に関する参考書としては, 何を調べればよいか？」という質問がありました. この講義は, 集合論という分野の基礎的な話で, 「集合」か「位相」というタイトルがついた**数学書**が該当します. 理工学部のシラバスに書いてある本は, プリントの内容よりやや高度です. お勧めは次の 2 冊です.

一樂 重雄 「集合と位相 そのまま使える答えの書き方」 講談社サイエンティフィック, 2001
飯高 茂「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」 講談社サイエンティフィック, 1999

落書き用紙に定義や定理, 証明を模写しながら, わかるわからないを自問自答してみるのが, 私が学生時代によくやった勉強方法の一つでした.

数学入門A 演習問題 (2012年6月29日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 10.1.
$X = \{1, 2, 3\}$ のときに, 2^X を具体的に求めよ (空集合と全体を忘れないように).

問題 10.2.
集合 $A = \{1, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ について, 次が成り立つかどうか答えよ.

(1) $\{1, 2\} \subset A$
(2) $\{1, 2\} \in A$
(3) $\{1\} \in A$
(4) $\{3\} \subset A$

問題 10.3.
$f : (2, \infty) \to (4, \infty)$ を $x \in (2, \infty)$ に対して,

$$f(x) := x^2$$

で定義する. f が全単射であることを示し, $f^{-1} : (4, \infty) \to (2, \infty)$ を求めよ (定義域と値域を間違えないように).

問題 10.1 の解答.

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

このとき, $\forall A \in 2^X$ に対して $A \subset X$ となっている (確かめよ). さらに, 2^X は $2^3 = 8$ 個の元を持っていることに注意しておこう. 授業でやった例 $X = \{1, 2\}$ のときは 2^X は $2^2 = 4$ 個の元を持っていた. これは不自然なことではなくて, たとえば, X が n 個の元からなる集合のときは, 2^X は 2^n の元からなる集合族になる. このことから, この記号を使う理由がなんとなくわかるだろう. □

問題 10.2 の解答.

(1) $\{1, 2\} \not\subset A \quad (\because 2 \in \{1, 2\}$ だが, $2 \notin A)$
(2) $\{1, 2\} \in A \quad (A = \{1, 3, \underline{\{1, 2\}}, \{1, 3\}\})$
(3) $\{1\} \notin A \quad (1 \in A$ だが, $\overline{\{1\}}$ は入っていない. 1 と $\{1\}$ は違うことに注意)
(4) $\{3\} \subset A \quad (A = \{1, \underline{3}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\})$

□

問題 10.3 の証明.

1. $f : (2, \infty) \to (4, \infty)$ が単射であることを示す. $\forall x_1, x_2 \in (2, \infty)$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定する. このとき, $x_1^2 = x_2^2$ だから $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ となる. $x_1, x_2 > 2$ だから, $x_1 + x_2 > 0$ より $x_1 - x_2 = 0$ が得られる. 従って, $x_1 = x_2$ となる.

2. $f : (2, \infty) \to (4, \infty)$ が全射であることを示す. $\forall y \in (4, \infty)$ に対して, $x = \sqrt{y} \in (2, \infty)$ とおく. このとき,

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

となるから, f は全射である.

3. $f^{-1} : (4,\infty) \to (2,\infty)$ を $y \in (4,\infty)$ に対して $f^{-1}(y) := \sqrt{y}$ とおけば, $\forall x \in (2,\infty)$ と $\forall y \in (4,\infty)$ に対して

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x,$$
$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

となり, 逆写像になることがわかる. □

数学入門 A 演習問題　(2012 年 7 月 6 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 11.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$$

を示せ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

問題 11.2 (余裕があれば答えよ)**.**

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c, \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

を示せ.

問題 11.1 の証明.

1. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2)$ について示す.

$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,2)$ を示す. $\forall x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $x \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right]$ が成り立つ. だから, $0 \leq x \leq 2 - \dfrac{1}{n} < 2$ より $x \in [0,2)$ である.

逆に $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset [0,2)$ を示す. $\forall x \in [0,2)$ に対して, $0 \leq x < 2$ だから, $2 - x > 0$. 従って, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $2 - x > \frac{1}{n}$ とできる (厳密には Archimedes の原理). 従って, $x < 2 - \frac{1}{n}$ となるので, $x \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right]$ となる. よって, $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である.

2. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$ について示す.

$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,1]$ を示す. $\forall x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ に対して, $\forall n \in \mathbb{N}$ について, $x \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right]$ だから, 特に $n = 1$ として, $x \in [0,1]$ となる.

逆に $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset [0,1]$ を示す. $\forall x \in [0,1]$ に対して, $\forall n \in \mathbb{N}$ について $x \leq 1 \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ だから $x \in A_n$ となる. 従って, $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ が成り立つ. $\square$

問題 11.2 の証明.

$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ のみ示す.

1. $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ を示す. $\forall x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ に対して, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の否定, すなわち, 「$\exists n \in \mathbb{N}$ が存在して, $x \in A_n$」の否定が成り立つ. 従って, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x \notin A_n$」だから, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x \in A_n^c$」となる. 従って, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ が成り立つ.

2. $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ を示す. $\forall x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ に対して, 共通部分の定義から「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x \in A_n^c$」となる. よって, 「$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x \notin A_n$」だから, (これを少し考えてみると) 「$\exists n \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in A_n$」の否定ということがわかる. 従って, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の否定が成り立つということだから, $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ がわかる. □

数学入門A 演習問題　(2012年7月13日)

期末試験に向けて, ぜひとも出来て欲しい問題を並べておく. これが全部できるようなら, 期末試験は心配することは, それほどないだろう.

以下, X, Y は空でない集合とする.

問題 12.1.

次の定義を述べよ.

(1) $X \subset Y$ の定義を述べよ.
(2) $X \cup Y$ と $X \cap Y$ の定義を述べよ.
(3) $X \times Y$ の定義を述べよ.
(4) $A \subset X$, $f : X \to Y$ に対し, $f(A)$ の定義を述べよ.
(5) $B \subset Y$, $f : X \to Y$ に対し, $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ.
(6) $f : X \to Y$ が単射であることの定義を述べよ.
(7) $f : X \to Y$ が全射であることの定義を述べよ.
(8) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を述べよ.
(9) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を述べよ.

問題 12.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := x^3$$

と定義する. f が全単射であることを示せ.

問題 12.3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := x^2$$

と定義する. f が全射でも単射でもないことを示せ.

問題 12.4.

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して,

$$f(x) := \sqrt{x}$$

と定義する. f が単射だが全射でないことを示せ,

問題 12.5.

$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次を示せ.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;
(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;
(7) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 12.6.

$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ を全単射とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
(2) $A_1 = f^{-1}(f(A_1))$;
(3) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$;
(4) $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2)$;

問題 12.7.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left(0, 1 + \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$ を示せ. ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 12.8.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0,2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0,1]$ を示せ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

問題 12.9 (少し難しい)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $C_n = \left[1 - n, \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ をを求めよ. よ).

問題 12.10.

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B), \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B)$$

を示せ.

問題 12.11.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $f\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(2) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(3) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

(4) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

数学入門A 定期試験問題

平成24年7月27日 第4時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず

以下, X, Y は空でない集合とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) $f : X \to Y$ が単射であることの定義を述べよ.

(2) $f : X \to Y$ が全射であることの定義を述べよ.

(3) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^2$$

で定義する. f は全射となるが単射にならないことを示せ.

問題 2.

$f : X \to Y$ とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする.

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ を示せ.

(2) f が単射ならば, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ を示せ.

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ を示せ.

問題 3.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 2), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1]$$

を示せ.