数学入門A 演習問題 (2013 年 4 月 19 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 1.1.
$X := \{4n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y := \{8n : n \in \mathbb{N}\}$, $Z := \{12n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくとき,

$$Y \subset X, \qquad Z \not\subset Y$$

を示せ.

問題 1.2.
集合 A, B, C が $A \subset B$ かつ $B \subset C$ をみたすならば $A \subset C$ を示せ (ヒント: $A \subset C$ を示したいのだから, 証明の最初の一文は「任意の $a \in A$ に対して」となるはずで, この a に対して, 証明のどこかで $a \in C$ となるはず).

問題 1.1 について
$Y \subset X$ を示すには「任意の $a \in Y$ に対して $a \in X$」を示せばよいが, $a \in X$ は和訳すると「a が 4 の倍数となる」だから, ある $n \in \mathbb{N}$ を用いて, $a = 8n$ と書いたときに, $a = 8n = 2 \times (4n)$ と変形してはダメ[1]. $a = 8n = 4 \times (2n)$ と変形する.
$36 = 9 \times 4$ という変形があったが, こう変形してしまうと, $36 \in Z$ かどうかがわからなくなってしまう. ■

問題 1.2 について
証明の途中でただ単に「$a \in B$ に対して」と書いてしまうと, 「その前までに書いてある a とは別の a に対して」という意味になってしまうことがある. 指示代名詞をつけて「この $a \in B$ に対して」と書くか, いっそのこと書かないことがよい. つまり**書きすぎてしまうと, 違う意味にとられてしまうことがある.** この考え方は受験問題を解くこととは考え方がまったく違う. 何を書いて, 何を書かなくてよいかを判断することはなかなか難しい. 一日二日ですぐにわかることではないので, 時間をかけて体得して欲しい. ■

問題 1.3 (問題 1.2 の類題)**.**
集合 A, B, C が $A = B$ かつ $B = C$ をみたすならば $A = C$ を示せ (ヒント: $A = B$ かつ $B = C$ から $A = C$ が導けることは自明ではない. 集合の等号の定義に基いて示す必要がある. この場合は $A \subset C$ と $C \subset A$ の両方を示せばよい. 証明の方針は問題 1.2 とだいたい同じである).

[1] これでは, 「a が 2 の倍数である」という主張になってしまう. 「4 の倍数を 2 倍したものはまた 4 の倍数になる」は証明しなければいけないことである.

数学入門A 演習問題　(2013年4月26日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 2.1.

集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対して, 次の主張を考える.

(2.1)
$\forall x \in U$ に対して $\exists \varepsilon > 0$ が存在して $\forall y \in \mathbb{R}$ に対して $|x-y| < \varepsilon \Longrightarrow y \in U$ が成り立つ.

(1) (2.1) を和訳せよ.
(2) (2.1) の否定を作れ. 回答は日本語にしなくてよい.

問題 2.2 (問題 1.2 の類題)**.**

集合 A, B, C に対して, 「$A = B$ かつ $B = C \Longrightarrow A = C$」を示せ (ヒント: $A = B$ かつ $B = C$ から $A = C$ が導けることは自明ではない. 集合の等号の定義に基いて示す必要がある.).

問題 2.1 について

$\Longrightarrow$ の否定を間違えている答案が多かった.

$$|x-y| < \varepsilon \Longrightarrow y \in U \text{ が成り立つ}$$

の否定は, 「$|x-y| < \varepsilon \Longrightarrow y \notin U$」**ではない.**

また, 日本語がおかしくなっている解答もあった. 「$\forall \varepsilon > 0$ が存在して」**という書き方はしない.** $\forall$ に続く日本語はたいていの場合は「**対して**」, $\exists$ に続く日本語はたいてい「**存在して**」である[2]. これ以外の組合せはないと思っても差し支えない. ■

問題 2.2 について

$A = C$ を示せという問題だから, 定義に基づいて示す必要がある. 示せばいいことは, $A \subset C$ と $C \subset A$ の二つである (定義 1.3 を確認せよ). この二つを示すためには

「$\forall a \in A$ に対して, $a \in C$」と「$\forall c \in C$ に対して, $c \in A$」

の両方を示す必要がある. ■

[2] たまに, 「対して」と続ける場合がある. 英語で書くと for some となる場合は $\exists$ を使うのが正しいが, 難しいので, 少なくとも今のうちは使うことはない.

数学入門 A 演習問題

この問題では, 主張が正しいかどうかは問題にはしないが, 主張が真となるか, もしくは主張の否定が真となるかを考えてみて欲しい.

問題 2.3 (単射).

次の主張を考える:「任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $x_1^2 = x_2^2$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.4 (全射).

次の主張を考える:「任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して, ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $y = x^2$ とできる.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.5 (線形写像).

A を 3 次の正方行列として, 次の主張を考える:「任意の 3 次の実数値ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ かつ $A(c\vec{x}) = cA\vec{x}$ が成り立つ」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.6 (一次独立).

$\vec{x}_1 = (2, 3, 1), \vec{x}_2 = (1, 2, 3), \vec{x}_3 = (1, 1, -1)$ として, 次の主張を考える:「任意の $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対して, $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 = \vec{0}$ ならば $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.7 (連続).

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $|x| < \delta$ ならば $|\sin x| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.8 (一様連続).

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in (0, \infty)$ に対して, $|x - y| < \delta$ ならば $|\log x - \log y| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.
(4) 問題 2.7 との違いを考えよ.

問題 2.9 (各点収束)**.**

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in (0,1)$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ ならば $|x^n| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.

問題 2.10 (一様収束)**.**

次の主張を考える:「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in (0,1)$ に対して, $n \geq N$ ならば $|x^n| < \varepsilon$ が成り立つ.」

(1) 論理記号を使って主張を述べよ.
(2) 主張の否定を論理記号を使って述べよ.
(3) 主張の否定を和訳せよ.
(4) 問題 2.9 との違いを考えよ.

数学入門A 演習問題　(2013年5月10日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 3.1.

集合 A, B に対して, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B$ を示せ.

問題 3.2.

集合 A, B に対して, $A \cap B = B \cap A$ を示せ.

数学入門A 演習問題　(2013年5月17日)

学籍番号　　　　　名前

問題 4.1.
集合 X, A, B に対して, $X \setminus (A \cap B)$ が de Morgan の法則を使ってどのように書けるか? つまり, de Morgan の法則を補集合の記号を使わずに記述してみよ.

問題 4.2.
集合 A, B に対して, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立つことを示せ.

問題 4.3.
集合 A, B, C について, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つことを示せ.

問題 4.2 について
配布プリントの証明には少しギャップがある. 例えば「$a \notin A$ または $a \notin B$」から $a \in A^c \cup B^c$ と結論付けているが, 丁寧に書くなら, 「$a \in A^c$ または $a \in B^c$」を途中に加えた方がよいだろう. ■

数学入門A 演習問題　(2013年5月24日)

問題 5.1.

$\{$ 正の偶数 $\}$, $\{$ 負の奇数 $\}$ を $\in$ を使って厳密に書いてみよ.

問題 5.2.

$\mathbb{R}$ の部分集合 A, B で $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たないような例を作れ.

問題 5.3.

集合 A, B に対して, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ を示せ.

問題 5.4.

集合 A, B に対して, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ を示せ.

問題 5.5.

集合 A, B に対して, $A \setminus B = A$ が成り立つことと $A \cap B = \emptyset$ が同値となることを示せ. つまり, $A \setminus B = A$ が成り立つならば $A \cap B = \emptyset$ が成り立つことと, 逆に $A \cap B = \emptyset$ が成り立つならば $A \setminus B = A$ が成り立つことを示せ.

問題 5.6.

A, B を集合としたとき, 次を示せ.

(1) $A \subset B$ ならば $A \cup B = B$.
(2) $A \cup B = B$ ならば $A \cap B = A$.
(3) $A \cap B = A$ ならば $A \setminus B = \emptyset$.
(4) $A \setminus B = \emptyset$ ならば $A \subset B$.

問題 5.7 (難).

A, B を集合としたとき, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定める[3]. 集合 A, B, C に対して次を示せ.

(1) $A \triangle B = B \triangle A$.
(2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
(3) $A \triangle B = \emptyset$.
(4) $A \triangle \emptyset = A$.

問題 5.8 (難).

集合 $U \subset \mathbb{R}$ が**開集合**であるとは,

$$\forall x \in U \text{ に対して } \exists \varepsilon > 0 \text{ が存在して } \forall y \in \mathbb{R} \text{ に対して } |x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in U \tag{5.2}$$

が成り立つことをいう.

(1) 開区間 (a, b) が開集合であることを示せ (ヒント: 任意の $x \in (a, b)$ に対して, $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{x - a, b - x\}$ とおいてみよ. この置き方が何を意味しているかを数直線を使って考えてみよ).
(2) U_1, U_2,...,$U_n \subset \mathbb{R}$ を開集合とする. このとき

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

も開集合であることを示せ.

---

[3] $A \triangle B$ を A と B の対称差という.

数学入門A 演習問題　(2013年5月31日)

学籍番号　　　　　名前

問題 6.1.

次の写像 f と g の定義域と値域を決めて, 写像 f, g を定義せよ.

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad g(w) = \sqrt{1-w^2}$$

問題 6.2.

写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to (-2, 2)$ をそれぞれ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対してそれぞれ

$$f(x,y) := \sin(x+y), \quad g(x,y) := \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad h(x,y) := \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

と定義する. $f = g$, $f = h$ が成立するか否かについて, 証明をつけて答えよ.

数学入門A 演習問題　(2013年6月7日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 7.1.

写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to(-2,2)$ をそれぞれ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対してそれぞれ

$$f(x,y):=\sin(x+y),\quad g(x,y):=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\quad h(x,y):=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

と定義する. $f=g$, $f=h$ が成立するか否かについて, 証明をつけて答えよ.

問題 7.2.

二つの写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x):=3x+1,\qquad g(x):=\frac{1}{x^2+1}$$

で与える. 合成写像 $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ を式で表せ.

問題 7.2 について

問題の書き方が少し悪かったのだが, 求めて欲しかったのは, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f\circ g(x)$ や $g\circ f(x)$ である. 例えば

$$g\circ f(x)=g(3x+1)=\frac{1}{(3x+1)^2+1}=\frac{1}{9x^2+6x+2}$$

であるが,

$$g\circ f=\frac{1}{(3x+1)^2+1}=\frac{1}{9x^2+6x+2}$$

ではない ($g\circ f$ と $g\circ f(x)$ は違う!!). ■

数学入門A 演習問題 (2013 年 6 月 14 日)

学籍番号 名前

問題 8.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^2$ で定める. $A_1=[-3,1]$, $A_2=[-1,2]$, $B_1=[-1,1]$, $B_2=[1,9]\subset\mathbb{R}$ とするとき, 以下が成り立つことを (集合の等号の定義にもとづいて) 確認せよ.

(1) $f(A_1)=[0,9]$.
(2) $f(A_2)=[0,4]$.
(3) $f^{-1}(B_1)=[-1,1]$.
(4) $f^{-1}(B_2)=[-3,-1]\cup[1,3]$.

解答.

$[0,9]\subset f(A_1)$ のみ示す. 他は各自考えてみよ.

任意の $y\in[0,9]$ に対して, $x=-\sqrt{y}$ とおくと, $0\le y\le 9$ より, $-3\le x\le 0$ だから $x\in A_1$ である. このとき, $f(x)=f(-\sqrt{y})=(-\sqrt{y})^2=y$ より $y=f(x)\in f(A_1)$ となる. よって, $[0,9]\subset f(A_1)$ がわかった. $\square$

示すべきことは, $f(A_1)=\{f(a):a\in A_1\}$ だから, $y=f(a)$ と書けることである. そのために, 証明の裏側で, 次のことを考える.

もし, $x\in A_1$ がとれて, $y=f(x)$ とできたらどうなるか?

すると, $y=x^2$ だから, $x=\sqrt{y}$ か $x=-\sqrt{y}$ であるが, $A_1=[-3,1]$ だったから, $x=\sqrt{y}$ とすると, $x\in A_1$ が成り立たない可能性がある (たとえば, $y=4$ としてみよ). 一方, $x=-\sqrt{y}$ とすれば, $-3\le x\le 0$ だから, $x\in A_1$ となることは示せるであろう. ここまで考えた上で, 上の解答を書く. 気分としては**たしかめ算をみせる感じ**になるといったらよいであろうか.

ちなみに, ε-δ 論法であっても考え方はほぼ同様といって差し支えない. ε を任意に決めておいたあとに, **とりあえず $\delta>0$ がとれたとしたら, どうなっているか?**を考えて, $\delta>0$ がみたすべき条件を書き出してみる. そのあとに, その条件であれば, 実際に $\delta>0$ の後の主張が成り立つかどうかを証明として書けばよいのである.

数学入門A 演習問題 (2013 年 6 月 21 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 9.1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^3$$

で定義する．f は全射になるか？単射になるか？それぞれ証明をつけて答えよ．ただし，$x\in\mathbb{R}$ に対して，$\sqrt[3]{x}$ が定義できることは認めてよい．

問題 9.2.

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を任意の $x\in[0,\infty)$ に対して

$$f(x) := x^3-2x^2+x$$

で定義する．f は全射になるか？単射になるか？それぞれ証明をつけて答えよ．

問題 9.1 について

単射について，$x_1^2+x_2^2>x_1x_2$ は「$x_1=0$ かつ $x_2=0$」のときは成立しません (等号が成立します)．しかし，「$x_1\neq 0$ または $x_2\neq 0$」のときは成立しています．なぜなら，相加相乗の不等式を用いると

$$x_1x_2\le |x_1||x_2|\le \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\le x_1^2+x_2^2$$

がわかるからです．ここまで書かないと，$x_1^2+x_2^2\ge x_1x_2$ は説明できないでしょう．

単射の証明の途中で $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0$ となりますが，$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=0$ が成り立つときは，$0=x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2$ だから，$x_1+\dfrac{x_2}{2}=0$ かつ $x_2=0$ が得られます．よって，$x_1=x_2=0$ がわかります．$x_1\neq 0$ かつ $x_2\neq 0$ のときは，割り算することで，$x_1=x_2$ が示せます． ■

問題 9.2 について

全射にも単射にもならないことを示すには

$$f(x)=x(x-1)^2$$

と因数分解できることを使います．$f(0)=f(1)=0$ がすぐにわかりますし，$x\ge 0$ の範囲では $x\ge 0$ かつ $(x-1)^2\ge 0$ だから $f(x)\ge 0$ もわかります． ■

問題 9.1, 9.2 について，それぞれグラフを書いてみて，全射や単射の感覚を身につけるとよいでしょう．

数学入門 A 演習問題　(2013 年 6 月 28 日)

以下, X, Y は空でない集合とする.

問題 10.1.

$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次を示せ.

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(3) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 10.2.

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を単射とする. このとき, $A_1, A_2 \subset X$ に対して, 次を示せ.

(1) $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$;
(2) $f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$.

問題 10.3.

写像 $f : X \to Y$ について, 次を示せ.

(1) f が全射ならば, $f(X) = Y$ が成り立つ.
(2) $f(X) = Y$ ならば f は全射である.

問題 10.4.

X, Y を集合, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, $B \subset Y$ に対して, $B \subset f(f^{-1}(B))$ を示せ.

問題 10.5.

集合 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 次を示せ.

(1) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である.
(2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である.

問題 10.6.

$a < b$ に対して, 閉区間 $[0, 1]$ から閉区間 $[a, b]$ への全単射, および開区間 $(0, 1)$ から開区間 (a, b) への全単射を与える関数を構成せよ (ヒント:一次関数を考えよ).

問題 10.7.

A を $\mathbb{R}$ 値 n 次正則行列とし, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) := Ax$$

により定義する.

(1) f が全単射であることを示せ.
(2) f^{-1} を求めよ.

数学入門A 演習問題　(2013年7月5日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 11.1.

$X = \{a, b, c\}$ のときに, 2^X を具体的に求めよ (空集合と全体を忘れないように).

問題 11.2.

集合 $A = \{1, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ について, 次が成り立つか否か答えよ (答えのみでよい).

(1) $\{1, 3\} \subset A$.

(2) $\{1, 3\} \in A$.

(3) $\{1\} \in A$.

(4) $1 \in A$.

問題 11.2 について

$\subset$ と $\in$ の違いに注意せよ. 1 は A の元であるが, $\{1\}$ は A の元ではない. ■

数学入門 A 演習問題　(2013 年 7 月 12 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 12.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,2), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$$

を示せ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

問題 12.1 について

証明のそれぞれの式には, その式が必要となる意味がある. そのことをきちんと考えて欲しい. また, 何を示さなければいけないかを考えていないと思われる答案も多かった. 何を示せばよいかということと, 書いてあることにどういう意味があるかを考えて勉強をして欲しい.

数学入門 A 演習問題 (全射と単射)

いままでよく知っている関数が全射か？単射か？を (証明できるかはともかく) すぐに判断できるようになると, 今後の数学で非常に役に立つ. そこで, よく知っている関数, 写像を中心に, 全射か単射かどうかを判断して, 感覚を身につけて欲しい.

問題 13.1.

次の写像が単射になるか, 全射になるか, 証明をつけて答えよ.

(1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n) := -n$.
(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(n) := 2n$.
(3) $f : \mathbb{N} \to \{2n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(n) = 2n - 2$.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^2$.
(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sqrt{|x|}$.
(6) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$.
(7) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して $f(A) := \det A$.
ただし, $M_2(\mathbb{R})$ は実数係数 2 次行列全体のなす集合とする.
(8) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して $f(A) := \operatorname{tr} A$.

問題 13.2.

次の写像が単射になるか, 全射になるか答えよ. ただし, 証明はつけなくてもよい.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3$.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^3 + x$.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^5 + 3x$.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := e^x$.
(5) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := \log x$.
(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \sin x$.
(7) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \cos x$.
(8) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して $f(x) := \tan x$.

問題 13.3.

問題 13.1, 13.2 で全単射にならない写像について, 定義域と値域を適当にとりかえて全単射になるようにせよ.

問題 13.4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加[4]な連続関数で, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ をみたすとする. このとき, f が全単射となることをグラフを書いて直感的に説明せよ. なお, 厳密な証明をするには中間値の定理を用いればよい.

[4] $x < y$ ならば $f(x) < f(y)$ が成り立つ. 不等式で等号がつく場合は広義単調増加という.

数学入門A 定期試験対策演習問題

定期試験に向けて, ぜひとも出来て欲しい問題を並べておく. 定期試験の問題は, その殆どがここで掲載した問題の類題である.

以下, X, Y は空でない集合とする.

問題 14.1.

次の定義を述べよ.

(1) $X \subset Y$ の定義を述べよ.
(2) $X \cup Y$ と $X \cap Y$ の定義を述べよ.
(3) $X \times Y$ の定義を述べよ.
(4) $A \subset X$, $f : X \to Y$ に対し, $f(A)$ の定義を述べよ.
(5) $B \subset Y$, $f : X \to Y$ に対し, $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ.
(6) $f : X \to Y$ が単射であることの定義を述べよ.
(7) $f : X \to Y$ が全射であることの定義を述べよ.
(8) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を述べよ.
(9) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を述べよ.

問題 14.2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := x^3$$

と定義する. f が全単射であることを示せ.

問題 14.3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) := x^2$$

と定義する. f が全射でも単射でもないことを示せ.

問題 14.4.

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0, \infty)$ に対して,

$$f(x) := \sqrt{x}$$

と定義する. f が単射だが全射でないことを示せ,

問題 14.5.

$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次を示せ.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;
(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;
(7) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 14.6.

$f : X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ を全単射とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
(2) $A_1 = f^{-1}(f(A_1))$;
(3) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$;
(4) $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2)$;

問題 14.7.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left(0, 1 + \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$ を示せ. ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 14.8.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0, 2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0, 1]$ を示せ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

問題 14.9 (少し難しい)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $C_n = \left[1 - n, \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ をを求めよ. よ).

問題 14.10.

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B), \qquad \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup B)$$

を示せ.

問題 14.11.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $f\left(\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(A_n)$;

(2) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \subset \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(A_n)$;

(3) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

(4) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;