数学入門A 定期試験問題

2013 年 8 月 2 日 第 4 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

全問について答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみでよい.

(1) 集合 $A := \{1, 2, \{3, 4\}\}$, $B = \{3, 4\}$ について, 下記の問いに答えよ.
　(a) $A \cup B$ を求めよ.
　(b) $A \setminus B$ の元の個数を答えよ.
　(c) $A \times B$ の元をすべて答えよ.

(2) 空でない集合 X, Y に対して, 写像 $f : X \to Y$ を考える. 次の問いに答えよ.
　(a) f が単射であることの定義を答えよ.
　(b) f が全射であることの定義を答えよ.
　(c) $a \in Y$ に対して, $f^{-1}(\{a\})$ の定義を答えよ.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := e^x$$

で定める. 次の問いに答えよ.
　(a) f は全射かどうか答えよ.
　(b) f は単射かどうか答えよ.

問題 1 の解答とコメント.

(1) (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \{3, 4\}\}$
　(b) 3
　(c) $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (\{3, 4\}, 3), (\{3, 4\}, 4)$

　(c) の間違いが多かった. 括弧は $(\cdots)$ と $\{\cdots\}$ で意味が異なることにも注意せよ.

(2) (a) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $x_1 = x_2$ ならば $f(x_1) = f(x_2)$
　(b) 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$
　(c) $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in X : f(x) \in \{a\}\}$. ただし, この問題については, $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in X : f(x) = a\}$ でも正解とする.

　(c) の出来がよくなかった. $B \subset Y$ に対する $f^{-1}(B)$ の定義は答えられたとしても, $B = \{a\}$ のときの定義がどうなるか？はきちんと答えられるようにしなければいけない.

(3) (a) 全射でない.

(b) 単射である.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, e^x は正の値しかとらないから全射にはならない. $\log$ を考えれば, 単射であることはすぐわかる. もしくは e^x が x について狭義単調増加であることを使ってもよい.

$\square$

問題 2.

空でない集合 X, Y に対して, 写像 $f : X \to Y$ を考える. 次の事柄を証明せよ.

(1) $B_1, B_2 \subset Y$ に対して $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(2) $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(3) (2) で f が単射ならば $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.

問題 2 のコメント.

(1) と (2) は比較的よくできていた. (3) について, f が単射でないと証明はできないので, どこかで単射の条件を使うはずである. 単射がないとどこで証明がうまくいかなくなるか？まで考えることが望ましい.

なお, 逆写像と逆像は同じ f^{-1} を使うが意味が異なる. この問題では全単射は仮定していないので, 逆写像を使った証明は無条件で 0 点とした. つまり, この証明の途中で, $x \in X$ や $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ とか $f^{-1}(f(x))$ などが出てきたら, 像と逆像を理解していないということである. また, 集合と元の関係を理解していないと思われる解答 (例えば「$f(A_1) = f(A_2)$ ならば $A_1 = A_2$」とか), 定義域と値域を混同している解答もあった. 例えば, 間違いではないが $y \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ と書いてある答案はたいていの場合, 証明に間違いがある. $\square$

問題 3.

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^2 + 2x + 1$$

で定義する. 次を示せ.

(1) f は単射ではない.
(2) f は全射である.

問題 3 のコメント.

f が単射でないことについても f が全射であることについても, たとえば $f(0) = f(-2)$ とするだけではなくて, $f(0) = 1$, $f(-2) = (-2+1)^2 = 1$ と計算をみせて欲しかった. だいたいの人は何をすればよいかわかっているようであったが, 計算結果だけを書くのではなく, どうしてその結果になるのかを少し見せた方がよい. $\square$

問題 4.

次のどちらかの問いに答えよ. 但し, 両方に答えた場合, 得点がよい方で評価する.

(1) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)=(0,1]$ を示せ.

(2) X,Y を空でない集合, $f:X\to Y$ を写像, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset 2^Y$ を Y 上の集合族とする. このとき

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(B_n)$$

を示せ.

問題 4 のコメント.

(1) については, 完答者はいなかった. 関係のないところで「Archimedes の原理より」と書いてある答案がとても多かった. この問題では「存在」ではなくて「任意」を扱うので, Archimedes の原理はほとんど役にたたない. 証明は次のようにして行う.

任意の $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$ に対して, すべての $n\in\mathbb{N}$ について $x\in\left(0,1+\dfrac{1}{n}\right)$ となるから, $0<x<1+\dfrac{1}{n}$ が成り立つ. $n\to\infty$ とすると $0<x\le 1$ となる[1]から $x\in(0,1]$ が成り立つ.

逆に, 任意の $x\in(0,1]$ に対して, すべての $n\in\mathbb{N}$ について, $0<x\le 1<1+\dfrac{1}{n}$ より $x\in\left(0,1+\dfrac{1}{n}\right)$ となるから $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$ が成り立つ.

(2) は, 問題 2 の (1) ができれば, それほど難しくない問題である. 実際, この問題に手をつけていた解答はたいてい正解していた. $\square$

[1]極限をとると, $<$ が $\le$ にかわってしまうことに注意せよ.