

数学入門 A 定期試験問題

2013年8月2日 第4時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること。

全問について答えよ。

問題 1.

次の各問いに答えよ。ただし, 答えのみでよい。

- (1) 集合 $A := \{1, 2, \{3, 4\}\}$, $B = \{3, 4\}$ について, 下記の問いに答えよ。
 - (a) $A \cup B$ を求めよ。
 - (b) $A \setminus B$ の元の個数を答えよ。
 - (c) $A \times B$ の元をすべて答えよ。
- (2) 空でない集合 X, Y に対して, 写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。次の問いに答えよ。
 - (a) f が単射であることの定義を答えよ。
 - (b) f が全射であることの定義を答えよ。
 - (c) $a \in Y$ に対して, $f^{-1}(\{a\})$ の定義を答えよ。
- (3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := e^x$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (a) f は全射かどうか答えよ。
- (b) f は単射かどうか答えよ。

問題 2.

空でない集合 X, Y に対して, 写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。次の事柄を証明せよ。

- (1) $B_1, B_2 \subset Y$ に対して $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ 。
- (2) $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。
- (3) (2) で f が単射ならば $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ 。

問題 3.

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^2 + 2x + 1$$

で定義する。次を示せ。

- (1) f は単射ではない。
- (2) f は全射である。

問題 4.

次のどちらかの問いに答えよ. 但し, 両方に答えた場合, 得点がよい方で評価する.

(1) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1]$ を示せ.

(2) X, Y を空でない集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とする. このとき

$$f^{-1} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.