

Appendix A. 数学に必要な論理学

数学に必要となるであろう論理学を概観する. より詳しいことについては, 講義ノート
の第4章や

● 中内伸光, 「数学の基礎体力をつけるためのろんりの練習帳」, 共立出版, 2002.
を参考にして欲しい.

A.1. 任意と存在. \forall は「任意の」を表す. これは, for all や for any の A をひっくりかえしたものである. 日本語では「 $\forall \bigcirc \bigcirc$ に対して」の書き方をすることが多い.

例 A.1.

「任意の」の具体例を述べる.

- (1) 「 $\forall x > 0$ に対して $(x - 1)^2 \geq 0$ 」は真.
- (2) 「 $\forall x > 0$ に対して $(x - 1)^2 > 0$ 」は偽. なぜなら, $x = 1$ は $x > 0$ だが $(x - 1)^2 > 0$ をみたさない.

このとき, より簡潔に次のように書くことがある.

- (1) $\forall x > 0 \quad (x - 1)^2 \geq 0$
- (2) $\forall x > 0 \quad (x - 1)^2 > 0$

注意 A.1.

「任意の」は, 省略されてしまうことが多々ある. 実際に高校での演習問題では, たい
ていの場合には「任意の」を加えた方が正確な表現になる¹.

\exists は「存在する」を表す. これは, There exists の E をひっくりかえしたものである. 「 \exists
 $\bigcirc \bigcirc$ s.t.」の書き方をすることが多い. ここで, 「s.t.」は such that の略であり, so that
の格式ばった言い方である. この講義では「 $\exists \bigcirc \bigcirc$ が存在して」と書くことにする²

例 A.2.

「存在する」の具体例を述べる.

- (1) 「 $\exists x \in \mathbb{R}$ が存在して $(x - 1)^2 = 0$ 」は真. これをより簡潔に, 「 $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x - 1)^2 = 0$ 」
と書くこともある.
- (2) 「 $\exists x \in \mathbb{R}$ が存在して $(x - 1)^2 + 1 = 0$ 」は偽 ($(x - 1)^2$ は負にならないから). これを,
「 $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x - 1)^2 + 1 = 0$ 」と書くこともある.

注意 A.2.

「 $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $(x - 1)^2 = 0$ 」を英語で書くと

$$\text{There exists } x \in \mathbb{R} \text{ such that } (x - 1)^2 = 0$$

となり, 記号とつじつまがある.

¹高校の教科書で勉強しないのは, 「余計なことを書きすぎて意味がかえってわからなくなることを防ぐ」
ためであろう.

²実はこの表現は正しくない(「頭痛が痛い」と同じような表現になっている). 英語と日本語で, 述語を
書く順番が異なるために \exists を日本語の文章と正確な表現であわせることはできない. しかし, \exists を書いて,
「存在する」を強調することはとても重要なので, しばらくは, \exists を使うことによる「日本語の表現が正しく
ないこと」については目をつむることにする.

A.2. 「かつ」と「または」. 「かつ」と「または」も数学を学ぶ上で重要な表現の一つである.

例 A.3.

「かつ」と「または」の含まれる具体例を見てみよう.

- (1) 「 $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x+1)^2 \geq 0$ かつ $(x-1)^2 \geq 0$ 」は真. これを和訳すると, 「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x+1)^2 \geq 0$ かつ $(x-1)^2 \geq 0$ 」となる.
- (2) 「 $\exists x, \exists y > 0$ が存在して $\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy$ かつ $x \neq y$ 」は偽³. これを和訳すると, 「ある $x, y > 0$ が存在して $\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy$ かつ $x \neq y$ 」となる.
- (3) 「 $\exists x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 = 0$ または $(x-1)^2 = 0$ 」は真. これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 = 0$ または $(x-1)^2 = 0$ 」となる.
- (4) 「 $\exists x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 < 0$ または $(x-1)^2 < 0$ 」は偽. これを和訳すると, 「ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x+1)^2 < 0$ または $(x-1)^2 < 0$ 」となる.

A.3. **ならば**. 「 $p \implies q$ 」は「 p ならば q が成り立つ」をあらわす. つまり「 p を仮定すると, q が成り立つ」という意味である. ここで, p を仮定しない場合にどうなるかについては, 何も述べていない. 例えば,

$$x > 0 \text{ ならば } 2(x+1)^2 - 1 > 0$$

という主張で $x \leq 0$ のことは何も主張していない ($x \leq 0$ のときは, ある意味, どうでもいい). よって, 「 $p \implies q$ 」は「 p が不成立または q が成立」と書くこともできる⁴.

例 A.4.

\implies を用いた具体例を考えてみる.

- (1) 「 $x > 0 \implies 2(x+1)^2 - 1 > 0$ 」は真となる.
- (2) 「 $x > 0 \implies 2(x+1)^2 - 10 > 0$ 」は偽となる. なぜなら $x = 1$ とおくと $x > 0$ だが

$$2(x+1)^2 - 10 = 2(1+1)^2 - 10 = 8 - 10 = -2 < 0$$

となるからである. こういうことを反例ということがある.

A.4. **否定**. 「 p の否定」とは「 p が成り立たない」である.

否定の作り方は次のようにすればよい.

$$\begin{aligned} \forall &\longleftrightarrow \exists \\ &\text{否定} \\ p \text{ かつ } q &\longleftrightarrow p \text{ が不成立 または } q \text{ が不成立} \\ &\text{否定} \\ p \implies q &\longleftrightarrow p \text{ が成立 かつ } q \text{ が不成立} \\ &\text{否定} \end{aligned}$$

これ以外については, 主張の否定を書けばよい. どうしてこうなるかについては, 第4章でもう一度考え直すが, とりあえずは覚えてしまった方がよいと思う. もしくは, 「すべ

³このように, \exists を二つ並べて, 書くことがある.

⁴この感覚は少し難しいと思う. 別の考え方をすると, 「 $p \implies q$ 」が成り立たないときは, 「 p が成り立つが, q は成り立たない」だから, 「 p かつ q でない」となる. これが成り立たない場合が「 $p \implies q$ 」だったから, 「 p でない, または q 」となる.

ての」や「存在」, 「ならば」を用いた卑近な例文を作ってみて, その否定がどうなるかを考えてみるのもよい.

例 A.5.

具体例をあげて, 否定を説明しよう.

- 集合 A, B に対して

$$A \subset B \stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall a \in A \text{ に対して } a \in B$$

であった. $A \subset B$ の否定, すなわち $A \not\subset B$ は, $\forall \xrightarrow{\text{否定}} \exists, a \in B \xrightarrow{\text{否定}} a \notin B$ とすればよいので,

$$A \not\subset B \iff \exists a \in A \text{ が存在して } a \notin B$$

となる. つまり, 「ある $a \in A$ が存在して $a \notin B$ 」となる.

講義ノート of 例 1.4 で $A \not\subset B$ を示すときに, $a = 27 \in A$ だが $a = 27 \notin B$ を示したが, このときに最初の $a = 27$ が「ある $a \in A$ が存在して」に対応し, $a \notin B$ が後半部分に対応している.

- (数列の収束) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束することの定義は

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists N \in \mathbb{N} \text{ が存在して } \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

である. これを和訳してみると

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ 」

となる. これを否定すると,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ が存在して } \forall N \in \mathbb{N} \text{ に対して } \exists n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } n \geq N \text{ かつ } |a_n - a| \geq \varepsilon$$

となる. これを和訳してみると

「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ かつ $|a_n - a| \geq \varepsilon$ 」

となる.

- 講義ノートの例 1.4 で $A \not\subset C$ の証明を論理記号を使って書いてみる.

講義ノート 例 1.4 の $A \subset C$ の証明.

$\forall a \in A$ に対して, $\exists n \in \mathbb{Z}$ が存在して, $a = 9n$ とできる. よって $a = 3(3n)$ とできて, $3n \in \mathbb{Z}$ だから $a \in C$ となる. 従って, $A \subset C$ が成り立つ. \square