

数学入門 A 演習問題 (2013年4月22日)

問題 1.1 (提出問題).

$X := \{4n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y := \{8n : n \in \mathbb{N}\}$, $Z := \{12n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくととき,

$$Y \subset X, \quad Z \not\subset Y$$

を示せ.

問題 1.1 の $Y \subset X$ の証明.

$\forall y \in Y$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ がとれて, $y = 8n$ と書ける. $8n = 4 \times (2n)$ であり, $2n \in \mathbb{N}$ だから $y = 8n = 4 \times (2n) \in X$ が成り立つ. \square

注意.

示すことは, $\forall y \in Y$ に対して, y が 4 の倍数であることだから, $m \in \mathbb{N}$ をもちいて $y = 4m$ の形で書かないといけない. $2 \times (4n)$ では, 2 の倍数ということになってしまう.

問題 1.2.

$X := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y := \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$, $Z := \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくととき,

$$Z \subset X, \quad Z \not\subset Y$$

を示せ.

注意 (問題 1.2 について).

$4 = (2^2)^n = 2^{2n}$ が成り立つことを使う. 示さないといけないことは何か? をはつきりさせること.

高校の数学としての間違いとして, 指数法則の間違いがかなり多かった. $4^n = 2 \times 2^n$ ではない.

問題 1.3.

集合の記号を用いて, 3 の整数巾乗全体からなる集合を記述せよ.

問題 1.4.

集合の記号を用いて, すべての素数 p の正巾乗全体からなる集合を記述せよ.

問題 1.5.

集合の記号を用いて, ある n 次方程式 $P(x) = 0$ の複素数解からなる集合を記述せよ.

問題 1.6.

集合 A, B, C が $A \subset B$ かつ $B \subset C$ をみたすならば $A \subset C$ を示せ (ヒント: $A \subset C$ を示したいのだから, 証明の最初の一文は「任意の $a \in A$ に対して」となるはずで, この a に対して, 証明のどこかで $a \in C$ となるはず).

問題 1.7 (問題 1.6 の類題).

集合 A, B, C が $A = B$ かつ $B = C$ をみたすならば $A = C$ を示せ (ヒント: $A = B$ かつ $B = C$ から $A = C$ が導けることは自明ではない. 集合の等号の定義に基いて示す必要がある. この場合は $A \subset C$ と $C \subset A$ の両方を示せばよい. 証明の方針は問題 1.6 とだいたい同じである).

数学入門 A 演習問題 (2014 年 4 月 29 日)

問題 2.1 (提出問題).

\mathbb{R} の部分集合 A, B で $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たないような例を作れ.

注意.

下記の例では $A = B$ となってしまう, 問題文にあるような「 $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たない」をみたさない.

$$\begin{aligned} A &:= \{2n : n \in \mathbb{R}\}, & B &:= \{3n : n \in \mathbb{R}\} \\ A &:= \{2n : n \in \mathbb{R}\}, & B &:= \{2n - 1 : n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

何が問題かという点, \mathbb{N} ではなくて, \mathbb{R} としているところである. \mathbb{R} としてしまうと, $n = \frac{3}{2}$ なども実数だから, 集合 A は偶数全体のなす集合というわけではなくなってしまう. 実際上記の例では $A = B = \mathbb{R}$ となる (証明してみよ).

なお上記の例で \mathbb{R} を \mathbb{Q} にしてもあいかわらず正しくない. \mathbb{R} を \mathbb{N} か \mathbb{Z} にかえると (つまり, 割り算が常にできるとは限らないように設定すると), 問題文にあるような「 $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たない」具体例となる.

問題 2.2.

背理法を用いて, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ を示せ.

問題 2.3.

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $x^2 + ax + b = 0$ の解の公式を導出せよ.

問題 2.4.

$x > 0, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(2.1) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

となることを, n に関する数学的帰納法を用いて示せ. 二項定理を用いずに考えよ.

問題 2.5.

$a, b > 0$ に対して, 相加相乗の不等式

$$(2.2) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

を証明せよ.

注意.

不等式を証明することと, 不等式を解くことは別の問題であることに注意すること. 例えば, 相加相乗の不等式を示すのに, (2.2) を式変形しても, 正しい証明が得られるとは限らない. なぜなら, (2.2) が成り立つかどうかはわからないのだから, (2.2) から得られた式もまた正しい結果かどうかはわからないからである. (2.1) を示すときも, (2.1) を変形して示すのではなく, (2.1) の左辺を変形して右辺を導くのがよい.

数学入門 A 演習問題 (2014年5月7日)

問題 3.1 (提出問題).

集合 A, B に対して, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B$ を示せ.

問題 3.2.

集合 $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, \{3, 4\}\}$ について, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$ を求めよ.

問題 3.3.

集合 A, B に対して, $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$ を示せ.

問題 3.4.

集合 A, B に対して, $A \cap B = B \cap A$ を示せ.

問題 3.5.

集合 A, B に対して, $A \cup B = B \cup A$ を示せ.

数学入門 A 演習問題 (2014年5月13日)

問題 4.1 (提出問題).

集合 A, B, C に対して, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ を示せ.

問題 4.2.

集合 A, B, C に対して, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ を示せ.

問題 4.3.

集合 A, B, C について, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ が成り立つことをベン図を用いて説明せよ.

問題 4.4.

集合 A, B に対して, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立つことを示せ.

問題 4.5.

集合 A, B に対して, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ が成り立つことを示せ.

数学入門 A 演習問題 (2014年5月20日)

問題 5.1 (提出問題).

集合 A, B, C について, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つことを示せ.

問題 5.2.

$A := \{1, 2, \{3, 4\}\}$, $B := \{2, 3, 4\}$ とする. このとき, $A \times B$ を求めよ. 元の個数はいくつか?

問題 5.3.

de Morgan の法則を差集合を用いて記述せよ. 例えば, 集合 X , $A \subset X$, $B \subset X$ について, $(A \cap B)^c = X \setminus (A \cap B)$ がどう書けるか?

問題 5.4.

集合に関する de Morgan の法則をベン図を用いて説明せよ.

問題 5.5.

講義ノート定理 1.6, すなわち集合 A, B, C に対して $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つことを, 図を用いて説明せよ.

数学入門 A 演習問題 (2014年6月3日)

問題 6.1 (提出問題).

写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow (-2, 2)$ をそれぞれ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対してそれぞれ

$f(x, y) := \sin(x+y)$, $g(x, y) := \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $h(x, y) := \sin x \cos y + \cos x \sin y$ と定義する. $f = g$, $f = h$ が成立するか否かについて, 証明をつけて答えよ.

問題 6.2.

下記は, 高校までの数学でよく見られる関数の書きかたである. 写像 f と g の定義域と値域を定めて, 写像を定義せよ.

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad g(w) = \sqrt{1-w^2}$$

問題 6.3.

写像 $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_2(x) := x^2, \quad g_1(x) := x^2, \quad g_2(x) := x^2$$

により定める. これらの写像, f_2 , g_1 , g_2 を注意 2.3 の書き方を使って書いてみよ.

数学入門 A 演習問題 (2014 年 6 月 10 日)

問題 7.1 (提出問題).

二つの写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := 3x + 1, \quad g(x) := \frac{1}{x^2 + 1}$$

で与える. $x \in \mathbb{R}$ に対して, 合成写像 $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$ を求めよ.

問題 7.2.

写像 f, g の値がそれぞれ

$$f(x) := x + \frac{1}{x}, \quad g(y) := \log(1 + y)$$

となるとする.

- (1) f と g の定義域と値域を定めて写像を定義せよ.
- (2) $f \circ g$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.
- (3) $g \circ f$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.

問題 7.3.

$A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ を

$$A_1 := [-3, 1], \quad A_2 := [-1, 2], \quad B_1 := [-1, 1], \quad B_2 := [1, 9]$$

で定める. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^3$$

で定義する. このときに, $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ を求めよ.

問題 7.4.

問題 7.3 と同じ記号を用いる. $f(A_1 \cap A_2)$, $f(A_1) \cap f(A_2)$, $f^{-1}(f(A_1))$, $f(f^{-1}(B_1))$, $f(A_1) \setminus f(A_2)$, $f(A_1 \setminus A_2)$ をそれぞれ求めよ.

数学入門 A 演習問題 (2014年6月17日)

問題 8.1 (提出問題).

X, Y を空でない集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次を示せ.

- (1) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
- (2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

問題 8.2.

問題 8.1 と同じ記号を用いる. 次を示せ.

- (1) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
- (2) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 8.3.

問題 8.1 と同じ記号を用いる. 次を示せ.

- (1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
- (2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
- (3) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;
- (4) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;

数学入門 A 演習問題 (2014 年 6 月 24 日)

問題 9.1 (提出問題).

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を $x \in \mathbb{R}$ に対してそれぞれ

$$f(x) := x^2, \quad g(x) := x^2$$

で定義する.

- (1) f は単射ではないことと, 制限写像 $f|_{(0, \infty)}$ が単射になることを示せ.
- (2) f は全射ではないことと, g は全射になることを示せ.

問題 9.2.

X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を単射とする. このとき, $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2), f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$ を示せ.

問題 9.3.

集合 X, Y , 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次を示せ.

- (1) f が全射ならば, $f(X) = Y$ が成り立つ.
- (2) $f(X) = Y$ ならば f は全射である.

問題 9.4.

X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を全射とする. このとき, $B \subset Y$ に対して, $B \subset f(f^{-1}(B))$ を示せ.

問題 9.5.

集合 X, Y, Z と写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して, 次を示せ.

- (1) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である.
- (2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である.

数学入門 A 演習問題 (2014年7月1日)

問題 10.1 (提出問題).

命題 p, q に対して, 真理表を書くことで,

$$\lceil p \Leftrightarrow q \rceil \Leftrightarrow \lceil (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rceil$$

を示せ.

問題 10.2 (提出問題).

命題 p, q に対して,

$$\lceil p \rightarrow q \rceil \Leftrightarrow \lceil \neg p \rightarrow \neg q \rceil$$

が成り立つことを真理表を書くことにより示せ.

問題 10.3.

命題 p, q, r に対して, 真理表を書いて, 次を示せ.

- (1) (結合法則) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
- (2) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- (3) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (4) (分配法則) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (5) (de Morgan の法則) $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

問題 10.4.

命題 p, q, r に対して, 次を示せ.

- (1) $((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- (2) $((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
- (3) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- (4) $(p \rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

数学入門 A 演習問題 (2014年7月8日)

問題 11.1 (提出問題).

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次の問に答えよ.

- (1) f が $[0, 1]$ 上で連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.
- (2) f が $[0, 1]$ 上一様連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ. 連続と一様連続の違いに注意せよ.

問題 11.2.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形独立であるとは, どんな $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対しても, $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = 0$ ならば, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となることをいう. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形独立であることの定義とその否定 (線形従属という) を, 論理記号を用いて表せ.

問題 11.3.

$r > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $B_r(x_0) := (x_0 - r, x_0 + r)$ とおく. $U \subset \mathbb{R}$ が開集合であるとは任意の $x \in U$ に対して, ある正の実数 r が存在して, $B_r(x) \subset U$ が成り立つことをいう.

- (1) 論理記号を用いて, 開集合の定義を述べよ.
- (2) $U \subset \mathbb{R}$ が開集合でないことを論理記号を用いて述べよ.