

数学入門 A 第二回小テスト

2015年7月7日 第5時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。

全問について答えよ。「答えのみでよい」と書かれていない問題については、証明をつけること。

問題 1.

次の各問いに答えよ。なお、答えのみでよい。以下、 X, Y を集合、 $A \subset X, B \subset Y$ を部分集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。

- (1) $f: X \rightarrow Y$ が単射であることの定義を述べよ。
- (2) $f: X \rightarrow Y$ が全射であることの定義を述べよ。
- (3) f による A の像 $f(A)$ の定義を述べよ。
- (4) f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ。
- (5) 次の関数は「全単射」、「単射だが全射でない」、「全射だが単射でない」、「単射でも全射でもない」のどれになるか。
 - (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := e^x$.
 - (b) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して $f(x) := \tan x$.
- (6) 开区間 $(-1, 1)$ から $(-2, 2)$ への全単射な写像の例を一つ与えよ。
- (7) \mathbb{N} から 正の奇数からなる集合への全単射な写像の例を一つ与えよ。
- (8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := x^2$ で定義する。
 - (a) $f([-2, 3])$ を求めよ (答えのみでよい)。
 - (b) $f^{-1}((-1, 4))$ を求めよ (答えのみでよい)。

問題 2.

$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := x^2$ で定義する。

- (1) f が単射であることの証明を与えよ。
- (2) f が全射であることの証明を与えよ。

問題 3.

集合 X, Y , 部分集合 $A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$, 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、次を証明せよ。

- (1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- (3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

学生番号

名前

点数

数学入門 A 第二回小テスト

2015年7月9日 第5時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。
全問について答えよ。「答えのみでよい」と書かれていない問題については、証明をつけること。

問題 1.

次の各問いに答えよ。なお、答えのみでよい。以下、 X, Y を集合、 $A \subset X, B \subset Y$ を部分集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。

- (1) $f: X \rightarrow Y$ が全射であることの定義を述べよ。
- (2) $f: X \rightarrow Y$ が単射であることの定義を述べよ。
- (3) f による A の像 $f(A)$ の定義を述べよ。
- (4) f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ。
- (5) 次の関数は「全単射」、「単射だが全射でない」、「全射だが単射でない」、「単射でも全射でもない」のどれになるか。
 - (a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := \log x$.
 - (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \cos x$.
- (6) 閉区間 $[-1, 1]$ から $[0, 4]$ への全単射な写像の例を一つ与えよ。
- (7) \mathbb{N} から 正の偶数からなる集合への全単射な写像の例を一つ与えよ。

問題 2.

$f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ を $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) := x^2 + 1$ で定義する。

- (1) $f((-3, 2))$ を求めよ (答えのみでよい)。
- (2) $f^{-1}([0, 10])$ を求めよ (答えのみでよい)。
- (3) f が単射であることの証明を与えよ。
- (4) f が全射であることの証明を与えよ。

問題 3.

集合 X, Y , 部分集合 $A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$, 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、次を証明せよ。

- (1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- (3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

学生番号

名前

点数
