

# 数学入門 A 定期試験問題

2015年7月30日 第4時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。  
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること。

全問について答えよ。「答えのみでよい」と書かれていない問題については, 証明をつけること。

## 問題 1.

空でない集合  $X, Y$  に対して,  $f: X \rightarrow Y$  とする. 次の問いに答えよ. ただし, (1) から (3) までについては, 答えのみでよい.

- (1)  $A \subset X$  に対して,  $f(A)$  の定義を答えよ.
- (2)  $B \subset Y$  に対して,  $f^{-1}(B)$  の定義を答えよ.
- (3)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を, 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $g(x) := 2x^2 - 1$  で定める.
  - (a)  $g([-2, 4]) \cap g([-3, 1])$  を求めよ.
  - (b)  $g^{-1}((-2, 3)) \cup g^{-1}((0, 4))$  を求めよ.
- (4)  $A_1, A_2 \subset X$  に対して  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$  を証明せよ.
- (5)  $A_1, A_2 \subset X$  に対して  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  が一般には成り立たないことを説明せよ.
- (6)  $B_1, B_2 \subset Y$  に対して  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$  を証明せよ.

## 問題 2.

$X, Y$  を空でない集合とする. 次の問いに答えよ. ただし, (1) から (3) までについては, 答えのみでよい.

- (1)  $f: X \rightarrow Y$  が単射であることの定義を答えよ.
- (2)  $f: X \rightarrow Y$  が全射であることの定義を答えよ.
- (3) 次の関数  $f$  は「単射だが全射でない」, 「全射だが単射でない」, 「全単射」, 「全射でも単射でもない」のどれになるか?
  - (a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $f(x) := \cos x$  で定める.
  - (b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $f(x) := e^{-x}$  で定める.
- (4)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in (0, \infty)$  に対して,  $f(x) := 4x^2 - 3$  で定める.  $f$  が単射であること, 全射ではないことを示せ.
- (5)  $g: \mathbb{R} \rightarrow [-3, \infty)$  を  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $g(x) := 4x^2 - 3$  で定める.  $g$  が全射であること, 単射ではないことを示せ.

### 問題 3.

次の各問いに答えよ. ただし, (2) は答えのみでよい.

- (1) 命題  $p, q, r$  に対して,  $((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$  を真理表を用いて示せ.
- (2)  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$  が線形独立であるとは, どんな  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  に対しても,  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = 0$  ならば,  $c_1 = c_2 = 0$  となることをいう.
  - (a)  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$  が線形独立であることの定義を, 論理記号を用いて表せ.
  - (b)  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$  が線形独立でないことを, 論理記号を用いて表せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.