数学入門 A 演習問題　(2015 年 4 月 14 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 1.1 (提出課題)**.**
講義ノートの定義 1.3 を 3 回書き写してくること.

問題 1.2 (提出課題)**.**
講義ノートの例 1.4 の主張とその証明を 3 回書き写してくること.

問題 1.3.
$X := \{4n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y := \{8n : n \in \mathbb{N}\}$, $Z := \{12n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくとき,

$$Y \subset X, \qquad Z \not\subset Y$$

を示せ.

問題 1.4.
$X := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y := \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$, $Z := \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくとき,

$$Z \subset X, \qquad Z \not\subset Y$$

を示せ.

問題 1.5.
集合の記号を用いて, 3 の整数巾乗全体からなる集合を記述せよ.

問題 1.6.
集合の記号を用いて, すべての素数 p の正巾乗全体からなる集合を記述せよ.

問題 1.7.
$\{$ 正の偶数 $\}$, $\{$ 正の奇数 $\}$ を $\in$ を使って厳密に書いてみよ.

問題 1.8.
集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ をみたすとする. このとき, $A \subset C$ を示せ.

数学入門 A 演習問題　(2015 年 4 月 21 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 2.1 (提出問題)**.**
講義ノートの定理 1.1 の主張と証明を 3 回書き写してくること.

問題 2.2.
$\mathbb{R}$ の部分集合 A, B で $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たないような例を作れ.

問題 2.3.
集合 $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, \{3, 4\}\}$ について, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$ を求めよ.

問題 2.4.
集合 A, B に対して, $B \subset A \cup B$ を示せ.

問題 2.5.
集合 A, B に対して, $A \cap B \subset B$ を示せ.

数学入門 A 演習問題　(2015 年 4 月 28 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 3.1 (提出問題)**.**
講義ノートの定理 1.2 の主張と証明を 3 回書き写してくること.

問題 3.2 (提出問題)**.**
講義ノートの定理 1.3 の主張とその証明を 3 回書き写してくること.

問題 3.3.
集合 A, B に対して, $A \cap B = B \cap A$ を示せ.

問題 3.4.
集合 A, B, C に対して, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ を示せ.

問題 3.5.
分配法則をベン図を用いて説明せよ.

数学入門A 演習問題 (2015年5月12日)

注意: 提出課題については, A4のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2枚以上になるときは左上のみをホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 4.1 (提出問題)**.**
講義ノートの定理1.5の主張とその証明を3回書き写してくること.

問題 4.2 (提出問題)**.**
講義ノートの定理1.6の主張とその証明を3回書き写してくること.

問題 4.3.
de Morganの法則を差集合を用いて記述せよ. 例えば, 集合 X, $A \subset X$, $B \subset X$ について, $(A \cap B)^c = X \setminus (A \cap B)$ がどう書けるか?

問題 4.4.
de Morganの法則をベン図を用いて説明せよ.

問題 4.5.
集合 A, B に対して, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ.

問題 4.6.
$A := \{1, 2, \{3, 4\}\}$, $B := \{2, 3, 4\}$ とする. このとき, $A \times B$ を求めよ. 元の個数はいくつか?

問題 4.7.
集合 A, B, C について, 次が成り立つことをベン図を用いて説明せよ.

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

問題 4.8.
集合 A, B, C に対して, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ が成り立つことを示せ.

数学入門A 演習問題　(2015 年 5 月 26 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 5.1 (提出問題)**.**
次を 3 回書き写してくること.

(1) 写像 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,\infty)$ に対して
$$f(x) := x^2$$
により定める.

(2) 写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して
$$g(x) := x^2$$
により定める.

(3) 写像 $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して
$$h(x) := x^2$$
により定める.

問題 5.2 (提出問題)**.**
次を 3 回書き写してくること.

(1) 写像 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を
$$f(x) := x^2 \quad (x \in (0,\infty))$$
により定める.

(2) 写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を
$$g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$
により定める.

(3) 写像 $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を
$$h(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$
により定める.

問題 5.3.
下記は, 高校までの数学でよく見られる関数の書きかたである. 写像 f と g の定義域と値域を定めて, 写像を定義せよ.
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} \quad (z \neq 1)$$
$$g(w) = \sqrt{1-w^2} \quad (-1 < w < 1)$$

数学入門 A 演習問題　(2015 年 6 月 2 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 6.1 (提出問題)**.**
講義ノートの例 2.3 の主張と証明を 3 回書き写してくること.

問題 6.2 (提出問題)**.**
講義ノートの定義 2.5 を 3 回書き写してくること.

問題 6.3.
二つの写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := 3x + 1, \qquad g(x) := \frac{1}{x^2 + 1}$$

で与える. $x \in \mathbb{R}$ に対して, 合成写像 $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$ を求めよ.

問題 6.4.
写像 f, g の値がそれぞれ

$$f(x) := x + \frac{1}{x}, \quad g(y) := \log(1 + y)$$

となるとする.

(1) f と g の定義域と値域を定めて写像を定義せよ.
(2) $f \circ g$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.
(3) $g \circ f$ が定められるように, f と g の定義域と値域を定めよ.

問題 6.5.
$A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ を

$$A_1 := [-3, 1], \ A_2 := [-1, 2], \ B_1 := [-1, 1], \ B_2 := [1, 9]$$

で定める. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) := x^3, \quad g(x) := x^2$$

で定義する. このときに, $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$, $g(A_1)$, $g(A_2)$, $g^{-1}(B_1)$, $g^{-1}(B_2)$ を求めよ.

問題 6.6.
問題 6.5 と同じ記号を用いる. $f(A_1 \cap A_2)$, $f(A_1) \cap f(A_2)$, $f^{-1}(f(A_1))$, $f(f^{-1}(B_1))$, $f(A_1) \setminus f(A_2)$, $f(A_1 \setminus A_2)$, $g(A_1 \cap A_2)$, $g(A_1) \cap g(A_2)$, $g^{-1}(g(A_1))$, $g(g^{-1}(B_1))$, $g(A_1) \setminus g(A_2)$, $g(A_1 \setminus A_2)$ をそれぞれ求めよ.

数学入門A 演習問題　(2015年6月9日)

注意: 提出課題については, A4のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 7.1 (提出問題)**.**
講義ノートの定理2.2の(1)と(4)の主張とその証明を3回書き写してくること.

問題 7.2 (提出問題)**.**
講義ノートの定義2.6を3回書き写してくること.

問題 7.3 (提出問題)**.**
講義ノートの定義2.7を3回書き写してくること.

問題 7.4.
X, Y を空でない集合, $f: X \to Y$ を写像とし, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次を示せ.

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
(2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

問題 7.5.
問題7.4と同じ記号を用いる. 次を示せ.

(1) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$;
(2) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

問題 7.6.
問題7.4と同じ記号を用いる. 次を示せ.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(3) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;
(4) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;

数学入門A 演習問題　(2015 年 6 月 23 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは左上のみをホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 8.1 (提出問題)**.**
講義ノートの例 2.7 の f が単射になることの証明を 3 回書き写してくること.

問題 8.2 (提出問題)**.**
講義ノートの例 2.8 の h が全射になることの証明を 3 回書き写してくること.

問題 8.3.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ を $x\in\mathbb{R}$ に対してそれぞれ

$$f(x):=x^2,\quad g(x):=x^2$$

で定義する.

(1) f は単射ではないことと, 制限写像 $f|_{(0,\infty)}$ が単射になることを示せ.
(2) f は全射ではないことと, g は全射になることを示せ.

問題 8.4.
次の写像が単射になるか, 全射になるか, 証明をつけて答えよ.

(1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して $f(n):=-n$.
(2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して $f(n):=2n$.
(3) $f:\mathbb{N}\to\{2n:n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $f(n)=2n-2$.
(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^2$.
(5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=\sqrt{|x|}$.
(6) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して $f(\vec{x}):=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\vec{x}$.
(7) $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $A\in M_2(\mathbb{R})$ に対して $f(A):=\det A$.
ただし, $M_2(\mathbb{R})$ は実数係数 2 次行列全体のなす集合とする.
(8) $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $A\in M_2(\mathbb{R})$ に対して $f(A):=\mathrm{tr}\,A$.

問題 8.5.
次の写像が単射になるか, 全射になるか答えよ. ただし, 証明はつけなくてもよい.

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^3$.
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^3+x$.
(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=x^5+3x$.
(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=e^x$.
(5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\in(0,\infty)$ に対して $f(x):=\log x$.
(6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=\sin x$.
(7) $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x):=\cos x$.
(8) $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して $f(x):=\tan x$.

数学入門 A 演習問題　(2015 年 6 月 30 日)

注意: 提出課題については, A4 のレポート用紙やコピー用紙 (この紙と同じサイズの紙) を利用すること. 2 枚以上になるときは**左上のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフによる提出は認めない. 表紙をつける必要はない. 鉛筆などの修正のできる筆記具での作成を認める. なお, 指示に従わない提出物については, 提出を認めないことがある.

問題 9.1 (提出問題)**.**
講義ノートの定理 2.3 の主張とその証明を 3 回書き写してくること.

問題 9.2.
X, Y を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を写像とする. 任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して, $g \circ f(x) = x$ かつ $f \circ g(y) = y$ が成り立つならば, f は全単射であり, $f^{-1} = g$ となることを証明せよ.

問題 9.3.
X, Y を集合, $f : X \to Y$ を単射とする. このとき, $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$, $f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$ を示せ.

問題 9.4.
集合 X, Y, 写像 $f : X \to Y$ について, 次を示せ.
(1) f が全射ならば, $f(X) = Y$ が成り立つ.
(2) $f(X) = Y$ ならば f は全射である.

問題 9.5.
X, Y を集合, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, $B \subset Y$ に対して, $B \subset f(f^{-1}(B))$ を示せ.

問題 9.6.
集合 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 次を示せ.
(1) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である.
(2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である.

問題 9.7.
$a < b$ に対して, 閉区間 $[0, 1]$ から閉区間 $[a, b]$ への全単射, および開区間 $(0, 1)$ から開区間 (a, b) への全単射を与える関数を構成せよ (ヒント:一次関数を考えよ).

問題 9.8.
A を実数値 n 次正則行列とし, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) := Ax$$

により定義する.
(1) f が全単射であることを示せ.
(2) f^{-1} を求めよ.

数学入門 A 演習問題　(2015 年 7 月 7 日)

問題 10.1.

命題 $p,\ q$ に対して, 真理表を書くことで,

$$「p \Leftrightarrow q」\Longleftrightarrow「(p \to q) \wedge (q \to p)」$$

を示せ.

問題 10.2.

命題 p, q に対して,

$$「p \to q」\Longleftrightarrow「\neg p \to \neg q」$$

が成り立つことを真理表を書くことにより示せ.

問題 10.3.

命題 p, q, r に対して, 真理表を書いて, 次を示せ.

(1) (結合法則) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(2) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
(3) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(4) (分配法則) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(5) (de Morgan の法則) $\neg\,(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg\,p \vee \neg\,q$

問題 10.4.

命題 p, q, r に対して, 次を示せ.

(1) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
(2) $((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$
(3) $(p \to (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
(4) $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

数学入門A 演習問題　(2015年7月14日)

問題 11.1.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して, 次の問に答えよ. ただし, 吹田・新保「理工系の微分積分学」では, 関数 f の定義域や変数 x が何なのかが曖昧になっているので注意せよ.

(1) f が $[0,1]$ 上で連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.

(2) f が $[0,1]$ 上一様連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ. 連続と一様連続の違いに注意せよ.

問題 11.2.

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \in \mathbb{R}^3$ が**線形独立**であるとは, どんな $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対しても, $c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_3\vec{a_3} = 0$ ならば, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となることをいう. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \in \mathbb{R}^3$ が**線形独立**であることの定義とその否定 (**線形従属**という) を, 論理記号を用いて表せ (ヒント: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を「かつ」,「または」を用いて記述せよ).

問題 11.3.

$r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $B_r(x_0) := (x_0 - r, x_0 + r)$ とおく. $U \subset \mathbb{R}$ が開集合であるとは

任意の $x \in U$ に対して, ある正の実数 r が存在して, $B_r(x) \subset U$ が成り立つ

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 開集合の定義を述べよ.

(2) $U \subset \mathbb{R}$ が開集合でないことを論理記号を用いて述べよ.