

数学入門 B 定期試験問題

平成 25 年 1 月 25 日 第 4 時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること

「答えのみでよい」と書かれていない問題については, 途中計算や理由も書くこと.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

- (1) 命題 p, q, r に対して, 真理表を用いて $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ.
- (2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとは,
「任意の $\varepsilon > 0$ に対応して自然数 N_0 が存在して, すべての自然数 n, m に対して $n, m > N_0$ のとき $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となること」である (黒田成俊「微分積分」より).
 - (a) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることの定義を論理記号を用いて書け.
 - (b) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列でないことを述べよ.

問題 2.

次の各問いに答えよ.

- (1) 集合 X, Y の濃度が等しいことの定義を述べよ.
- (2) 次の集合がたかだか可算集合であるか答えよ (答えのみでよい).
 - (a) $\{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$.
 - (b) \mathbb{R} .
 - (c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - (d) $2^{\mathbb{N}}$.
- (3) A を正の偶数全体の集合, すなわち

$$A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

とおく. 定義にもとづいて $\#A = \#\mathbb{N}$ を示せ.

問題 3.

$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$n \sim m \stackrel{\text{定義}}{\Leftrightarrow} n - m \text{ が } 3 \text{ で割り切れる}$$

と定義する. \sim は \mathbb{Z} 上の同値関係になる (このことは認めてよい).

(1) 次が成立するか否か答えよ (答えのみでよい).

(a) $13 \sim 5$

(b) $39 \sim 15$

(c) $89 \sim 135$

(2) $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $C(n)$ を \sim に関する同値類とする. 集合 $C(1)$ はどのようなものか? 同値関係の記号 \sim を使わずに記述せよ.

(3) $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して, $C(n), C(m)$ の和 $C(n) + C(m)$ を

$$C(n) + C(m) := C(n + m)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

以下余白, 計算用紙として使ってよい