数学入門 B 演習問題　(2012 年 9 月 28 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 1.1.

X, Y を空でない集合とする.

(1) 写像 $f : X \to Y$ が単射であることの定義とその否定を述べよ.

(2) 写像 $f : X \to Y$ が全射であることの定義とその否定を述べよ.

(3) $\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への全単射写像 $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ を一つ求めよ (簡単でよいので, 理由も述べること)

問題 1.1 の (3).

わかりやすいのは $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = e^x$. 少し病的な例は

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & (x > 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 1 + \frac{1}{x-1} & (x < 0) \end{cases}$$

関数 f のグラフを書いてみよ. なんとなく何がしたいのかわかるはず.

連続で, 狭義単調増加, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ をみたすようなものであれば, どんな関数であっても $\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への全単射写像になる ($f(x) = e^x$ はこの例に入っている). これはどちらかというと微積分の問題であるが, 興味があれば考えてみてください (ヒントは中間値の定理. また, 連続を仮定しないと反例が作れる. なお, テストに出すつもりはまったくない). $\square$

数学入門B 演習問題　(2012年10月5日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 2.1.

真理表を書いて, 命題 p, q に対する de Morgan の法則

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

を示せ.

問題 2.2.

真理表を書いて, 命題 p, q に対して

$$(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

を示せ.

問題 2.3.

集合 A, B に対して, 論理和と論理積の記号を使って, $A \cup B$ と $A \cap B$ を記述せよ.

注意.

中内「ろんりの練習帳」の定義 1.5.1 では同値の記号に $\equiv$ を使っているが, この講義では, $\Leftrightarrow$ を使う (注意 1.10.12 も参照せよ)

問題 2.4 (問題 2.1, 問題 2.2 の類題)**.**

命題 p, q, r に対して, **真理表を用いて**, 次を示せ.

(1) (結合法則) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(2) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
(3) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(4) (分配法則) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

問題 2.5.

命題 p, q, r に対して, 次を示せ. 真理表を用いてもよいし, 結合法則や分配法則, de Morgan の法則を用いて, 同値をつなげて示してもよい.

(1) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
(2) $((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$
(3) $(p \to (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
(4) $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

数学入門B 演習問題　(2012年10月12日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 3.1.

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(-1,1)$, $a\in\mathbb{R}$ に対して, $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ であるとは,

任意の正数 ε に対して, ある正数 δ が存在して, 任意の $x\in(-1,1)$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ ならば } |f(x)-a|<\varepsilon$$

が成り立つことをいう.

(1) 論理記号 ($\forall$ や $\exists$) を用いて, 定義を記述せよ.

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ でないことを, 論理記号を使って記述せよ.

問題 3.2.

$r>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ に対して, $B_r(x_0):=(x_0-r,x_0+r)$ とおく. $U\subset\mathbb{R}$ が開集合であるとは

任意の $x\in U$ に対して, ある正の実数 r が存在して, $B_r(x)\subset U$ が成り立つ

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 開集合の定義を述べよ.

(2) $U\subset\mathbb{R}$ が開集合でないことを論理記号を用いて述べよ.

注意 (あとでとても重要)**.**

「開集合でない」ということは「閉集合である」という**ことではない.** 日本語で「開」の反対語は「閉」であるが, 数学の「開」や「閉」とは意味が異なる. 実際に「開集合でも閉集合でもない集合」や「開集合かつ閉集合」が存在する.

問題 3.2 について.

$r>0$ と書くと, このとき, 自然に $r\in\mathbb{R}$ ということが仮定されることが多いため, $\mathbb{R}$ を書く必要はない (問題 3.1 において, $\varepsilon\in\mathbb{R}$ と書かなくてもよいのと同じ. 本当は正数 ε は正の実数だから, どこかに $\varepsilon\in\mathbb{R}$ と書いた方が厳密ではあるが, $\varepsilon>0$ と書いたら, そのときに, 実数としてしまうことが多い). ただし, 実数ではなくて, r が有理数とか整数のときは, たとえば, $r\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)$ とか, $r\in\mathbb{Z}\cap(0,\infty)$ と書けばよい. また, $r\in\mathbb{R}$ としてしまうと, 開集合の定義の意味がなくなってしまうので, これは間違い ($r\le 0$ のとき, $B_r(x)=\emptyset$ となり, すべての集合が開集合になってしまう).

$\square$

数学入門B 演習問題　(2012年10月26日)

学籍番号　　　　　名前

問題 4.1.
$A := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とおくとき, $\#A = \#\mathbb{N}$ を示せ.

問題 4.2 (難).
$f : [0,1] \to (0,1)$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{x}{2^2} & x = \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ x & x \neq 0, \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

と定めたときに, f が全単射となることを示せ. 従って, $\#[0,1] = \#(0,1)$ となる.

問題 4.1 の証明.
$f : \mathbb{N} \to A$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) := 2n-1$ と定義すれば, 全単射となる. 全射のみ示す. $\forall y \in A$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ が存在して, $y = 2n_0 - 1$ とできる. このとき, $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ であり,

$$f(n_0+1) = 2(n_0+1) - 1 = 2n_0 - 1 = y$$

となるので, f は全射である (もし, さらに何か書きたいなら, $y \in f(\mathbb{N})$ と書く. もちろん, 書かなくてもよい. $y = f(\mathbb{N})$ と書いてある解答があったが, これは間違い. 書いてみることはとてもいいことだが, 書いたことが正しいかどうか, 一回おちついて考えること). □

問題 4.2 の証明.
1. f が全射となることを示す. $\forall y \in (0,1)$ に対して, 場合分けをする.
<u>case 1</u> $y = \dfrac{1}{2}$ のときは, $x = 0$ とすると $y = \frac{1}{2} = f(x)$ となる.
<u>case 2</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ があるときは, $x = \dfrac{1}{2^{n-2}}$ とすると $n \geq 2$ より $n-2 \geq 0, n-2 \in \mathbb{N}_0$ だから $x \in [0,1]$ となり, $f(x) = \dfrac{x}{2^2} = \dfrac{1}{2^{n-2}}\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^n} = y$ となる.
<u>case 3</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ がないときは, $x = y$ とすると $f(x) = y$ となる.
以上により, f が全射となることがわかった. さらに,

$$f(x) = \frac{1}{2^m}\text{となる } m \in \mathbb{N}\text{ がある} \Leftrightarrow x = 0\text{ または } x = \frac{1}{2^n}\text{となる } n \in \mathbb{N}_0\text{がある}$$

がわかることに注意しておく.
2. f が単射になることを示す. $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$ に対して, $f(x_1) = f(x_2) =: y$ とする. y の値に応じて場合わけする.
<u>case 1</u> $y = \dfrac{1}{2}$ のとき, $x_1 = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}_0$ があるとすると $\frac{1}{2} = f(x_1) = \dfrac{1}{2^{n+2}}$ となり, $n+1 = 0$ となることから矛盾. 従って, $x_1 = 0$. 同様にして $x_2 = 0$ だから $x_1 = x_2$.
<u>case 2</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ があるとき, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ だから, $f(x_1) = f(x_2)$ より, $\dfrac{x_1}{2^2} = \dfrac{x_2}{2^2}$ となる. よって. $x_1 = x_2$.

case 3 $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ がないときは, $x_1, x_2 \neq 0, \dfrac{1}{2^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ だから, $f(x_1) = f(x_2)$ から f の定義より $x_1 = x_2$.

よって, どの場合であっても $x_1 = x_2$ となったので, f は単射である. $\square$

注意.

問題 4.2 について, グラフを書いてみよ. 単射であるということは, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点がたかだか 1 点しかないということと同じである (各自考えてみよ. また, $g(x) = x^2$ の場合では, グラフと交わる点が 2 点になることがあることを確認してみよ). 問題 4.2 のグラフについて, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点はたかだか 1 点しかないことを確かめてみよ.

また, 全射であることは, (y 軸での) 値域を通る x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点があるということと同じである (各自考えてみよ. また, $g(x) = x^2$ の場合で, $y = -1$ を通る, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点がないことを確認してみよ). 問題 4.2 のグラフについて, $0 < y < 1$ について, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点はたかだか 1 点しかないことを確かめてみよ.

注意.

問題 4.2 の証明はかなり難しい (というよりは複雑) ということがわかると思う. あとで, もう少しすっきりした証明を与える.

数学入門B 演習問題　(2012 年 11 月 9 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 5.1.
$(a,b) \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．このとき $\#(a,b) = \#\mathbb{R}$ を示せ (ヒント: $f : (-1,1) \to (a,b)$ への全単射写像を作れ).

問題 5.2.
$[a,b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする．このとき $\#[a,b] = \#\mathbb{R}$ を示せ (ヒント: 問題 5.1 と問題 4.2 を使う).

問題 5.1 の証明の概略.
$f : (-1,1) \to (a,b)$ への全単射写像を作れば, $\#(a,b) = \#(-1,1)$ がわかる (一次関数で構成してみよ．また, その関数 f が全単射であることも示せ)．講義ノートの例 2.8 より, $\#(-1,1) = \#\mathbb{R}$ だから, 組み合わせることで $\#(a,b) = \#\mathbb{R}$ がわかる．　□

注意.
問題 5.1 の証明の概略の中で, 命題 2.1 を使っているところがある．それがどこかを考えよ．

注意.
授業中に tan が全単射であることを示さなかったのは, tan の定義が微積分の深い結果に依っているからである．高校で習った円周を使った定義は, 数学科での定義としては不適切なところがある．

(理由 その 1) わざわざ, 関数の連続や, 中間値の定理などをグラフを使わずに定義, 証明したのに, 重要な関数である sin や cos をグラフを使って証明するのは問題がある．

(理由 その 2) sin や cos の微分を計算するときに循環論法に陥る可能性がある．というのも $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて sin や cos の微分は求められるが, この極限の計算は円弧の弧長を用いて求めるのが普通である．しかし, 円弧の弧長の定義がそもそも何かという問題があり, 通常は積分を用いて定義される．また, 円弧の弧長を計算するのにも $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使うので, いったい, 何を仮定して出発したかがわからなくなってしまう．

このような難しいことを避けるために, cos や sin は Taylor 展開や積分を用いて**定義する．**その定義が, 我々が通常考えている円周を使った定義と一致していることを**示す．**これにより, 循環論法や矛盾のおきない議論をするのである．

問題 5.2 の証明の概略.
$g : [0,1]) \to [a,b]$ への全単射写像を作れば, $\#[a,b] = \#[0,1]$ がわかる (一次関数で構成してみよ)．問題 4.2 より $\#[0,1] = \#(0,1)$ であり, 問題 5.1 で $a = 0, b = 1$ とすれば, $\#(0,1) = \#\mathbb{R}$ だから, この 3 つの等式をくみあわせると

$$\#[a,b] = \#[0,1] = \#(0,1) = \#\mathbb{R}$$

を得る．　□

注意.
狭義単調な連続関数が, 定義域から像への全単射になることは証明が必要である．かな

り多くの解答で $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) := -\frac{x-\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} \quad (x\in(a,b))$$

により定義すると, f は全単射という主張があったが,「f は狭義単調減少なのはなぜか?」,「f は連続なのはなぜか？」,「f が全単射なのはなぜか？」など, 示さないといけないことがたくさんある. ちなみに, 連続な全単射写像 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ は構成できないことが知られているので (例えば, 位相空間の知識を使う), 関数 g を直接構成しようとすると, かなり面倒なことになる.

数学入門B 演習問題　(2012年11月16日)

学籍番号　　　　　名前

問題 6.1.

Bernstein の定理を使って, $\#[0,1] = \#(0,1)$ を示せ (ヒント: $f : (0,1) \to [0,1]$ を $x \in (0,1)$ に対して, $f(x) := x$ とおく. 次に $g : [0,1] \to (0,1)$ を $y \in [0,1]$ に対して, $g(y) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ とおく. どちらも単射になっていることを示せ).

問題 6.2.

$\#(0,1] = \#(0,1)$ を示せ (ヒント: 問題 6.1 と同様にして, 単射 $f : (0,1] \to (0,1)$ と $g : (0,1) \to (0,1]$ を構成せよ).

問題 6.3.

集合 A, B, C, D に対して, $\#A \leq \#C$ かつ $\#B \leq \#D$ ならば $\#(A \times B) \leq \#(C \times D)$ を示せ (ヒント: $\#A \leq \#C$ かつ $\#B \leq \#D$ より, 単射 $f : A \to C$ と $g : B \to D$ が存在する. $F : A \times B \to C \times D$ を $(x,y) \in A \times B$ に対して $F(x,y) = (f(x), g(y))$ で定義してみよ).

問題 6.1 について.

なぜ, ヒントにある関数 g があのように定まっているのか考えてみよ. f は簡単な関数であるが, g は f に比べると少し変な関数である. このように定義したのにはちゃんと意味がある. □

問題 6.3 の証明.

$\#A \leq \#C$ かつ $\#B \leq \#D$ より, 単射 $f : A \to C$ と $g : B \to D$ が存在する. そこで, $F : A \times B \to C \times D$ を $(x,y) \in A \times B$ に対して $F(x,y) = (f(x), g(y))$ で定義する. このとき, F が単射となることを示せば, $\#(A \times B) \leq \#(C \times D)$ がわかる.

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ に対して, $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ を仮定する. このとき, $(f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2))$ だから, $f(x_1) = f(x_2)$ かつ $g(y_1) = g(y_2)$ となる. ここで, f, g はどちらも単射だったから, $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ が成り立つ. 従って, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ となるので, F は単射となる. よって, $\#(A \times B) \leq \#(C \times D)$ となる. □

数学入門B レポート問題 (その1)

問題 7.1.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 吹田・新保の p.23 の (20) を参考にして, f が $[0,1]$ 上で連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.
(2) 吹田・新保の p.26 の (22) を参考にして, f が $[0,1]$ 上一様連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.
(3) 吹田・新保の p.26 の定理 16 の証明を, 論理記号を用いて書き直してみよ.

注意.

吹田・新保の「$f(x)$ は I 上連続である」という書き方は, 実は**正しくない**. 正確には, 「f は I 上連続である」が正しい. なぜかというと, 「$f(x)$ は I 上連続である」 は, そのまま読むと, 「**関数の** x **での値** $f(x)$ は I 上で連続である」と読めてしまう (つまり, 関数が連続ではなくて, 値が連続となる) からである. ただし, 吹田・新保のように書かれる教科書はかなり多い.

問題 7.2.

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \in \mathbb{R}^3$ が**線形独立**であるとは, どんな $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対しても, $c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_3\vec{a_3} = 0$ ならば, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となることをいう.

(1) $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \in \mathbb{R}^3$ が**線形独立**であることの定義とその否定 (**線形従属**という) を, 論理記号を用いて表せ.
(2) 斎藤 p.99 [3.1] の命題とその証明を, $k = 3$ の場合で論理記号を用いて書き直してみよ.

注意.

線形独立の定義で, 「どんな $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対しても」が省略されている教科書は結構多い. 比較的自明なため, 省略されることが多いのだが, 最初は省略せずに書いた方がよい (採点する方も「あ, これはわかって書いているな」と認識できる).

問題 7.3.

集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ. ただし, $\sim$ は集合の濃度が等しいことを意味する.

(1) $A \sim A$
(2) $A \sim B$ ならば $B \sim A$
(3) $A \sim B$, $B \sim C$ ならば $A \sim C$

問題 7.4 (難, 例 2.4 も参照)**.**

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $(n, m) \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(n,m) := m + \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}$$

で定義する. f が全単射になることを示せ.

- 全射の証明は, $l \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} k < l \leq \sum_{k=1}^{N} k$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる (これが何を意図しているのかは各自考えてみよ). そして, $f\left(l - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} k, 1 - l + \sum_{k=1}^{N} k\right)$ を考えてみよ.
- 単射の証明は例えば, 対偶をとって, $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ ならば, $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$ を示す. $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$ かそうでないかで場合わけしてみる.

数学入門B 演習問題　(2012 年 11 月 30 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 8.1.
次の $\equiv$ は正しいか正しくないか答えよ.

(1) $13 \equiv 5 \pmod 7$
(2) $39 \equiv 15 \pmod 3$

以下

$$\mathbb{R}[X] := \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n : n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

と定める. $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して

$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} h \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f - g = (X^2+1)h$$

とおく.

問題 8.2.
次が正しいか正しくないかについて答えよ.

(1) $3X^2 + 4X + 1 \sim X^2 + 4X - 1$
(2) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

問題 8.3.
$\sim$ が反射律と推移律をみたすことを証明せよ.

注意.
授業中に $p \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して, $a \equiv b$ (mod p) のときに, 「a と b を p で割った余りが同じ」と説明しましたが, その理由は説明していませんでした. 厳密にやろうとすると, 整数論の知識がいくつか必要ですが, 簡単に理由を説明します.

証明.
$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して, $a \equiv b$ (mod p) を仮定する. このとき, a を p で割った商を q_a, 余りを r_a とおくと

$$a = q_ap + r_a, \quad 0 \le r_a \le p-1 \tag{8.1}$$

とできる. 同様に, b を p で割った商を q_b, 余りを r_b とおくと

$$b = q_bp + r_b, \quad 0 \le r_b \le p-1 \tag{8.2}$$

とできるから, (8.1) と (8.2) を引き算すると

$$a - b = (q_a - q_b)p + (r_a - r_b)$$

となる. このとき, $-p < r_b - r_a < p$ に注意すると $r_b - r_a$ が p でわりきれる, つまり $r_b - r_a = pn$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する条件は $r_b - r_a = 0$ に限る. よって, $r_a = r_b$ だから, 「a と b を p で割った余りが同じ」がわかる. $\square$

この (8.1) は具体的な数字を入れるとわかりやすいと思います. 例えば, 13 を 7 で割った商は 1, 余りは 6 ですが, このときに $13 = 1 \times 7 + 6$ が成り立ちます. また, $5 = 0 \times 7 + 5$, $39 = 13 \times 3 + 0$, $15 = 5 \times 3 + 0$ などもわかります.

また, この証明は多項式 $\mathbb{R}[X]$ の場合でもそのまま同じ議論で証明できます. 例えば

$$3X^2 + 4X + 1 = 1 \times (X^2 + 1) + 4X - 2, \quad X^2 + 4X - 1 = 1 \times (X^2 + 1) + 4X - 2$$

や

$$\begin{aligned} X^3 + X^2 + X + 1 &= (X + 1) \times (X^2 + 1) + 0 \\ X^3 - X^2 + X - 1 &= (X - 1) \times (X^2 + 1) + 0 \end{aligned}$$

を考えると, 二つの多項式の ($(X^2 + 1)$ で割った) 余りが同じだったら, その二つの多項式の差は $(X^2 + 1)$ で割り切れることがわかります.

実際に, 整数の世界では, 割り算ができないことがあるわけですが, その場合は (8.1) の表示式を使って考えることが多いです. このアイデアは代数学でさらに抽象化して環論 (特に可換環論) や単因子論として研究されています.

数学入門B 演習問題　(2012年12月7日)

学籍番号　　　　名前

問題 9.1.

$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 3$ に対して $C(0) = C(3)$ になることを集合の等号の定義にもとづいて示せ. すなわち, $C(0) \subset C(3)$ と $C(3) \subset C(0)$ を示せ.

問題 9.2.

次の各問いに答えよ.

(1) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 7$ に対して $C(2) \cap C(5) = \emptyset$ になることを示せ.
(2) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 4$ に対して $C(2 \cdot 2) = C(0)$ になることを示せ.

問題 9.3.

$\mathbb{R}[X]$ に対して, 例 3.4 の同値関係 $\sim$ を考える. $a_1 + b_1X,\ a_2 + b_2X \in \mathbb{R}[X]$ に対して, $C((a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X)) = C(a + bX)$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ を求めよ. 何か気がついたことがあったら, なんでもよいので書け.

問題 9.3 について.

少し計算すると

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X) &= a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)X + b_1b_2X^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)X + b_1b_2(X^2 + 1)\end{aligned}$$

より,

$$(a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X) - (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)X = b_1b_2(X^2 + 1)$$

となるから, $(a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X) \sim (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)X$ がわかる. よって, 定理 3.1 より

$$C((a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X)) = C((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)X)$$

がわかる. これが何を意図して問題としたのかは, もう少しあとで説明する. $\square$

数学入門B 演習問題　(2012年12月14日)

学籍番号　　　　名前

問題 10.1.

$\equiv$ を $\mathbb{Z}$ 上の mod 3 における同値関係とする．$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/_{\equiv}$ を示せ．特に $\mathbb{Z}/_{\equiv} \subset \mathbb{Z}_3$ を示せ.

問題 10.2.

X を集合, $\sim$ を同値関係．$x \in X$ に対して, x を代表元とする同値類を $C(x)$ とかく．すなわち $C(x) := \{y \in Y : y \sim x\}$．このとき, $x, y \in X$ に対して, $C(x) \neq C(y)$ かつ $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ とすると, どのような矛盾がおこるか調べよ.

問題 10.3.

ϕ を $\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ への標準的射影とする．このとき, 次の集合を求めよ．ただし代表元はたかだか 1 次多項式とすること.

(1) $\phi(X^3 + X^2 + X + 1)$
(2) $\phi(3X^3 + 6X + 2)$

問題 10.1 の証明の概略.

任意の $C(n) \in \mathbb{Z}/_{\equiv}$ に対して, ある $q, r \in \mathbb{Z}$ がとれて, $n = 3q + r$ かつ $0 \leq r < 3$ とできる．このとき $n - r = 3q$ だから, $n \equiv r$ となる．よって, $C(n) = C(r)$ となるが, $0 \leq r < 3$ だったから, $C(r) \in \mathbb{Z}_3$, すなわち, $C(n) \in \mathbb{Z}_3$. $\square$

問題 10.2 の説明.

$z \in C(x) \cap C(y)$ とすると, $z \sim x$ かつ $z \sim y$ だから, $x \sim y$ となる．よって, $C(x) = C(y)$ となるが, $C(x) \neq C(y)$ に矛盾する. $\square$

数学入門B 演習問題　(2012年12月21日)

学籍番号　　　　　名前

問題 11.1.

$C(a), C(b) \in \mathbb{Z}_4$ とする.

(1) $C(a), C(b)$ の和 $C(a)+C(b)$ を

$$C(a)+C(b) := C(a+b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $C(a), C(b)$ の積 $C(a) \cdot C(b)$ を

$$C(a) \cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $C(2) \cdot C(2) = C(0)$ を示せ.

数学入門B レポート問題 (その2)

提出には **A4 用紙を片面**で使い (レポート用紙でもコピー用紙でもよい．広告の裏紙などはダメ), **左上のみをホチキス止め**すること (上部中央や右上にホチキス止めをしないこと)．筆記用具は問わないが, 丁寧に書くこと．解読のできないレポートは採点できない．**これらの注意を守っていないレポートは採点しない．**なお, 表紙はつけてもつけなくてもよい．

$f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f - g \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める．$\overline{f}$ を f の $\sim$ に関する同値類とする．すなわち

$$\overline{f} := \{h \in \mathbb{R}[X] : f - h \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる } \}$$

と定める．

問題 12.1.

$f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して, 足し算 $\overline{f} + \overline{g}$ と掛け算 $\overline{f} \cdot \overline{g}$ を

$$\overline{f} + \overline{g} := \overline{f+g}, \qquad \overline{f} \cdot \overline{g} := \overline{fg}$$

と定義する．この足し算と掛け算の定義がそれぞれ well-defined であることを示せ．

問題 12.2 (有理数の構成)**.**

$m, m' \in \mathbb{Z}$, $n, n' \in \mathbb{N}$ が $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ ならば $mn' = m'n$ である．$mn' = m'n$ は整数の性質しか使っていないことに注意して, 整数から有理数を構成してみよう．

$(m, n), (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して,

$$(m, n) \sim (m', n') \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} mn' = m'n$$

で定義する．

(1) $\sim$ が $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係となることを示せ (ヒント: 少し難しいのは推移律の証明．もし, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}, \dfrac{m'}{n'} = \dfrac{m''}{n''}$ ならば**両辺に n' をかけることで,** $\dfrac{mn'}{n} = m' = \dfrac{m''n'}{n''}$ となることがわかる．このアイデアを推移律の証明にどう反映させればよいか考えてみよ)．

(2) $\overline{(m, n)}$ を $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の $\sim$ に関する同値類とする．このとき, $(m, n), (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して足し算 $\overline{(m, n)} + \overline{(m', n')}$ と掛け算 $\overline{(m, n)} \cdot \overline{(m', n')}$ を

$$\overline{(m, n)} + \overline{(m', n')} := \overline{(mn' + m'n, nn')}, \qquad \overline{(m, n)} \cdot \overline{(m', n')} := \overline{(mm, nn')}$$

で定義する．この足し算と掛け算の定義がそれぞれ well-defined であることを示せ．

以上により, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$ に足し算と掛け算が定義できることがわかった．さらに頑張ると, この演算が結合法則や分配法則などをみたすことが示せる (少し面倒)．よって, $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$ と定義することができる．

問題 12.3 (実数の構成)**.**

X を有理 Cauchy 列全体のなす集合とする．すなわち

$$X := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \text{Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\ (\forall n \in \mathbb{N})\}$$

とおく．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ に対して，

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

と定義する．このとき，$\sim$ が X 上の同値関係となることを示せ (この問題は，記号がごちゃごちゃしているだけで，実はそんなに難しくない).

注意.

なぜ，この定義をすると実数が構成できるのかについては，講義で少しだけ説明する．

数学入門B 試験対策問題

ここにあるのは, 今までの演習問題とその類題などをよせ集めたものである. 易しい問題と難しい問題をあまり区別せずに並べてある. まずはわかる問題とわからない問題を区別することからはじめてみよ. 次に, わからない問題に対して, まずはノートや参考書などをみながらでよいから, じっくり考えてみよ. その考えた時間は決して無駄にはならない. 残念ながら, 考えた時間と数学の理解度は比例してはくれない (と思われる) が, わからなくてもいいからとにかく考えることが, 数学の理解への一番の近道である. 答えをすぐ見てしまうと, その場ではうまくいくかもしれないが, それはテストの点がとれるというだけであって, 数学を理解したということにはならない場合が非常に多い.

問題 13.1.

命題 p, q, r に対して, 真理表を書いて, 次を示せ.

(1) (結合法則) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(2) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
(3) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(4) (分配法則) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(5) (de Morgan の法則) $\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$
(6) (対偶) $(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

問題 13.2.

命題 p, q, r に対して, 次を示せ. 真理表を用いる方法と, 結合法則や分配法則, de Morgan の法則を用いて, 同値をつなげて示す方法の両方で示してみよ.

(1) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
(2) $((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$
(3) $(p \to (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
(4) $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

問題 13.3.

$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (-1, 1)$, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ であるとは, $\varepsilon > 0$ を任意に取るとき, それに対応して $\delta > 0$ を定めて, 任意の $x \in (-1, 1)$ に対して

$$|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \text{ なるとき } |f(x) - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう (高木貞治「解析概論」より).

(1) 論理記号 ($\forall$ や $\exists$) を用いて, 定義を記述せよ.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ でないことを, 論理記号を使って記述せよ.

問題 13.4.

$r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $B_r(x_0) := (x_0 - r, x_0 + r)$ とおく. $U \subset \mathbb{R}$ が開集合であるとは

任意の $x \in U$ に対して, ある正の実数 r が存在して, $B_r(x) \subset U$ が成り立つ

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 開集合の定義を述べよ.
(2) $U \subset \mathbb{R}$ が開集合でないことを論理記号を用いて述べよ.

問題 13.5.

$F \subset \mathbb{R}$ が閉集合であるとは

任意の F での数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば, $a \in F$ が成り立つ

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 閉集合の定義を述べよ.
(2) $F \subset \mathbb{R}$ が閉集合でないことを論理記号を用いて述べよ.

問題 13.6.

$K \subset \mathbb{R}$ が点列コンパクトであるとは

任意の K での数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれることをいう.

(1) 論理記号を用いて, 点列コンパクトの定義を述べよ.
(2) $K \subset \mathbb{R}$ が点列コンパクトでないことを論理記号を用いて述べよ.

問題 13.7.

次の定義を述べよ.

(1) 集合 X と Y の濃度が等しい.
(2) 可算集合, 非可算集合.
(3) 集合 X と Y に対して, 集合 X の濃度が Y の濃度より小さい. すなわち $\#X \leq \#Y$.
(4) 集合 X に対する同値関係 $\sim$
(5) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と $x \in X$ に対して, x の同値類
(6) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ について X の $\sim$ による商集合
(7) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と商集合 $X/\sim$ に対して, X から $X/\sim$ への自然な射影 $\phi : X \to X/\sim$

問題 13.8.

次の集合の濃度が $\mathbb{N}$ と等しいことを定義にもとづいて示せ. ただし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である.

(1) $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (負の整数全体)
(2) $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ (奇数全体)
(3) $\{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (0 を含んだ偶数全体)
(4) $\{3n-1 : n \in \mathbb{N}\}$
(5) $\{5n+3 : n \in \mathbb{N}_0\}$

問題 13.9.

次の集合は可算集合か否か (証明は必要ない)

(1) $\mathbb{Z}$
(2) $\mathbb{Q}$
(3) $\mathbb{R}$
(4) $\mathbb{C}$
(5) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(6) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
(7) $2^{\mathbb{N}}$
(8) $\{A : A$ は整数を成分とする 3 次正方行列 $\}$

問題 13.10.

素数 p として, $\mathbb{Z}_p$ について考える

(1) 次の $\equiv$ は正しいか正しくないか答えよ.
  (1) $13 \equiv 5 \pmod 7$
  (2) $39 \equiv 15 \pmod 3$
  (3) $135 \equiv 357 \pmod 5$
  (4) $2011 \equiv 2013 \pmod{11}$
(2) $\mathbb{Z}_p$ における同値類 $C(0), C(1), \ldots, C(p-1)$ はどのような集合か？同値関係の記号を用いずに記述せよ.
(3) 同値類 $C(a), C(b)$ の和 $C(a) + C(b)$ を

$$C(a) + C(b) := C(a+b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(4) $C(a), C(b)$ の積 $C(a) \cdot C(b)$ を

$$C(a) \cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 13.11.

$f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f - g \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める. $\overline{f}$ を f の $\sim$ に関する同値類とする. すなわち

$$\overline{f} := \{h \in \mathbb{R}[X] : f - h \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる }\}$$

と定める.

(1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ.

(a) $3X^2 + 4X + 1 \sim X^2 + 4X - 1$

(b) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

(c) $4X^2 + 2X + 3 \sim X^2 + 2X + 2$

(d) $X^3 - X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

(2) $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f} + \overline{g} := \overline{f+g}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f} \cdot \overline{g} := \overline{fg}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 13.12 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = P^{-1}BP$$

で定義する.

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ.

(2) $A \sim B$ ならば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ を示せ.

(3) $A \sim B$ ならば $\det(A) = \det(B)$ を示せ.

問題 13.13.

微分積分学, 代数学幾何学のノートや教科書をみて, 定理や命題とその証明を証明を論理記号を用いて**自分の言葉**で書き直してみよ. これは, 論理記号の使い方の練習だけではなく, 微分積分学, 代数学幾何学のより深い理解につながる.

注意.

教科書の定義や定理では, 自明と思われるがために, 出てくる文字が任意なのか存在なのかが書かれていない場合がある (特に微分積分学の数列の収束ではこのことが顕著である). 論理記号を用いて書き直すときには, 出てくる文字が**任意なのか, 存在なのか**のどちらになるのかを意識しておくとよい. とりわけ, 数学入門 CD で勉強する距離空間, 位相空間では, 直感で考えると全然正しくないと思えることが正しかったりする (例えば,「連続関数が定数関数しかない」や「すべての関数が連続」が導ける設定がある). これらを理解するためには, 論理だけで頑張らないといけないので, 今のうちから「教科書やノートを論理的に理解するための練習」を積んでおくのがよい.