数学入門B 演習問題　(2013 年 10 月 11 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 1.1.

真理表を書いて, 命題 p, q に対する de Morgan の法則

$$\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

を示せ.

問題 1.2.

真理表を書いて, 命題 p, q に対して

$$(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

を示せ.

数学入門 B 演習問題　(2013 年 10 月 18 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 2.1.

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (-1,1)$, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ であるとは,

任意の正数 ε に対して, ある正数 δ が存在して, 任意の $x \in (-1,1)$ に対して

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ ならば } |f(x) - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.

(1) 論理記号 ($\forall$ や $\exists$) を用いて, 定義を記述せよ.

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ でないことを, 論理記号を使って記述せよ.

問題 2.2.

X, Y を集合, $f : X \to Y$ とする.

(1) f が全射であること, 単射であることを論理記号を用いて記述せよ.

(2) f が全射でないこと, 単射でないことを論理記号を用いて記述せよ.

数学入門B 演習問題　(2013年10月25日)

定義や定理, 証明を論理記号を用いて書き直す練習をしておくこと.

問題 3.1.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 吹田・新保の p.23 の (20) を参考にして, f が $[0,1]$ 上で連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.

(2) 吹田・新保の p.26 の (22) を参考にして, f が $[0,1]$ 上一様連続であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ.

(3) 吹田・新保の p.19 の定理 9 の証明を, 論理記号を用いて書き直してみよ.

(4) 吹田・新保の p.26 の定理 16 の証明を, 論理記号を用いて書き直してみよ.

注意.

吹田・新保の「$f(x)$ は I 上連続である」という書き方は, 実は**正しくない**. 正確には,「f は I 上連続である」が正しい. なぜかというと,「$f(x)$ は I 上連続である」は, そのまま読むと,「**関数の x での値** $f(x)$ は I 上で連続である」と読めてしまう (つまり, 関数が連続ではなくて, 値が連続となる) からである. ただし, 吹田・新保のように書かれる教科書はかなり多い.

問題 3.2.

$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\in\mathbb{R}^3$ が**線形独立**であるとは, どんな $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ に対しても, $c_1\vec{a_1}+c_2\vec{a_2}+c_3\vec{a_3}=0$ ならば, $c_1=c_2=c_3=0$ となることをいう.

(1) $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\in\mathbb{R}^3$ が**線形独立**であることの定義とその否定 (**線形従属**という) を, 論理記号を用いて表せ.

(2) 斎藤 p.99 [3.1] の命題とその証明を, $k=3$ の場合で論理記号を用いて書き直してみよ.

問題 3.3.

X,Y を集合, $f:X\to Y$ とする.

(1) f が全射であること, 単射であることを論理記号を用いて記述せよ.

(2) f が全射でないこと, 単射でないことを論理記号を用いて記述せよ.

(3) 講義ノート 定理 2.2 の証明を, 論理記号を用いて書き直してみよ.

問題 3.4.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ であることの定義とその否定を論理記号を用いて表せ.

(2) $\sup\limits_{n\to\infty}a_n=a$ であることの定義とその否定を論理記号を用いて表せ.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ が存在するならば, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_b)=a+b$ となることを示せ.

(4) 吹田・新保の p.11 の定理 5 の証明を, 論理記号を用いて書き直してみよ.

数学入門B 演習問題　(2013年11月8日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 4.1.

次の $\equiv$ は正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $12 \equiv 9 \pmod 5$

(2) $63 \equiv 39 \pmod 3$

以下

$$\mathbb{R}[X] := \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n : n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

と定める. $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して

$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} h \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f - g = (X^2+1)h$$

とおく.

問題 4.2.

次が正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $3X^2 + 2X + 1 \sim X^2 + 5X - 1$

(2) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

問題 4.3.

$\sim$ が反射律と推移律をみたすことを証明せよ.

数学入門B 演習問題　(2013 年 11 月 15 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 5.1.

$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 3$ に対して $C(0) = C(3)$ になることを集合の等号の定義にもとづいて示せ. すなわち, $C(0) \subset C(3)$ と $C(3) \subset C(0)$ を示せ.

問題 5.2.

次の各問いに答えよ.

(1) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 7$ に対して $C(2) \cap C(5) = \emptyset$ になることを示せ.
(2) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 4$ に対して $C(2 \cdot 2) = C(0)$ になることを示せ.

問題 5.3.

$\mathbb{R}[X]$ に対して, 問題 4.2 の同値関係 $\sim$ を考える. $a_1 + b_1X$, $a_2 + b_2X \in \mathbb{R}[X]$ に対して, $C((a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X)) = C(a + bX)$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ を求めよ.

数学入門B 演習問題　(2013 年 11 月 22 日)

学籍番号　　　　　名前

問題 6.1.

X を集合, $\sim$ を同値関係. $x \in X$ に対して, x を代表元とする同値類を $C(x)$ とかく. すなわち $C(x) := \{y \in Y : y \sim x\}$. このとき, $x, y \in X$ に対して, $C(x) \neq C(y)$ かつ $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ とすると, どのような矛盾がおこるか調べよ.

問題 6.2.

ϕ を $\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ への標準的射影とする. このとき, 次の集合を求めよ. ただし代表元はたかだか 1 次多項式とすること.

(1) $\phi(X^3 + X^2 + X + 1)$

(2) $\phi(3X^3 + 6X + 2)$

数学入門B 演習問題 (2013年11月29日)

学籍番号　　　　　　　名前

問題 7.1.

$C(a), C(b) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とする.

(1) $C(a), C(b)$ の和 $C(a) + C(b)$ を

$$C(a) + C(b) := C(a + b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $C(a), C(b)$ の積 $C(a) \cdot C(b)$ を

$$C(a) \cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $C(2) \cdot C(3) = C(0)$ を示せ.

数学入門B 演習問題　(2013 年 12 月 6 日)

学籍番号　　　　　　名前

問題 8.1.
$A := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とおくとき, $\#A = \#\mathbb{N}$ を示せ.

問題 8.2 (難)**.**
$f : [0,1] \to (0,1)$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ \dfrac{x}{2^2} & x = \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ x & x \neq 0, \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

と定めたときに, f が全単射となることを示せ. 従って, $\#[0,1] = \#(0,1)$ となる.

問題 8.1 の証明.
$f : \mathbb{N} \to A$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) := 2n-1$ と定義すれば, 全単射となる. 全射のみ示す. $\forall y \in A$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ が存在して, $y = 2n_0 + 1$ とできる. このとき, $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ であり,

$$f(n_0+1) = 2(n_0+1) - 1 = 2n_0 + 1 = y$$

となるので, f は全射である. $\square$

問題 8.2 の証明.
1. f が全射となることを示す. $\forall y \in (0,1)$ に対して, 場合分けをする.
<u>case 1</u> $y = \dfrac{1}{2}$ のときは, $x = 0$ とすると $y = \frac{1}{2} = f(x)$ となる.
<u>case 2</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ があるときは, $x = \dfrac{1}{2^{n-2}}$ とすると $n \geq 2$ より $n-2 \geq 0, n-2 \in \mathbb{N}_0$ だから $x \in [0,1]$ となり, $f(x) = \dfrac{x}{2^2} = \dfrac{1}{2^{n-2}}\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^n} = y$ となる.
<u>case 3</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ がないときは, $x = y$ とすると $f(x) = y$ となる.
以上により, f が全射となることがわかった. さらに,

$$f(x) = \frac{1}{2^m} \text{となる } m \in \mathbb{N} \text{ がある} \Leftrightarrow x = 0 \text{ または} x = \frac{1}{2^n} \text{となる } n \in \mathbb{N}_0 \text{がある}$$

がわかることに注意しておく.
2. f が単射になることを示す. $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$ に対して, $f(x_1) = f(x_2) =: y$ とする. y の値に応じて場合わけする.
<u>case 1</u> $y = \dfrac{1}{2}$ のとき, $x_1 = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}_0$ があるとすると $\frac{1}{2} = f(x_1) = \dfrac{1}{2^{n+2}}$ となり, $n+1 = 0$ となることから矛盾. 従って, $x_1 = 0$. 同様にして $x_2 = 0$ だから $x_1 = x_2$.
<u>case 2</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ があるとき, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ だから, $f(x_1) = f(x_2)$ より, $\dfrac{x_1}{2^2} = \dfrac{x_2}{2^2}$ となる. よって. $x_1 = x_2$.

<u>case 3</u> $y = \dfrac{1}{2^n}$ となる $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ がないときは, $x_1, x_2 \neq 0, \dfrac{1}{2^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ だから, $f(x_1) = f(x_2)$ から f の定義より $x_1 = x_2$.

よって, どの場合であっても $x_1 = x_2$ となったので, f は単射である. $\square$

注意.

問題 8.2 について, グラフを書いてみよ. 単射であるということは, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点がたかだか 1 点しかないということと同じである (各自考えてみよ. また, $g(x) = x^2$ の場合では, グラフと交わる点が 2 点になることがあることを確認してみよ). 問題 8.2 のグラフについて, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点はたかだか 1 点しかないことを確かめてみよ.

また, 全射であることは, (y 軸での) 値域を通る x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点があるということと同じである (各自考えてみよ. また, $g(x) = x^2$ の場合で, $y = -1$ を通る, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点がないことを確認してみよ). 問題 8.2 のグラフについて, $0 < y < 1$ について, x 軸に水平な直線をひいたときに, グラフと交わる点はたかだか 1 点しかないことを確かめてみよ.

注意.

問題 8.2 の証明はかなり難しい (というよりは複雑) ということがわかると思う. あとで, もう少しすっきりした証明を与える.

数学入門B 演習問題　(2013年12月13日)

学籍番号　　　　名前

問題 9.1.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．このとき $\#(a,b) = \#\mathbb{R}$ を示せ (ヒント: $f : (-1,1) \to (a,b)$ への全単射写像を作れ).

問題 9.2.

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする．このとき $\#[a,b] = \#\mathbb{R}$ を示せ (ヒント: 問題 9.1 と問題 8.2 を使う).

数学入門B 演習問題

問題 10.1 (有理数の構成)**.**

$m, m' \in \mathbb{Z}$, $n, n' \in \mathbb{N}$ が $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ ならば $mn' = m'n$ である．$mn' = m'n$ は整数の性質しか使っていないことに注意して，整数から有理数を構成してみよう．以下の問題では，**分数をおもてに出さずに考えよ．**

$(m,n), (m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して，

$$(m,n) \sim (m',n') \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} mn' = m'n$$

で定義する．

(1) $\sim$ が $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係となることを示せ (ヒント: 少し難しいのは推移律の証明．もし，$\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$, $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{m''}{n''}$ ならば**両辺に** n' **をかけることで，** $\dfrac{mn'}{n} = m' = \dfrac{m''n'}{n''}$ となることがわかる．このアイデアを推移律の証明にどう反映させればよいか考えてみよ)．

(2) $\overline{(m,n)}$ を $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の $\sim$ に関する同値類とする．このとき，$(m,n), (m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して足し算 $\overline{(m,n)} + \overline{(m',n')}$ と掛け算 $\overline{(m,n)} \cdot \overline{(m',n')}$ を

$$\overline{(m,n)} + \overline{(m',n')} := \overline{(mn'+m'n, nn')}, \quad \overline{(m,n)} \cdot \overline{(m',n')} := \overline{(mm', nn')}$$

で定義する．この足し算と掛け算の定義がそれぞれ well-defined であることを示せ．

以上により，$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$ に足し算と掛け算が定義できることがわかった．さらに頑張ると，この演算が結合法則や分配法則などをみたすことが示せる (少し面倒)．よって，$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$ と定義することができる．

問題 10.2.

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合，$GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする．このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \text{ある } P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ が存在して } A = P^{-1}BP$$

で定義する．なお，$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ となることと $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ となることは認めてよい．

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ．

(2) $[A]$ を $A \in M_n(\mathbb{R})$ の $\sim$ に関する同値類とする．このとき，$\mathrm{tr}([A]) := \mathrm{tr}(A)$ と定めると，この定義が well-defined であることを示せ．

(3) $\det([A]) := \det(A)$ と定めると，この定義が well-defined であることを示せ．

問題 10.3 (実数の構成)**.**
X を有理 Cauchy 列全体のなす集合とする．すなわち

$$X := \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \text{Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\ (\forall n \in \mathbb{N})\}$$

とおく．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ に対して,

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

と定義する．このとき, $\sim$ が X 上の同値関係となることを示せ (この問題は, 記号がごちゃごちゃしているだけで, 実はそんなに難しくない)．ただし, **有理 Cauchy 列が収束することを使ってはいけない.**

問題 10.4.
集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ.

(1) $\#A = \#A$
(2) $\#A = \#B$ ならば $\#B = \#A$
(3) $\#A = \#B$, $\#B = \#C$ ならば $\#A = \#C$

問題 10.5 (難, 例 2.4 も参照)**.**
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $(n, m) \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(n, m) := m + \frac{(n + m - 1)(n + m - 2)}{2}$$

で定義する．f が全単射になることを示せ.

- 全射の証明は, $l \in \mathbb{N}$ に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} k < l \leq \sum_{k=1}^{N} k$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる (これが何を意図しているのかは各自考えてみよ)．そして, $f\left(l - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} k, 1 - l + \sum_{k=1}^{N} k\right)$ を考えてみよ.
- 単射の証明は例えば, 対偶をとって, $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ ならば, $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$ を示す．$n_1 + m_1 = n_2 + m_2$ かそうでないかで場合わけしてみる.

問題 10.6.
次の各問いに答えよ.

(1) Bernstein の定理を使って, $\#[0, 1] = \#(0, 1)$ を示せ (ヒント: $f : (0, 1) \to [0, 1]$ を $x \in (0, 1)$ に対して, $f(x) := x$ とおく．次に $g : [0, 1] \to (0, 1)$ を $y \in [0, 1]$ に対して, $g(y) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ とおく．どちらも単射になっていることを示せ).
(2) $\#(0, 1] = \#(0, 1)$ を示せ.

問題 10.7.
集合 A, B, C, D に対して, $\#A \leq \#C$ かつ $\#B \leq \#D$ ならば $\#(A \times B) \leq \#(C \times D)$ を示せ (ヒント: $\#A \leq \#C$ かつ $\#B \leq \#D$ より, 単射 $f : A \to C$ と $g : B \to D$ が存在する. $F : A \times B \to C \times D$ を $(x, y) \in A \times B$ に対して $F(x, y) = (f(x), g(y))$ で定義してみよ).

数学入門B 演習問題

ここにあるのは, 今までの演習問題とその類題などをよせ集めたものである. 易しい問題と難しい問題をあまり区別せずに並べてある. まずはわかる問題とわからない問題を区別することからはじめてみよ. 次に, わからない問題に対して, まずはノートや参考書などをみながらでよいから, じっくり考えてみよ. その考えた時間は決して無駄にはならない. 残念ながら, 考えた時間と数学の理解度は比例してはくれない (と思われる) が, わからなくてもいいからとにかく考えることが, 数学の理解への一番の近道である. 答えをすぐ見てしまうと, その場ではうまくいくかもしれないが, それはテストの点がとれるというだけであって, 数学を理解したということにはならない場合が非常に多い.

問題 11.1.

命題 p, q, r に対して, 真理表を書いて, 次を示せ.

(1) (結合法則) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(2) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
(3) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(4) (分配法則) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(5) (de Morgan の法則) $\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$
(6) (対偶) $(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

問題 11.2.

命題 p, q, r に対して, 次を示せ. 真理表を用いる方法と, 結合法則や分配法則, de Morgan の法則を用いて, 同値をつなげて示す方法の両方で示してみよ.

(1) $((p \vee q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
(2) $((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$
(3) $(p \to (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
(4) $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

問題 11.3.

$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (-1, 1)$, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ であるとは,
$\varepsilon > 0$ を任意に取るとき, それに対応して $\delta > 0$ を定めて, 任意の $x \in (-1, 1)$ に対して

$$|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \text{ なるとき } |f(x) - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう (高木貞治「解析概論」より).

(1) 論理記号 ($\forall$ や $\exists$) を用いて, 定義を記述せよ.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ でないことを, 論理記号を使って記述せよ.

問題 11.4.

$r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $B_r(x_0) := (x_0 - r, x_0 + r)$ とおく. $U \subset \mathbb{R}$ が開集合であるとは

任意の $x \in U$ に対して, ある正の実数 r が存在して, $B_r(x) \subset U$ が成り立つ

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 開集合の定義を述べよ.
(2) $U \subset \mathbb{R}$ が開集合でないことを論理記号を用いて述べよ.

問題 11.5.

$F \subset \mathbb{R}$ が閉集合であるとは

$$\text{任意の } F \text{ での数列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ に対して, } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ ならば, } a \in F \text{ が成り立つ}$$

ことをいう.

(1) 論理記号を用いて, 閉集合の定義を述べよ.
(2) $F \subset \mathbb{R}$ が閉集合でないことを論理記号を用いて述べよ.

問題 11.6.

次の定義を述べよ.

(1) 集合 X と Y の濃度が等しい.
(2) 可算集合, 非可算集合.
(3) 集合 X と Y に対して, 集合 X の濃度が Y の濃度より小さい. すなわち $\#X \leq \#Y$.
(4) 集合 X に対する同値関係 $\sim$
(5) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と $x \in X$ に対して, x の同値類
(6) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ について X の $\sim$ による商集合
(7) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と商集合 $X/\sim$ に対して, X から $X/\sim$ への標準的射影 $\phi : X \to X/\sim$

問題 11.7.

次の集合の濃度が $\mathbb{N}$ と等しいことを定義にもとづいて示せ. ただし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である.

(1) $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (負の整数全体)
(2) $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ (奇数全体)
(3) $\{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (0 を含んだ偶数全体)
(4) $\{3n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$
(5) $\{5n + 3 : n \in \mathbb{N}_0\}$
(6) $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
(7) $\{3^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

問題 11.8.

次の集合は可算集合か否か (証明は必要ない)

(1) $\mathbb{Z}$
(2) $\mathbb{Q}$
(3) $\mathbb{R}$
(4) $\mathbb{C}$
(5) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(6) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
(7) $2^{\mathbb{N}}$
(8) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ($\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合)
(9) $\{A : A$ は整数を成分とする 3 次正方行列 $\} = M_3(\mathbb{Z})$
(10) $\mathbb{R}^3$
(11) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

問題 11.9.

素数 p として, $\mathbb{Z}_p$ について考える

(1) 次の $\equiv$ は正しいか正しくないか答えよ.

(1) $13 \equiv 5 \pmod 7$

(2) $39 \equiv 15 \pmod 3$

(3) $135 \equiv 357 \pmod 5$

(4) $2011 \equiv 2013 \pmod{11}$

(2) 同値類 $C(a), C(b)$ の和 $C(a)+C(b)$ を

$$C(a)+C(b) := C(a+b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $C(a), C(b)$ の積 $C(a)\cdot C(b)$ を

$$C(a)\cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 11.10.

$f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$f(X) \sim g(X) \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f(X)-g(X) \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める. $\overline{f(X)}$ を $f(X)$ の $\sim$ に関する同値類とする. すなわち

$$\overline{f(X)} := \{h(X) \in \mathbb{R}[X] : f(X)-h(X) \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる }\}$$

と定める.

(1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ.

(a) $3X^2+4X+1 \sim X^2+4X-1$

(b) $X^3+X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(c) $4X^2+2X+3 \sim X^2+2X+2$

(d) $X^3-X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(2) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)}+\overline{g(X)} := \overline{f(X)+g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)}\cdot\overline{g(X)} := \overline{f(X)g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 11.11 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = P^{-1}BP$$

で定義する.

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ.
(2) $A \sim B$ ならば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ を示せ.
(3) $A \sim B$ ならば $\det(A) = \det(B)$ を示せ.

問題 11.12.
微分積分学, 代数学幾何学のノートや教科書をみて, 定理や命題とその証明を証明を論理記号を用いて**自分の言葉**で書き直してみよ. これは, 論理記号の使い方の練習だけではなく, 微分積分学, 代数学幾何学のより深い理解につながる.

注意.
教科書の定義や定理では, 自明と思われるがために, 出てくる文字が任意なのか存在なのかが書かれていない場合がある (特に微分積分学の数列の収束ではこのことが顕著である). 論理記号を用いて書き直すときには, 出てくる文字が**任意なのか, 存在なのか**のどちらになるのかを意識しておくとよい. とりわけ, 数学入門 CD で勉強する距離空間, 位相空間では, 直感で考えると全然正しくないと思えることが正しかったりする (例えば, 「連続関数が定数関数しかない」や「すべての関数が連続」が導ける設定がある). これらを理解するためには, 論理だけで頑張らないといけないので, 今のうちから「教科書やノートを論理的に理解するための練習」を積んでおくのがよい.