

## 数学入門 B 定期試験問題

2014年1月31日 第4時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。  
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること。

全問について答えよ。「答えのみでよい」と書かれていない問題については, 証明をつけること。

### 問題 1.

次の各問いに答えよ。

- (1) 命題  $p, q, r$  に対して, 真理表を用いて次を示せ。

$$((p \vee q) \rightarrow r) \iff (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

- (2)  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$  が線形独立であるとは, どんな  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  に対しても,  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$  ならば,  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  となることをいう。  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$  が線形独立であることの定義とその否定を, 論理記号を用いて表せ (答えのみでよい)。

### 問題 2.

$\mathbb{R}[X]$  を  $X$  を変数とする実係数多項式全体のなす集合とする。  $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$  に対して,

$$f(X) \sim g(X) \stackrel{\text{定義}}{\iff} f(X) - g(X) \text{ が } (X^2 + 1) \text{ で割り切れる}$$

と定める。  $\overline{f(X)}$  を  $f(X)$  を代表元とする  $\sim$  に関する同値類とする。次の問いに答えよ。

- (1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ (答えのみでよい)。  
(a)  $3X^2 + 4X + 1 \sim X^2 + 4X - 2$   
(b)  $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X + 1$   
(2)  $\sim$  が同値関係であることの定義を述べよ (答えのみでよい)。  
(3) 任意の  $f(X), g(X), h(X) \in \mathbb{R}[X]$  に対して,  $f(X) \sim g(X), g(X) \sim h(X)$  ならば  $f(X) \sim h(X)$  を示せ。  
(4) 同値類  $\overline{f(X)}$  の定義を述べよ (答えのみでよい)。  
(5)  $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$  に対して,

$$\overline{f(X)} \cdot \overline{g(X)} := \overline{f(X)g(X)}$$

と定義する。この定義が well-defined であることを示せ。

### 問題 3.

$X, Y$  を集合とする. 次の各問いに答えよ.

- (1)  $X$  と  $Y$  の濃度が等しいことの定義を述べよ (答えのみでよい).
- (2) 次の集合がたかだか可算集合となるかどうか答えよ (答えのみでよい).
  - (a)  $\mathbb{Q}$ .
  - (b)  $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ .
  - (c)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - (d)  $M_3(\mathbb{Z}) := \{A : A \text{ は整数値 3 次行列}\}$
- (3) 集合の濃度に関する Bernstein の定理を述べよ (答えのみでよい).
- (4)  $A$  を 2 の正整数巾乗全体, すなわち

$$A := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$$

とする. 定義に基づいて  $\#A = \#\mathbb{N}$  を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.