1. 無限個の集合

2014 年 10 月 21 日 (火) 演習問題

問題 2.2, 問題 2.3

(1) 「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $1 < x < 1 + \dfrac{1}{n}$ が成り立つ」となるときに $n \to \infty$ としてはいけない. ある $n \in \mathbb{N}$ でしか成り立っていることがわからないことに注意すること.

(2) 「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $1 < x < 1 + \dfrac{1}{n}$ が成り立つ」となるときに $n = 1$ としてはいけない. $n = 1$ で成り立つかどうかはわからないことに注意すること.

(3) $1 - x \geq 0$ が成り立つときに「$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t $\dfrac{1}{N} < 1 - x$ が成り立つ (Archimedes の原理)」としてはいけない. $1 - x = 0$ のときに, $\dfrac{1}{N} < 1 - x$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ は存在しない. $1 - x > 0$ と $1 - x \geq 0$ はこの問題においては重要な違いをもっていることに注意すること.

2014 年 10 月 28 日 (火) 演習問題

問題 3.2, 問題 3.3, 問題 3.4

これらの問題は, 前期の数学入門 A で似たことを取り扱っているはずである. 無限個であることに注意して, 修正をしつつ証明を書いてみよ.

2. 同値関係と商集合

2014 年 11 月 4 日 (火) 演習問題

問題 4.1, 問題 4.2

"$\equiv$" が正しいか正しくないかを判断するとき, 示すべきことは,「$k \in \mathbb{Z}$ が存在して○○」ということであるから, $k \in \mathbb{Z}$ の存在を仮定してはいけない. **存在を示すためには, $k \in \mathbb{Z}$ を 1 つ具体的な値で与える必要がある**. だから, 「**$k := 8$ とおくと**」のように, 代入する文字をどのように与えるかがわかるように書く必要がある.

問題 4.3

反射律で示すべきことは, $\forall f(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して $f(X) - f(X) = (X^2 + 1)h(X)$ となる $h(X) \in \mathbb{R}[X]$) が存在することである. $h(X) \in \mathbb{R}[X]$ の存在を示すのだから, $h(X)$ を問題 4.1 や問題 4.2 のように与える必要がある.

推移律で示すべきことは, $\forall f(X), g(X), h(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して $f(X) \sim g(X)$ かつ $g(X) \sim h(X)$ ならば $f(X) \sim h(X)$ が成り立つことである. 仮定されていることは「$f(X) \sim g(X)$ かつ $g(X) \sim h(X)$」だから, 「$f(X) - g(X) = (X^2 + 1)q_1(X)$, $g(X) - h(X) = (X^2 + 1)q_2(X)$ となる $q_1(X)$, $q_2(X) \in \mathbb{R}[X]$ が存在する」が成り立っている. $q_1(X)$, $q_2(X)$ を用いて $f(X) - h(X)$ がどうなるかを考えよ.

問題 4.4

$A \sim B$ を仮定するとき, $A = P^{-1}BP$ だけを書いても, P が何かがわからない. P はどのような性質をもつか (どの集合の元か？任意か存在か？など) を $\sim$ の定義に従って書かないといけない.

問題 4.5

分数を使わずに, 整数の範囲で考えること. 割り算で余りがでるときは余りがあるかないかを述べること.

本問題に限らず, どのような制限のもとで (つまり, どの集合の上で) 計算をしなければいけないかを考えることは, 非常に重要である．例えば,「割り算は余りをもちいて書かなければいけない」や「かけ算は交換してはいけない」などの性質を常に気にかけながら計算することが必要になる.

2014 年 11 月 11 日 (火) 演習問題

とても気になる (そして心配な) 間違いが

「A を示せ」と問われているのに,「A を仮定すると...」と議論している解答が多い

ということである．問題 5.1(2) では $C(2 \times 2) = C(0)$ を示せと問われているのだから,「$C(2 \times 2) = C(0)$ を仮定すると...」として議論を進めても, 正しい答えになることは普通はありえない．「何を示せばよいのか？」を考えて, 整理してから解答を書くこと．何を仮定して, 何を示さないといけないか？を考えることは, 実際に自分で考えなければ身につかない．時間をかけて考える必要がある．**問題に対して解き方を覚える勉強では, このような思考力は身につかないことを肝に命じて欲しい.**

2014 年 11 月 18 日 (火) 演習問題

問題 6.1

$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ を仮定すると, $C(x)$ と $C(y)$ の共通部分が空集合ではないので, $C(x) \cap C(y)$ の元を一つ選ぶことができる．この元について, 何がわかるか考察せよ.

問題 6.2

標準的射影 $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ の定義が何かを考えよ．その上で, 定理 5.1 によって, 代表元として, 簡単なものを選べばよいことに注意せよ.

$\mathbb{R}[X]/(X^2+1) = C(f(X))$ は正しくない．この等号の左辺は, 同値類を元とする集合 (族) であり, $C(f(X))$ は $f(X)$ の同値類である．同じように, $C(X^3+X^2+X+1) = X^3+X^2+X+1$ の等号も正しくない．左辺は同値類だから「多項式を元とする集合」であるのに対して, 右辺は「多項式そのもの」だからである．**左辺と右辺の種類が違うのなら, 通常は等号になることは有り得ない.** 文字一つ一つがどの世界に属しているか？をきちんと考えるくせをつけること.

問題 6.3

全射の定義を, この問題で書いてみよ．存在を示すのだから, 何をしなければいけないのかを考えよ.

2014 年 11 月 25 日 (火) 演習問題

問題 7.1

well-defined で重要なことは, **何を示せばよいか**がわかっているか否か？である．まず, **何を示せばよいか**を明らかにしてみよ.

問題 7.2

$\overline{f(X)}$ は集合 (同値類), $f(X)$ は関数だから $\overline{f(X)} = f(X)$ は成り立たない．また, 一変数の多項式を考えているのだから, 別の変数 X' を使うことはない．例えば, X 変数の二つの多項式とは $aX+b$ と $cX+d$ のように係数が違うはずである.

well-defined に関する注意

- well-defined の証明において, 何の定義が well-defined であるのか、主語を明確にすること．「目標が示せたので, well-defined である」というだけでは**何が** well-defined なのかがわからない.

- 考える問題によって, 関係 “$\sim$” の定義が異なるので, 問題に応じて, “$\sim$” の定義をその都度確認すること.
- well-defined の証明は, 和と積の定義を示すのではない. そもそも, **定義を証明することはできない.** だから, 「$C(a)+C(b) := C(a+b)$ が成り立つ」は意味が通らない.
- $C(2) = 20$, $C(3) = 21$ は正しくない. それぞれ左辺は集合, 右辺は数だから, これらが等しくはならない.

3. 集合の濃度

2014 年 12 月 2 日 (火) 演習問題

問題 8.1

$f : \mathbb{N} \to A$ を $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $f(n) := 2n+1$ で定義すると, f は単射であるが全射ではない. 実際, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7, \ldots$ となるので, 値域として, 1 に対応する定義域の元がないことがわかる. 集合 $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ と集合 $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ （つまり, 集合 $\mathbb{N}$ と集合 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ）の違いは何か考えよ.

また, $\#A = \infty, \#\mathbb{N} = \infty$ という書き方はしない. 濃度が等しいとはどういうことだったかを考えよ.

問題 8.2

全射と単射はどのような性質であったかを考えること. 数学入門 A の定期試験の問題 2. (3) を見直してみよ.

2014 年 12 月 9 日 (火) 演習問題

- 問題 9.1(1) について、$f(x) := x$ だけ書いても写像 f を定義したことにはならない. 写像を定義するには, f の定義域, 値域も書かなければいけない. また, f の定義域, 値域だけを書いても駄目で, 定義域の元 x に対して $f(x)$ がどのように対応するかも書かなければいけない. 写像を定義するには, **定義域, 値域, 写像の対応** $f(x) := \cdots$ の三つを与えないといけない.
- 恒等写像とは何か？はきちんと書くこと (講義では扱っていない). **インターネットなどで証明やヒント, アイデアが書かれている場合はよくあるが, それをそのまま考察せずにレポート等に記載しては絶対にいけない.** インターネットなどで得られたヒントをもとにして, 自分で考察して証明を考えなければならない.
- $\#A = \#B$ の仮定から「$f : A \to B$ とすると, f は全単射となる」は成り立たない. $\#A = \#B$ の定義とどう違うのか考察せよ.
- 「$\#A = \#B$ が全単射」は意味がない. 全単射は写像に対して判断するものであり, 等号について定めるものではないからである. 主語, 述語, 目的語の関係を意識するとよい.