

10.1 (2) $\#X \leq \#Y, \#Y \leq \#Z \Rightarrow \#X \leq \#Z$.

<仮定できること>

$$\#X \leq \#Y, \#Y \leq \#Z.$$

<示すこと>

$$\#X \leq \#Z. \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \text{定義} \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists \text{単射 } h: X \rightarrow Z. \\ \uparrow \end{array}$$

「存在を示す」は証明ということ。

証明

1. $\#X \leq \#Y$ より \exists 単射 $f: X \rightarrow Y$,
 $\#Y \leq \#Z$ より \exists 単射 $g: Y \rightarrow Z$

が成り立つ。このとき、 $h := g \circ f: X \rightarrow Z$ とおくと
 h が単射 となることを示す。

2. $\forall x_1, x_2 \in X$ 1-文字列 $h(x_1) = h(x_2)$ を
仮定すると、 $h = g \circ f$ より

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

となる。 g は単射 により

$$f(x_1) = f(x_2)$$

となる。 f は単射 により

$$x_1 = x_2$$

となる。 従って、 h は単射 となる。

3. 単射 $h: X \rightarrow Z$
が 存在 することを示せば、

$\#X \leq \#Z$ が

成り立つ

□