# 数学入門B 定期試験問題

2015 年 1 月 29 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

**注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.**
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

全問について答えよ. 「答えのみでよい」と書かれていない問題については, 証明をつけること.

**問題 1.**

集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を答えよ (答えのみでよい).

(2) $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を答えよ (答えのみでよい).

(3) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = (0,1]$ を証明せよ.

(4) 空でない集合 $X, Y$, 写像 $f: X \to Y$, 集合族 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ に対して,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

を示せ.

**問題 2.**

集合 $X$ に対して, $X$ の濃度を $\#X$ で表す. 次の各問いに答えよ.

(1) 集合 $A$, $B$ に対して, $\#A = \#B$ の定義を述べよ (答えのみでよい).

(2) 集合 $A$, $B$ に対して, $\#A \leq \#B$ の定義を述べよ (答えのみでよい).

(3) 可算集合と非可算集合の例をそれぞれ 2 つ述べよ (答えのみでよい).

(4) $A := \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$ とおく. このとき, $\#\mathbb{N} = \#A$ を示せ.

(5) $\#\mathbb{Q} \leq \#\mathbb{R}$ を示せ.

**問題 3.**

$\mathbb{R}[X]$ を $X$ を変数とする 1 変数実数多項式全体からなる集合とする. $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して

$$f(X) \sim g(X) \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \text{ある}\, q(X) \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f(X)-g(X) = (X-1)q(X)$$

で定義する.

(1) 次が正しいか正しくないかを答えよ (答えのみでよい).

(a) $3X^2 + 4X + 1 \sim X^2 + 4X - 1$

(b) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim 2X^3 - X^2 + 4X - 1$

(2) $\sim$ が $\mathbb{R}[X]$ 上の同値関係であることの定義を述べよ (答えのみでよい).

(3) $\overline{f(X)}$ を $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ を代表元とする $\sim$ に関する同値類とするとき, 同値類 $\overline{f(X)}$ の定義を述べよ (答えのみでよい).

(4) $\mathbb{R}[X]/(X-1)$ を $\mathbb{R}[X]$ の同値関係 $\sim$ による商集合とするとき, 商集合 $\mathbb{R}[X]/(X-1)$ の定義を述べよ (答えのみでよい).

(5) $\overline{f(X)}, \overline{g(X)} \in \mathbb{R}[X]/(X-1)$ に対して, 和 $\overline{f(X)} + \overline{g(X)}$ を

$$\overline{f(X)} + \overline{g(X)} := \overline{f(X) + g(X)}$$

で定義するとき, この定義が well-defined であることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

## 略解

**問題 1.** (1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x : \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_n\}$

(2) $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n := \left\{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } f(n) \in A_n \right\}$

**問題 2.** (1) 全単射 $f : A \to B$ が存在する.

(2) 単射 $f : A \to B$ が存在する.

(3) 可算集合の例: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

非可算集合の例: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $2^{\mathbb{N}}$

**問題 3.** (1) (a) 正しくない (b) 正しい

(2) (反射律) $\forall f(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して $f(X) \sim f(X)$

(対称律) $\forall f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して $f(X) \sim g(X)$ ならば $g(X) \sim f(X)$

(推移律) $\forall f(X), g(X), h(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して $f(X) \sim g(X)$, $g(X) \sim h(X)$ ならば $f(X) \sim h(X)$

(3) $\overline{f(X)} := \{g(X) \in \mathbb{R}[X] : f(X) \sim g(X)\}$

(4) $\mathbb{R}[X]/(X-1) := \{\overline{f(X)} : f(X) \in \mathbb{R}[X]\}$

1(3) 1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1+\frac{1}{n}) \subset (0.1]$ を示す.

${}^{\forall}x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0. 1+\frac{1}{n})$ に対し. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ について $x \in (0. 1+\frac{1}{n})$

より) $0 < x < 1+\frac{1}{n}$ となる. ($n$は任意より)) $n \to \infty$ と

すると $0 < x \leq 1$ となるので $x \in (0.1]$ となる.

2. $(0.1] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$ を示す.

${}^{\forall}x \in (0.1]$ に対し. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ について $1 < 1+\frac{1}{n}$

だから $0 < x \leq 1 < 1+\frac{1}{n}$ となる. 従って

$x \in (0, 1+\frac{1}{n})$ となるので $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$

となる. □

(4) 1. $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ を示す.

${}^{\forall}x \in f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ に対し $f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ だから

ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $f(x) \in B_n$ となる. よって

$x \in f^{-1}(B_n)$ となるから $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ となる.

2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \subset f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ を示す.

${}^{\forall}x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$ に対し ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して.

$x \in f^{-1}(B_n)$ となる. よって $f(x) \in B_n$ となるから

$f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ となる. 従って $x \in f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ となる. □

[2] (4) 全単射 $f: \mathbb{N} \to A$ が存在することを示す. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n) := 1-n$ と定める.

1. $f$ が単射となることを示す. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対し $f(n) = f(m)$ を仮定すると. $1-n = 1-m$ より $n = m$ がわかる. よって $f$ は単射である.

2. $f$ が全射となることを示す. $\forall y \in A$ に対し $n := 1-y$ とおくと. $y \leq 0$ かつ $y \in \mathbb{Z}$ から $n \in \mathbb{N}$ となる. また $f(n) = f(1-y) = 1-(1-y) = y$ となるので $f$ は全射となる.

□

(5) 単射 $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在することを示す. $\forall x \in \mathbb{Q}$ に対し $g(x) := x$ と定める. $g$ が単射であることを示す.
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ に対し $g(x_1) = g(x_2)$ を仮定すると.
$x_1 = x_2$ となるので $g$ は単射である. □

[3] (5) 示すべきことは $\forall \overline{f(x)}, \overline{f'(x)}, \overline{g(x)}, \overline{g'(x)} \in \mathbb{R}[x]/(x-1)$ に対して. $\overline{f(x)} = \overline{f'(x)}$, $\overline{g(x)} = \overline{g'(x)}$ を仮定すると $\overline{f(x)+g(x)} = \overline{f'(x)+g'(x)}$ となることである.

$\overline{f(x)} = \overline{f'(x)}$ より $f(x) \sim f'(x)$ となるから $g_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在して
$f(x) - f'(x) = (x-1)g_1(x)$ とかける.
$\overline{g(x)} = \overline{g'(x)}$ より $g(x) \sim g'(x)$ となるから $g_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在して
$g(x) - g'(x) = (x-1)g_2(x)$ とかける. 従って

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x)) - (f'(x)+g'(x)) &= (f(x)-f'(x)) + (g(x)-g'(x)) \\ &= (x-1)(g_1(x)+g_2(x))\end{aligned}$$

となり $g_1(x)+g_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ だから. $f(x)+g(x) \sim f'(x)+g'(x)$ となる. よって $\overline{f(x)+g(x)} = \overline{f'(x)+g'(x)}$ が成り立つ

□