数学入門B 演習問題 (2014 年 10 月 7 日)

問題 1.1 (提出問題)**.**

$X = \{1, 2, 3\}$ のときに, 2^X を具体的に求めよ (空集合と全体を忘れないように). 元の個数はいくつか？

問題 1.2 (提出問題)**.**

$A := \{1, \{2, 3\}, 4, \{5, \{6, 7\}, 8\}, \{9\}, 0\}$ とおく. 自分の学生番号の十の位を a, 一の位を b としたときに, 次が成り立つか否かを答えよ (答えのみでよい).

(1) $\{a\} \in A$
(2) $\{a\} \subset A$
(3) $\{4, a, b\} \in A$
(4) $\{a, b\} \subset A$

数学入門B 演習問題 (2014 年 10 月 21 日)

問題 2.1 (提出問題)**.**
Λ を添字集合としたとき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の定義は何か？

問題 2.2.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left(0, 1+\dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求め, その等号が成り立つことの証明を与えよ ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 2.3.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \left[0, 2-\dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ を求め, その等号が成り立つことの証明を与えよ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

注意.
問題 2.2, 2.3 の類題は試験で 1 問以上必ず出題する.

注意 (問題 2.2, 2.3 に対するコメント)**.**
間違いが非常に多かった. もう一度考え直して, それぞれの議論がどのようにつながっているかを意識すること.

(1) 「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $1 < x < 1+\dfrac{1}{n}$ が成り立つ」となるときに $n \to \infty$ としてはいけない. ある $n \in \mathbb{N}$ でしか成り立っていることがわからないことに注意すること.

(2) 「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $1 < x < 1+\dfrac{1}{n}$ が成り立つ」となるときに $n = 1$ としてはいけない. $n = 1$ で成り立つかどうかはわからないことに注意すること.

(3) $1 - x \geq 0$ が成り立つときに「$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t $\dfrac{1}{N} < 1 - x$ が成り立つ (Archimedes の原理)」としてはいけない. $1 - x = 0$ のときに, $\dfrac{1}{N} < 1 - x$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ は存在しない. $1 - x > 0$ と $1 - x \geq 0$ はこの問題においては重要な違いをもっていることに注意すること.

数学入門B 演習問題　(2014年10月28日)

問題 3.1 (提出問題)**.**
Λ を添字集合としたとき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 直積集合 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の定義は何か？

問題 3.2.
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap B), \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cup B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cup B)$$

を示せ.

問題 3.3.
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c, \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

を示せ.

問題 3.4 (写像と集合の演算)**.**
X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $\displaystyle f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n);$

(2) $\displaystyle f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n);$

(3) $\displaystyle f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n);$

(4) $\displaystyle f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n);$

数学入門B 演習問題　(2014年11月4日)

問題 4.1 (提出問題)**.**
次の $\equiv$ は正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $12 \equiv 9 \pmod 5$
(2) $63 \equiv 39 \pmod 3$

以下
$$\mathbb{R}[X] := \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n : n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$
と定める. $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して
$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} h \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f - g = (X^2+1)h$$
とおく.

問題 4.2 (提出問題)**.**
次が正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $3X^2 + 2X + 1 \sim X^2 + 5X - 1$
(2) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

問題 4.3.
$\sim$ が反射律と推移律をみたすことを証明せよ.

問題 4.4 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**
$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して
$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = P^{-1}BP$$
で定義する.

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ.
(2) $A \sim B$ ならば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ を示せ.
(3) $A \sim B$ ならば $\det(A) = \det(B)$ を示せ.

問題 4.5.
$p \in \mathbb{N}$ を素数とし, $x, y \in \mathbb{N}$ に対して[1], $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = kp$ が成り立つと仮定する. このときに, x と y を p で割った余りが等しいことを示せ (ヒント: x を p で割った商を q_1, 余りを r_1 と書くと, $x = q_1 p + r_1$ かつ $0 \le r_1 < p$ が成り立つ. 同様のことを y についても考えてみよ.).

[1] $x, y \in \mathbb{Z}$ で考えても, 本質的な違いはない.

数学入門B 演習問題　(2014 年 11 月 11 日)

問題 5.1 (提出問題)**.**
次の各問いに答えよ. なお, 講義ノートの定理 5.1 を用いてよい.

(1) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 7$ に対して $C(2) \cap C(5) = \emptyset$ になることを示せ.
(2) $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 4$ に対して $C(2 \times 2) = C(0)$ になることを示せ.

問題 5.2 (提出問題)**.**
$\mathbb{R}[X]$ に対して, 問題 4.2 の同値関係 $\sim$ を考える. $a_1 + b_1X, a_2 + b_2X \in \mathbb{R}[X]$ に対して, $C((a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X)) = C(a + bX)$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ を求めよ[2].

問題 5.3.
$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod 3$ に対して $C(0) = C(3)$ になることを集合の等号の定義にもとづいて示せ. すなわち, $C(0) \subset C(3)$ と $C(3) \subset C(0)$ を示せ.

---
[2] この問題には隠れた意図があるので, 考えてみよ.

数学入門B 演習問題　(2014年11月18日)

問題 6.1 (提出問題)**.**
X を集合, $\sim$ を同値関係. $x \in X$ に対して, x を代表元とする同値類を $C(x)$ とかく. すなわち $C(x) := \{y \in X : y \sim x\}$. このとき, $x, y \in X$ に対して, $C(x) \neq C(y)$ かつ $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ とすると, どのような矛盾がおこるか調べよ.

問題 6.2 (提出問題)**.**
ϕ を $\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ への標準的射影とする. このとき, 次の集合を求めよ. ただし代表元はたかだか1次多項式とすること.

(1) $\phi(X^3 + X^2 + X + 1)$
(2) $\phi(3X^3 + 6X + 2)$

問題 6.3.
X を集合, $\sim$ を同値関係とするとき, 自然な射影 $\phi : X \to X/\!\sim$ は全射になることを示せ.

数学入門 B 演習問題 (2014 年 11 月 25 日)

問題 7.1 (提出問題)**.**

$C(a), C(b) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とする.

(1) $C(a), C(b)$ の和 $C(a)+C(b)$ を

$$C(a)+C(b) := C(a+b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $C(a), C(b)$ の積 $C(a)\cdot C(b)$ を

$$C(a)\cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $C(2)\cdot C(3) = C(0)$ を示せ.

問題 7.2.

$f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$f(X) \sim g(X) \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f(X)-g(X) \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める. $\overline{f(X)}$ を $f(X)$ の $\sim$ に関する同値類とする. すなわち

$$\overline{f(X)} := \{h(X) \in \mathbb{R}[X] : f(X)-h(X) \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる }\}$$

と定める.

(1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ.

(a) $3X^2+4X+1 \sim X^2+4X-1$

(b) $X^3+X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(c) $4X^2+2X+3 \sim X^2+2X+2$

(d) $X^3-X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(2) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)}+\overline{g(X)} := \overline{f(X)+g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)}\cdot\overline{g(X)} := \overline{f(X)g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 7.3 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. 問題 4.4 の同値関係 $\sim$ と $A \in M_n(\mathbb{R})$ について, $[A]$ で A を代表元とする $\sim$ の同値類とする.

(1) $\mathrm{tr}([A]) := \mathrm{tr}(A)$ と定義すると, この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $\det([A]) := \det(A)$ と定義すると, この定義が well-defined であることを示せ.

数学入門B 演習問題　(2014年12月2日)

問題 8.1 (提出問題)**.**
$A := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とおくとき, 定義に従って, $\#A = \#\mathbb{N}$ を示せ.

問題 8.2 (提出問題)**.**
$a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ をみたすとする. このとき, 定義に従って, $\#(a,b) = \#(0,1)$, $\#[a,b] = \#[0,1]$ を示せ (ヒント: 一次関数を考える).

問題 8.3.
$f : [0,1] \to (0,1)$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ \dfrac{x}{2^2} & x = \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ x & x \neq 0, \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

と定めたときに, f が全単射となることを示せ. 従って, $\#[0,1] = \#(0,1)$ となる.

数学入門B 演習問題　(2014 年 12 月 9 日)

問題 9.1 (提出問題)**.**

集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを証明せよ.

(1) $\#A = \#A$;

(2) $\#A = \#B$ ならば $\#B = \#A$;

(3) $\#A = \#B$, $\#B = \#C$ ならば $\#A = \#C$.

問題 9.2.

次の集合はたかだか可算集合か否か答えよ.

(1) $\mathbb{Z}$

(2) $\mathbb{Q}$

(3) $\mathbb{R}$

(4) $\mathbb{C}$

(5) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(6) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$

(7) $2^{\mathbb{N}}$

(8) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ($\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合)

(9) $\{A : A$ は整数を成分とする 3 次正方行列 $\} = M_3(\mathbb{Z})$

(10) $\mathbb{R}^3$

(11) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

数学入門B 演習問題　(2014年12月16日)

問題 10.1 (提出問題)**.**
X, Y, Z を集合とする. 次を示せ.

(1) $\#X \leq \#X$,
(2) $\#X \leq \#Y$ かつ $\#Y \leq \#Z$ ならば $\#X \leq \#Z$.

問題 10.2.
Bernstein の定理を用いて, $\#[0,1] = \#(0,1)$, $\#[0,1) = \#(0,1)$ を示せ.

問題 10.3.
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して

$$f(n,m) := m + \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} = m + \sum_{k=1}^{n+m-2} k$$

と定めると, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が全単射になることを証明せよ.

数学入門 B 演習問題　(2014 年–2015 年)

本問題は試験問題をやや (かなり？) 難しくしたものである．この程度の問題を，**説明できるように**努力すれば，試験に合格できるはずである．ただ，答えを覚えるだけで合格するような問題にはしないつもりなので，解き方などを説明できるようになるまで勉強すること．また，数学入門 B の過去問題等は web ページに公開されているので，各自で勉強すること．

以下，a, b はそれぞれ学生番号の十の位，一の位とする．

問題 1 (提出問題)**.**

集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} A_\lambda$ の定義を答えよ (答えのみでよい)．

(2) $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} A_\lambda$ の定義を答えよ (答えのみでよい)．

(3) $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathbb{R}} A_\lambda$ の定義を答えよ (答えのみでよい)．

(4) X, Y を空でない集合，$f : X \to Y$ を写像，$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき，

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

を示せ．

(5) 次の条件をみたす $\mathbb{R}$ 上の集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^{\mathbb{R}}$ を一つ求め，その性質をみたすことを示せ．

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，A_n は有界な開区間;
- $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} A_\lambda = (-b-1, a+1)$ となる．

問題 2 (提出問題)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合，$GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする．このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\iff} \text{ある } P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ が存在して } A = P^{-1}BP$$

で定義する．なお，$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ となることは認めてよい．

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ．

(2) $[A]$ を $A \in M_n(\mathbb{R})$ の $\sim$ に関する同値類とするとき，同値類 $[A]$ の定義を述べよ (答えのみでよい)．

(3) $\mathrm{tr}([A]) := \mathrm{tr}(A)$ と定めると，この定義が well-defined であることを示せ．

(4) 次が正しいか正しくないかについて答えよ (答えのみでよい)．

(a) $\begin{pmatrix} b & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -7 & a & -8 \\ 10 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -8 & b \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

問題 3 (提出問題)**.**

X, Y を集合とする. 次の各問いに答えよ.

(1) 次の集合がたかだか可算集合となるかどうか答えよ (答えのみでよい).

  (a) $2^{\mathbb{N}}$.

  (b) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(2) Bernstein の定理を用いて $\mathbb{Q}$ が可算集合であることを示せ. ただし, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ が可算集合であることは認めてよい.

(3) 濃度の定義に基づいて, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の濃度が等しいことを示せ.

問題 4 (提出問題)**.**

次の各問いに答えよ. なお, 同値類の記号は講義ノートで用いたものとする.

(1) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の等号として, 次が成り立つか答えよ.

  (a) $C(a) = C(b)$

  (b) $C(10a) = C(-5)$

  (c) $C(a+5b) = C(13)$

  (d) $C(3a-2b) = C(5ab)$

(2) $\mathbb{R}[X]/(X^2+3)$ の等号として, 次が成り立つか答えよ.

  (a) $(a+5X+6X^2) = C(0)$

  (b) $C(X^a + X^b) = C(X+3)$

  (c) $C(X^5 + abX) = C(aX+b)$

  (d) $C(X^4+3X^2+1) = C(5ab)$

(3) $[0,1]$ と $[-a, b+2]$ の濃度が等しいことを証明せよ.

数学入門B 演習問題　(2014 年–2015 年)

ここにあるのは, 今までの演習問題とその類題などをよせ集めたものである. 易しい問題と難しい問題をあまり区別せずに並べてある. まずはわかる問題とわからない問題を区別することからはじめてみよ. 次に, わからない問題に対して, まずはノートや参考書などをみながらでよいから, じっくり考えてみよ. その考えた時間は決して無駄にはならない. 残念ながら, 考えた時間と数学の理解度は比例してはくれない (と思われる) が, わからなくてもいいからとにかく考えることが, 数学の理解への一番の近道である. 答えをすぐ見てしまうと, その場ではうまくいくかもしれないが, それはテストの点がとれるというだけであって, 数学を理解したということにはならない場合が非常に多い.

問題 11.1.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left(0, 1 + \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$ を示せ. ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 11.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0,2)$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0,1]$ を示せ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

問題 11.3 (少し難しい)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $C_n = \left[1 - n, \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ をを求めよ. よ).

問題 11.4.

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B), \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B)$$

を示せ.

問題 11.5.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $f\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(2) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(3) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n);$

問題 11.6.

次の定義を述べよ.

(1) 集合 X と Y の濃度が等しい.
(2) 可算集合, 非可算集合.
(3) 集合 X と Y に対して, 集合 X の濃度が Y の濃度より小さい. すなわち $\#X \leq \#Y$.
(4) 集合 X に対する同値関係 $\sim$
(5) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と $x \in X$ に対して, x の同値類
(6) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ について X の $\sim$ による商集合
(7) 集合 X とその集合で定義された同値関係 $\sim$ と商集合 $X/{\sim}$ に対して, X から $X/{\sim}$ への標準的射影 $\phi : X \to X/{\sim}$

問題 11.7.

次の集合の濃度が $\mathbb{N}$ と等しいことを定義にもとづいて示せ. ただし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である.

(1) $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (負の整数全体)
(2) $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ (奇数全体)
(3) $\{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (0 を含んだ偶数全体)
(4) $\{3n-1 : n \in \mathbb{N}\}$
(5) $\{5n+3 : n \in \mathbb{N}_0\}$
(6) $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
(7) $\{3^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

問題 11.8.

次の集合は可算集合か否か (証明は必要ない)

(1) $\mathbb{Z}$
(2) $\mathbb{Q}$
(3) $\mathbb{R}$
(4) $\mathbb{C}$
(5) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(6) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
(7) $2^{\mathbb{N}}$
(8) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ($\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合)
(9) $\{A : A$ は整数を成分とする 3 次正方行列 $\} = M_3(\mathbb{Z})$
(10) $\mathbb{R}^3$
(11) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

問題 11.9.

素数 p として, $\mathbb{Z}_p$ について考える

(1) 次の $\equiv$ は正しいか正しくないか答えよ.
   (1) $13 \equiv 5 \pmod 7$
   (2) $39 \equiv 15 \pmod 3$

(3) $135 \equiv 357 \pmod 5$

(4) $2011 \equiv 2013 \pmod{11}$

(2) 同値類 $C(a), C(b)$ の和 $C(a)+C(b)$ を

$$C(a)+C(b) := C(a+b)$$

により定義する．この定義が well-defined であることを示せ．

(3) $C(a), C(b)$ の積 $C(a)\cdot C(b)$ を

$$C(a)\cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する．この定義が well-defined であることを示せ．

問題 11.10.

$f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して，

$$f(X) \sim g(X) \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f(X)-g(X) \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める．$\overline{f(X)}$ を $f(X)$ の $\sim$ に関する同値類とする．すなわち

$$\overline{f(X)} := \{h(X) \in \mathbb{R}[X] : f(X)-h(X) \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる}\}$$

と定める．

(1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ．

(a) $3X^2+4X+1 \sim X^2+4X-1$

(b) $X^3+X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(c) $4X^2+2X+3 \sim X^2+2X+2$

(d) $X^3-X^2+X+1 \sim X^3-X^2+X-1$

(2) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して，

$$\overline{f(X)}+\overline{g(X)} := \overline{f(X)+g(X)}$$

と定義する．この定義が well-defined であることを示せ．

(3) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して，

$$\overline{f(X)}\cdot\overline{g(X)} := \overline{f(X)g(X)}$$

と定義する．この定義が well-defined であることを示せ．

問題 11.11 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする．このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = P^{-1}BP$$

で定義する．

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ．

(2) $A \sim B$ ならば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ を示せ．

(3) $A \sim B$ ならば $\det(A) = \det(B)$ を示せ．

数学入門B 演習問題　(2014年9月30日)

今日は提出問題はない. `http://www.wolframalpha.com/`を使って, いろいろ試してみよ.

問題 0.1.

次をWolframAlphaで検索してみよ.

(1) `{{3,-5,2,10},{2,0,1,-3},{-2,3,5,2},{4,-2,-3,2}}`
(2) `Det({{3,-5,2,10},{2,0,1,-3},{-2,3,5,2},{4,-2,-3,2}})`
(3) `Inverse({{3,-5,2,10},{2,0,1,-3},{-2,3,5,2},{4,-2,-3,2}})`
(4) `{{3,2,5,-4},{-7,1,-8,6},{10,3,6,1},{2,5,4,3}}`
(5) `MatrixRank({{3,2,5,-4},{-7,1,-8,6},{10,3,6,1},{2,5,4,3}})`

注意.

上記入力方法はMathematicaによる入力方法であるが, `Det`を`determinant`と入力しても, 問題なく計算してくれる. このあたりはMathematicaより使いやすい. また, maximaでは`matrix([3,-5,2,10], [2,0,1,-3], [-2,3,5,2], [4,-2,-3,2])`として行列を入力するが, この場合でもWolframAlphaはちゃんと行列として認識してくれる.

問題 0.2.

次をWolframAlphaで検索してみよ.

(1) `x*\log(3x)`
(2) `D[(1+x)^(1/2),{x,2}]`
(3) `D[(1+x^2+y^2)^(1/2),x]`
(4) `(x^2+4)^(1/3)`
(5) `cos^2(x)*\sin(x)`
(6) `Integrate[cos^2(x)*sin(x),x]`
(7) `Integrate[x/((3-x)^(1/2)),{x,1,2}]`
(8) `Integrate[e^(-x^2),x]`

注意.

上記入力方法もMathematicaによる入力方法であるが, `D`を`diff`にしても同様に機能する.

注意.

高校数学で定積分を計算するときに「原始関数を(簡単な形で)求めることができるか(不定積分が計算できるか？)」がたいていの場合は必要であった. しかし, 「与えられた関数の不定積分が計算できるか？」がそんなに簡単な問題ではない. 例えば, e^{-x^2}, $\sin(x^2)$のような一見簡単そうに見える関数であっても, 不定積分を計算することはできないことが知られている.

Mathematicaには, 不定積分が計算できるか否かをある程度判定することができると聞いたことがある. そのアルゴリズムはWolframAlphaでも実装されていると思われるため, 不定積分が実際に計算できるか否かを調べるのに, WolframAlphaを利用することができる.