

# 数学入門 B 定期試験問題

2016年2月2日 第3時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず。  
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること。

## 問題 1.

$\Lambda$  を添字集合とする集合族  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して, 次の各問いに答えよ。  
なお, 答えのみでよい。

- (1)  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  の定義を述べよ。
- (2)  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  の定義を述べよ。
- (3) 選択公理を述べよ。
- (4)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ 1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n} \right]$  を求めよ。

## 問題 2.

集合  $X$  に対して,  $X$  の濃度を  $\#X$  で表す。次の各問いに答えよ。  
なお, 答えのみでよい。

- (1) 集合  $A, B$  に対して,  $\#A = \#B$  の定義を述べよ。
- (2) 集合  $A, B$  に対して,  $\#A \leq \#B$  の定義を述べよ。
- (3) 可算集合の例と非可算集合の例を一つずつ述べよ。
- (4) Bernstein の定理を述べよ。

## 問題 3.

$A$  を集合とする。次の問いに答えよ。なお, 答えのみでよい。

- (1)  $\sim$  が  $A$  上の同値関係であることの定義を述べよ。
- (2)  $\sim$  に関する  $a \in A$  を代表元とする同値類を  $[a]$  で表す。  $[a]$  の定義を述べよ。
- (3) 商集合  $A/\sim$  の定義を述べよ。
- (4)  $\leq$  が  $A$  上の半順序であることの定義を述べよ。

**問題 4.**

$\mathbb{R}[X]$  で  $X$  を変数とする 1 変数実数多項式全体からなる集合を表すことにする.  $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$  に対して,  $\mathbb{R}[X]$  上の同値関係  $\sim$  を

$f(X) \sim g(X) \iff$  ある  $q(X) \in \mathbb{R}[X]$  が存在して

$$f(X) - g(X) = (X^2 + 1)q(X)$$

で定義する. また,  $\overline{f(X)}$  で  $f(X) \in \mathbb{R}[X]$  を代表元とする  $\sim$  に関する同値類を表すこととし,  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  を  $\mathbb{R}[X]$  の同値関係  $\sim$  による商集合とする.

$\overline{f(X)}, \overline{g(X)} \in \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  に対して, 和  $\overline{f(X)} + \overline{g(X)}$  を

$$\overline{f(X)} + \overline{g(X)} := \overline{f(X) + g(X)}$$

で定義するとき, この定義が well-defined であることを示せ.

**問題 5.**

$A := \{-n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  とするとき,  $\#\mathbb{N} = \#A$  を示せ.

**問題 6.**

$n \in \mathbb{N}$  に対して, 集合

$$A_n := \left(0, 3 - \frac{1}{n}\right)$$

を考える. このとき,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 3)$$

となることを示せ.

**問題 7.**

$X$  を集合,  $\sim$  を同値関係,  $C(x)$  を  $x \in X$  に対する同値類,  $x, y \in X$  とする. 次を証明せよ.

- (1)  $x \sim y$  ならば  $C(x) = C(y)$ .
- (2)  $x \not\sim y$  ならば  $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ .