数学入門B 演習問題　(2015 年 9 月 29 日)

問題 1.1.

$X = \{1, 2, 3\}$ のときに, 2^X を具体的に求めよ (空集合と全体を忘れないように). 元の個数はいくつか？

問題 1.2.

$A := \{1, \{2, 3\}, 4, \{5, \{6, 7\}, 8\}, \{9\}, 0\}$ とおく. 自分の学生番号の十の位を a, 一の位を b としたときに, 次が成り立つか否かを答えよ (答えのみでよい).

(1) $\{a\} \in A$
(2) $\{a\} \subset A$
(3) $\{4, a, b\} \in A$
(4) $\{a, b\} \subset A$

数学入門B 演習問題　(2015 年 10 月 6 日)

問題 2.1.

Λ を添字集合としたとき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の定義は何か？

問題 2.2.

$n\in\mathbb{N}$ に対して, 集合

$$A_n := \left(0, 2-\frac{1}{n}\right)$$

を考える. このとき,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2-\frac{1}{n}\right) = (0,2), \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2-\frac{1}{n}\right) = (0,1)$$

となることを示せ.

問題 2.3.

$n\in\mathbb{N}$ に対して, $A_n = \left(0, 1+\dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求め, その等号が成り立つことの証明を与えよ ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開区間にならないことに注意せよ).

問題 2.4.

$n\in\mathbb{N}$ に対して, $B_n = \left[0, 2-\dfrac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ を求め, その等号が成り立つことの証明を与えよ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ は閉区間にならないことに注意せよ).

注意.

問題 2.2, 2.3, 2.4 の類題は試験で 1 問以上必ず出題する.

数学入門B 演習問題　(2015年10月13日)

問題 3.1.
Λ を添字集合としたとき, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 直積集合 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ の定義は何か？

問題 3.2.
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族, B を集合とする. このとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B), \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B)$$

を示せ.

問題 3.3.
$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合族とするとき

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c, \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

を示せ.

問題 3.4 (写像と集合の演算)**.**
X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を写像, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ を X 上の集合族, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^Y$ を Y 上の集合族とするとき, 次を示せ.

(1) $f\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(2) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$;

(3) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

(4) $f^{-1}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$;

数学入門B 演習問題　(2015年10月20日)

問題 4.1.

次の $\equiv$ は正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $12 \equiv 9 \pmod 5$
(2) $63 \equiv 39 \pmod 3$

以下

$$\mathbb{R}[X] := \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n : n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

と定める. $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して

$$f \sim g \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} h \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f - g = (X^2+1)h$$

とおく.

問題 4.2.

次が正しいか正しくないか理由をつけて答えよ.

(1) $3X^2 + 2X + 1 \sim X^2 + 5X - 1$
(2) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

問題 4.3 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. このとき $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = P^{-1}BP$$

で定義する.

(1) $\sim$ は $M_n(\mathbb{R})$ 上の同値関係になっていることを示せ.
(2) $A \sim B$ ならば $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ を示せ.
(3) $A \sim B$ ならば $\det(A) = \det(B)$ を示せ.

問題 4.4.

$p \in \mathbb{N}$ を固定し, $x, y \in \mathbb{N}$ に対して[1], $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = kp$ が成り立つと仮定する. このときに, x と y を p で割った余りが等しいことを示せ (ヒント: x を p で割った商を q_1, 余りを r_1 と書くと, $x = q_1 p + r_1$ かつ $0 \leq r_1 < p$ が成り立つ. 同様のことを y についても考えてみよ.).

---

[1] $x, y \in \mathbb{Z}$ で考えても, 本質的な違いはない.

数学入門B 演習問題　(2015 年 11 月 10 日)

問題 5.1.

$p \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
x \equiv y \pmod{p} &\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} k \in \mathbb{Z} \text{ が存在して } x - y = kp \\
&\Leftrightarrow x - y \text{ が } p \text{ でわり切れる } (x, y \text{ を } p \text{ でわったときの余りが同じ})
\end{aligned}
$$

と定める, このとき, $\equiv \pmod{p}$ は同値関係となることを示せ.

問題 5.2.

$p(X) \in \mathbb{R}[X]$ を固定する. $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(X) \sim g(X) &\underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} h(X) \in \mathbb{R}[X] \text{ が存在して } f(X) - g(X) = p(X)h(X) \\
&\Leftrightarrow f(X) - g(X) \text{ が } p(X) \text{ でわり切れる}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, $\sim$ は同値関係となることを示せ.

問題 5.3.

$\mathbb{R}[X]$ に対して, 問題 5.2 の同値関係 $\sim$ を考え, $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対する同値類を $\overline{f(X)}$ で表す. $a_1 + b_1X$, $a_2 + b_2X \in \mathbb{R}[X]$ に対して, $p(X) = X^2 + 1$ として

$$
\overline{(a_1 + b_1X)(a_2 + b_2X)} = \overline{a + bX}
$$

となる $a, b \in \mathbb{R}$ を求めよ.

問題 5.4.

X を集合, $\sim$ を同値関係, $C(x)$ を $x \in X$ に対する同値類, $x, y \in X$ とする. 次を証明せよ.

(1) $x \sim y$ ならば $C(x) = C(y)$.

(2) $x \not\sim y$ ならば $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

数学入門 B 演習問題 (2015 年 11 月 17 日)

問題 6.1.

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の元をすべて書け. そして, それら一つ一つの元はどのような性質を持っているかについて説明せよ.

問題 6.2.

ϕ を $\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ への標準的射影とする. このとき, 次の集合を求めよ. ただし代表元はたかだか 1 次多項式とすること.

(1) $\phi(X^3+X^2+X+1)$

(2) $\phi(3X^3+6X+2)$

問題 6.3.

X を集合, $\sim$ を同値関係とするとき, 自然な射影 $\phi : X \to X/\sim$ は全射になることを示せ.

数学入門B 演習問題　(2015 年 11 月 24 日)

問題 7.1.

$C(a), C(b) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とする.

(1) $C(a), C(b)$ の和 $C(a) + C(b)$ を

$$C(a) + C(b) := C(a + b)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $C(a), C(b)$ の積 $C(a) \cdot C(b)$ を

$$C(a) \cdot C(b) := C(ab)$$

により定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $C(2) \cdot C(3)$ を求めよ.

問題 7.2.

$f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$f(X) \sim g(X) \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} f(X) - g(X) \text{ が } (X^2+1) \text{ で割り切れる}$$

と定める. $\overline{f(X)}$ を $f(X)$ の $\sim$ に関する同値類とする. すなわち

$$\overline{f(X)} := \{h(X) \in \mathbb{R}[X] : f(X) - h(X) \text{ は } (X^2+1) \text{ で割り切れる }\}$$

と定める.

(1) 次が正しいか正しくないかについて答えよ.

(a) $3X^2 + 4X + 1 \sim X^2 + 4X - 1$

(b) $X^3 + X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

(c) $4X^2 + 2X + 3 \sim X^2 + 2X + 2$

(d) $X^3 - X^2 + X + 1 \sim X^3 - X^2 + X - 1$

(2) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)} + \overline{g(X)} := \overline{f(X) + g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

(3) $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ に対して,

$$\overline{f(X)} \cdot \overline{g(X)} := \overline{f(X)g(X)}$$

と定義する. この定義が well-defined であることを示せ.

問題 7.3 (代数学幾何学での結果は仮定してよい)**.**

$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正方行列のなす集合, $GL_n(\mathbb{R})$ を n 次実数値正則行列のなす集合とする. 問題 4.3 の同値関係 $\sim$ と $A \in M_n(\mathbb{R})$ について, $[A]$ で A を代表元とする $\sim$ の同値類とする.

(1) $\mathrm{tr}([A]) := \mathrm{tr}(A)$ と定義すると, この定義が well-defined であることを示せ.

(2) $\det([A]) := \det(A)$ と定義すると, この定義が well-defined であることを示せ.

数学入門B 演習問題 (2015年12月8日)

問題 8.1.

$A := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とおくとき, 定義に従って, $\#A = \#\mathbb{N}$ を示せ.

問題 8.2.

$a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ をみたすとする. このとき, 定義に従って, $\#(a,b) = \#(0,1)$, $\#[a,b] = \#[0,1]$ を示せ (ヒント: 一次関数を考える).

問題 8.3.

$f : [0,1] \to (0,1)$ を $x \in [0,1]$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ \dfrac{x}{2^2} & x = \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ x & x \neq 0, \dfrac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

と定めたときに, f が全単射となることを示せ. 従って, $\#[0,1] = \#(0,1)$ となる.

数学入門B 演習問題　(2015年12月15日)

問題 9.1.

集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを証明せよ.

(1) $\#A = \#A$;
(2) $\#A = \#B$ ならば $\#B = \#A$;
(3) $\#A = \#B$, $\#B = \#C$ ならば $\#A = \#C$.

問題 9.2.

次の集合はたかだか可算集合か否か答えよ.

(1) $\mathbb{Z}$
(2) $\mathbb{Q}$
(3) $\mathbb{R}$
(4) $\mathbb{C}$
(5) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(6) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
(7) $2^{\mathbb{N}}$
(8) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ($\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合)
(9) $\{A : A$ は整数を成分とする3次正方行列$\} = M_3(\mathbb{Z})$
(10) $\mathbb{R}^3$
(11) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

数学入門B 演習問題　(2015年12月22日)

問題 10.1 (提出問題)**.**
X, Y, Z を集合とする. 次を示せ.

(1) $\#X \leq \#X$,
(2) $\#X \leq \#Y$ かつ $\#Y \leq \#Z$ ならば $\#X \leq \#Z$.

問題 10.2.
Bernstein の定理を用いて, $\#[0,1] = \#(0,1)$, $\#[0,1) = \#(0,1)$ を示せ.

問題 10.3 (難)**.**
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して

$$f(n,m) := m + \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} = m + \sum_{k=1}^{n+m-2} k$$

と定めると, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が全単射になることを証明せよ.