Fourier 解析学入門

水野 将司

目次

第 1 章

無限次元の線形空間と Fourier 級数

1.1. 無限次元の線形空間

内積のついた $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ を考える. $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ を正規直交系, すなわち

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)_H = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

なるものとしよう. $\boldsymbol{v} \in H$ がスカラー $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k = c_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{e}_n \tag{1.1}$$

と書けたとすると, $c_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)_H$ となる. 実際に $1 \leq i \leq n$ に対して (1.1) に $\boldsymbol{e}_i$ との内積をとると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)_H &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i \right)_H \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i \right)_H \qquad (\because \text{内積の線形性}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{ki} \qquad (\because \{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^{\infty} \text{は正規直交系}) \\ &= c_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる. 次に, $\boldsymbol{v} \in H$ がスカラー $c_1, \ldots, c_n, \ldots \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{e}_k = c_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{e}_k + \cdots \tag{1.3}$$

と書けたとする. $i \in \mathbb{N}$ に対して, (1.2) と同じ計算をしてみると,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)_H &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i \right)_H \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i \right)_H \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i \right)_H \qquad (\text{内積と極限を形式的に交換した}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i)_H \qquad (\because \text{内積の線形性}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{ki} \qquad (\because \{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^{\infty} \text{は正規直交系}) \\
&= \lim_{n\to\infty} c_i \qquad (\because n \text{は} i \text{より大きいとしてよい}) \\
&= c_i
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

と形式的には, $c_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)$ が得られる. 内積と極限を交換できるかどうかが問題である. つまり, 線形空間に何らかの距離, もっと一般的には位相を考える必要があるということである.

ところで, $\boldsymbol{v} \in H$ に対して

$$\|\boldsymbol{v}\|_H := \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_H}$$

を $\boldsymbol{v}$ のノルム, または長さというのであった. また, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する, つまり

$$a_n \to a \quad (n \to \infty) \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

となることは $|a_n - a| \to 0 \quad (n \to \infty)$ と定めるのであった. このことを一般化して, ベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $\boldsymbol{v} \in H$ に収束する, つまり

$$\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{v} \quad (n \to \infty) \quad \text{in } H$$

となることを $\|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}\|_H \to 0 \quad (n \to \infty)$ と定める. すると, (1.4) の極限の交換が正当化できる. なぜなら, $\boldsymbol{v}_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k$ とおくと, $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{v}$ に収束し

$$
\begin{aligned}
|(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{e}_i)_H - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)_H| &= |(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)_H| \\
&\le \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}\|_H \|\boldsymbol{e}_i\|_H \quad (\because \text{Schwarz の不等式}) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるからである.

有限次元の線形空間を考えるうえでは, 距離や位相は本質的に考える必要がない. 実際に, d 次元の線形空間は $\mathbb{R}^d$ と位相同型となる. 他方, 無限次元の線形空間では距離を考える必要がある.

1.2. Fourier 級数

無限次元の線形空間 H の具体例を説明するために, 二乗可積分関数のなす空間 $L^2(-\pi,\pi)$ を

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ \text{可測関数},\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

で定める. あとで示すことにするが, $L^2(-\pi,\pi)$ は内積

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

が定義された線形空間となる. そして

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty} \tag{1.5}$$

は $L^2(-\pi,\pi)$ における正規直交系になる. 実際に, $k,l \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(lx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\, dx = \delta_{kl},\\
\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)\, dx = 0,\\
\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx = 0,\\
\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(lx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\, dx = \delta_{kl},\\
\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx = 0,\\
\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_{L^2(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

がわかる. (1.3) の展開をすると, (1.4) によれば $f \in L^2(-\pi.\pi)$ に対して

$$f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\tilde{a}_k}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) + \frac{\tilde{b}_k}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \right) \tag{1.7}$$

と書ける. ここで, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\
\tilde{a}_k &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \\
\tilde{b}_k &= \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx
\end{aligned}
$$

である. 係数を簡単にするために

$$
\begin{aligned}
a_0 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\
a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \\
b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx
\end{aligned}
$$

とおけば, (1.7) は

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{1.8}
$$

となる. (1.8) の右辺の級数を **Fourier 級数**という.

例 **1.1.**
$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$
f(x) = \begin{cases} -c, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ c, & 0 < x < \pi \end{cases}
$$

で定めたときに, f の Fourier 級数を求めよう. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f(x)$, $f(x)\cos(kx)$ が奇関数となることに注意すると,

$$
a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0
$$

となることがわかる. 他方, $f(x)\sin(kx)$ は偶関数となるから

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2c}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2c}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \begin{cases} \frac{4c}{k\pi}, & k \text{ が奇数}, \\ 0, & k \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. 従って, $k = 2l-1$ ($l \in \mathbb{N}$) とおけば, f の Fourier 級数は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4c}{(2l-1)\pi}\sin((2l-1)x) \\ &= \frac{4c}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

となる. (1.9) が正しいと仮定して, $x = \frac{\pi}{2}$ とおくと, $\sin(\frac{(2l-1)\pi}{2}) = (-1)^{l-1}$ となるから

$$c = \frac{4c}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

すなわち

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{2l-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{1.10}$$

が得られる. (1.10) の左辺の交代級数は収束することは級数の一般論でわかるが, 具体的な値は Fourier 級数を用いると求めることができる.

さて, Fourier 級数 (1.8) はどのような関数 f において正しいのだろうか？ さらに, 無限級数はどのような意味で正しいのだろうか？ これは, (1.3) の無限級数がどのような意味で正しいのか？ ということと同等の問題である. そこで, 次の節で, 無限次元の内積をもつ線形空間をどのように扱うか, Fourier 級数がどのような意味で正しいのかを考えることにする.

第 2 章

Fourier 級数

本章では, Fourier 級数の性質を論ずる. 関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ の **Fourier 級数**とは

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

であった. ここで,

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\ a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \end{aligned} \tag{2.1}$$

である. (2.1) によって決まる a_k, b_k を f の **Fourier 係数**という.

2.1. Fourier 係数の性質

2.1.1. Fourier 係数の一意性. 二つの関数 $f, g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ の Fourier 係数が一致したとしよう. このときに, f と g が等しくなるかについて考える. f, g の Fourier 係数をそれぞれ a_k, b_k, $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ とおくと

$$\begin{aligned} a_k - \tilde{a}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \cos(kx)\, dx \\ b_k - \tilde{b}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \sin(kx)\, dx \end{aligned}$$

となるから, $f - g$ の Fourier 係数は $a_k - \tilde{a}_k$, $b_k - \tilde{b}_k$ となる. 従って, Fourier 係数がすべて 0 となる関数は恒等的に 0 となる関数であることがわかれば, すべての $x \in (-\pi, \pi)$ に対して, $f(x) - g(x) = 0$ となるから, $f(x) = g(x)$ となることがわかる. そこで, Fourier 係数がすべて 0 となる関数は恒等的に 0 となる関数であることを示そう.

定理 2.1 (Fourier 係数の一意性)**.**

可積分な連続関数 $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ の Fourier 係数がすべて 0 ならば, f は恒等的に零となる. すなわち, すべての $x\in(-\pi,\pi)$ に対して $f(x)=0$ が成り立つ.

証明.

背理法で示す. つまり, ある $x_0\in(-\pi,\pi)$ が存在して, $f(x_0)\neq 0$ であるとする. 必要ならば, f のかわりに $-f$ を考えることにより, $f(x_0)>0$ と仮定してよい. f が連続だから, ある $\delta>0$ が存在して, $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(-\pi,\pi)$ かつ, すべての $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ に対して, $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$ とできる (各自考えよ).

$\psi:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ を $x\in(-\pi,\pi)$ に対して

$$\psi(x):=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta$$

と定める. すると, すべての $N\in\mathbb{N}$ に対してスカラー α_k,β_k を用いて

$$\psi^N(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx))$$

と書ける. 実際に, $\cos(x-x_0)=\frac{1}{2}(e^{i(x-x_0)}+e^{-i(x-x_0)})$ に注意して, 指数法則と Euler の公式を用いればよい. f の Fourier 係数はすべて 0 だったのだから

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\psi^N(x)\,dx=0 \tag{2.2}$$

が得られる.

$x_0-\delta<x<x_0+\delta$ に対して, $|x-x_0|<\delta<\pi$ だから, $\cos(x-x_0)>\cos\delta$, すなわち, $\psi(x)>1$ がわかる. さらに, $x_0-\frac{\delta}{2}<x<x_0+\frac{\delta}{2}$ に対しては $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}<\pi$ だから, $\cos(x-x_0)>\cos\frac{\delta}{2}$, すなわち,

$$\psi(x)>1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta>1$$

がわかる. 以上により,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\psi^N(x)\,dx\ge\int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}}\psi^N(x)\,dx\ge\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^N\delta\to\infty\quad(N\to\infty) \tag{2.3}$$

がわかる.

次に, $-\pi<x<x_0-\delta$ または, $x_0+\delta<x<\pi$ のときは $\delta<|x-x_0|<2\pi-\delta$ だから, $\cos\delta>\cos(x-x_0)$, すなわち, $|\psi(x)|<1$ が成り立つ. したがって, $N\to\infty$ とすると各点収束の意味で $f(x)\psi^N(x)\to 0$ である. さらに, $N\in\mathbb{N}$

に対して $|f(x)\psi^N(x)| \le |f(x)|$ であり, f が $(-\pi, x_0-\delta) \cup (x_0+\delta, \pi)$ 上の N に依らない可積分関数だから Lebesgue の優収束定理が使えて

$$\int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)\psi^N(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)\psi^N(x)\,dx \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{2.4}$$

が成り立つ. (2.3) と (2.4), $\delta > 0$ の定めかたから

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\psi^N(x)\,dx &= \left(\int_{-\pi}^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\pi}\right) f(x)\psi^N(x)\,dx \\
&\ge \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \psi^N(x)\,dx + \left(\int_{-\pi}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\pi}\right) f(x)\psi^N(x)\,dx \\
&\to \infty \quad (N \to \infty)
\end{aligned}$$

となるが, これは (2.2) に矛盾する. □

2.1.2. Bessel の不等式. $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し $|\sin(kx)| \le 1$, $|\cos(kx)| \le 1$ だから

$$|a_k|,\ |b_k| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{2.5}$$

がわかる. すなわち, f が $(-\pi, \pi)$ 上可積分であれば, Fourier 係数は有限な値を持つことがわかる. $|f|^2$ が $(-\pi, \pi)$ 上可積分であるときは, (2.5) より精密な評価が得られる.

定理 2.2 (Bessel の不等式)**.**
$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ は $|f|^2$ が可積分であるとする. このとき, a_k, b_k を f の Fourier 係数とすると **Bessel の不等式**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \tag{2.6}$$

が成り立つ. 特に

$$a_k,\ b_k \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{2.7}$$

が成り立つ.

証明.
Bessel の不等式 (2.6) の左辺の無限級数は正項級数であり, 右辺が有限であれば, この正項級数は収束するので, (2.7) が従う. 以下, Bessel の不等式 (2.6) を示す.

$N \in \mathbb{N}$ に対し

(2.8)

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right|^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx - 2 \sum_{k=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \, dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx
\end{aligned}
$$

となる. 2 項目と 3 項目の積分は, Fourier 係数の定義を用いれば

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \pi a_0^2 - 2\pi \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2) \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

と変形できる. 最後の項の積分は, (1.6) に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} \, dx + \sum_{k=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \, dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))(a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx)) \, dx \\
&= \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k^2 \cos^2(kx) + b_k^2 \sin^2(kx)) \, dx \\
&= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2)
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

となる. (2.10) を (2.9) に代入して整理すれば

$$
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx
$$

となるから, $N \to \infty$ とすれば (2.6) を得る. □

2.2. 連続関数に対する Fourier 級数の収束

この節では, 関数項級数の一様収束の理論を用いて, Fourier 級数の収束性を議論する. まずは, 復習として, 一様収束の定義からはじめよう.

定義 2.3 (一様収束)**.**
$(-\pi,\pi)$ 上の関数列 $F_N : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ が $F : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上**一様収束**するとは,

$$\sup_{x\in(-\pi,\pi)} |F_N(x) - F(x)| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

をみたすことをいう.

我々は, F_N として Fourier 級数の部分和

$$F_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

を考えたいのである. このとき, F_N は $(-\pi,\pi)$ 上の連続関数である. F_N が F に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, どのようなことが結論できるかをまとめておこう.

定理 2.4 (連続関数列の一様収束極限)**.**
$(-\pi,\pi)$ 上の連続な関数列 $F_N : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ が $F : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, F は $(-\pi,\pi)$ 上連続となる.

証明の概略.
$x_0 \in (-\pi,\pi)$ をとって, $|F(x) - F(x_0)|$ が $x \to x_0$ としたときに 0 に収束すればよい.

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &\le |F(x) - F_N(x)| + |F_N(x) - F_N(x_0)| + |F_N(x_0) - F(x_0)| \\ &\le 2 \sup_{x\in(-\pi,\pi)} |F(x) - F_N(x)| + |F_N(x) - F_N(x_0)|\end{aligned}$$

と評価する. $N \in \mathbb{N}$ を十分に大きくとれば, F_N が F に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束することから, 右辺の第一項はいくらでも小さくできる. 次に, いまとれた N に対して, x を x_0 に近づければ, F_N は連続だから右辺の第二項はいくらでも小さくできる. 厳密には, この推論を ε 論法で行えばよい. □

定理 2.5 (積分と極限の順序交換)**.**

$(-\pi,\pi)$ 上の可積分関数列 $F_N : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ が可積分関数 $F : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するとき, 極限と積分の順序が交換できる. すなわち

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明の概略.

積分の線形性と三角不等式, 順序保存性を使えば

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x) - F(x)|\,dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{y\in(-\pi,\pi)} |F_N(y) - F(y)|\,dx \\ &= 2\pi \sup_{x\in(-\pi,\pi)} |F_N(x) - F(x)|\end{aligned}$$

となる. F_N が F に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束するから, この右辺は 0 に収束する. □

一般に, F_N が F に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束することを示すのは難しい. しかし, F_N が関数列 $f_k : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ を用いて

$$F_N(x) := \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$$

と書けている場合は, Weierstrass の優級数判定法が知られている.

定理 2.6 (Weierstrass の優級数判定法)**.**

$(-\pi,\pi)$ 上の関数列 $f_k : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ は, ある $\{M_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ と $x \in (-\pi,\pi)$ に対して, $|f_k(x)| \leq M_k$ かつ, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ を仮定する. このとき, 関数項級数 $\sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ はある関数に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する.

証明の方針.

$N, n \in \mathbb{N}$ と $x \in (-\pi,\pi)$ に対して

$$\left|\sum_{k=1}^{N+n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{N+n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=N+1}^{N+n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{N+n} M_k$$

だから, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ より

$$\sup_{x\in(-\pi,\pi)}\left|\sum_{k=1}^{N+n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=N+1}^{N+n} M_k \to 0 \quad (N, n \to \infty)$$

が得られる. Cauchy の収束条件から, $\sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ はある関数に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する. □

注意 2.7.

Weirerstass の優級数判定法において,「関数項級数 $\sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ はある関数に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する」は簡単に「関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する」と書かれることが多い. 関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ を考えるときは, その部分和 $\sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ が収束するかどうかを考えるのが自然だからである.

Fourier 級数の各項について

$$|a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)| \leq |a_k\cos(kx)| + |b_k\sin(kx)| \leq |a_k| + |b_k|$$

だから, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty$ であれば, Weierstrass の優級数判定法が使える. まとめて次を得る.

定理 2.8.

$(-\pi,\pi)$ 上で定義された連続関数 $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ の Fourier 係数 a_k, b_k は

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < \infty \tag{2.11}$$

をみたすとする. このとき, $x \in (-\pi,\pi)$ に対して

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \tag{2.12}$$

が成り立つ. (2.12) の右辺の級数は $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する.

証明.

$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$F_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

とおく. すると, (2.11) より Weierstrass の判定法 (定理 2.6) から, F_N はある関数 $F : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する. F_N は $(-\pi,\pi)$ 上連続関数だか

ら, 連続関数列の一様収束極限の連続性 (定理 2.4) より, F もまた $(-\pi,\pi)$ 上連続関数となる．F の Fourier 係数は, 積分と極限の順序交換 (定理 2.5) が使えて, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = a_0\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\cos(kx)\,dx = a_k\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\sin(kx)\,dx = b_k\end{aligned}$$

となる．従って, 連続関数 $f - F$ の Fourier 級数はすべて 0 となる．Fourier 級数の一意性より, $f - F$ は恒等的に零になる, すなわち, (2.12) が成り立つ． □

さて, (2.11) はいつ成り立つのか？ が次の問題である．(2.11) が成り立つための, 関数 f に対するできるだけ簡単な条件をみつけておくのがよいだろう．そこで, Fourier 係数 a_k, b_k が $k \in \mathbb{N}$ についてどのように評価されるかを調べよう．

Fourier 級数の各項は周期 2π の周期関数になっている．すなわち, $k \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos(k(x+2\pi)) = \cos(kx), \quad \sin(k(x+2\pi)) = \sin(kx)$$

となっている．従って, Fourier 級数を考える f も周期 2π の周期関数を考えるのが自然である．周期 2π の周期関数を考えるということは, 単位円周上で定義された関数を考えることと同等である．これは, $(-\pi,\pi)$ 上で定義された関数 $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ で, $-\pi$ と π を同一視してつなげたものだと考えればよい．すなわち, f が $x = -\pi, \pi$ でも定義ができて, すべての $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $f^{(l)}(-\pi) = f^{(l)}(\pi)$ となっていることである．この条件のもとで, f の Fourier 係数の性質を調べよう．

命題 2.9.
$[-\pi,\pi]$ で定義された連続関数 $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ は $(-\pi,\pi)$ 上微分可能であり, $f(-\pi) = f(\pi)$ をみたすとする．このとき, f の Fourier 係数 a_k, b_k は $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_k = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx \tag{2.13}$$

を満たす．

証明.

b_k について, 部分積分により,

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\
&= -\frac{1}{k\pi}\left[f(x)\cos(kx)\right]_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx
\end{aligned}
$$

となる. $f(\pi)=f(-\pi)$, $\cos(-k\pi)=\cos(k\pi)$ を用いると $[f(x)\cos(kx)]_{x=-\pi}^{\pi}=0$ がわかる. a_k については各自考えよ. □

周期 2π の周期関数 f の導関数 f' が可積分であれば, (2.13) より

$$
|a_k|,\ |b_k| \le \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|\,dx
$$

が得られる. すなわち, $|a_k|, |b_k|$ は $\frac{1}{k}$ で評価されることがわかる.

また, $\widehat{f}(k) := a_k + ib_k$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx + \frac{i}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{i}{k\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx\right) = \frac{i}{k}\widehat{f'}(k)
\end{aligned}
$$

より

$$
\widehat{f'}(k) = -ik\widehat{f}(k)
$$

が得られることに注意しておく. つまり, 単位円周上で定義された関数 f について f' の Fourier 係数は f の Fourier 係数を $-ik$ 倍すればよいということである.

命題 2.9 を f' について適用すれば,

$$
|a_k|,\ |b_k| \le \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx
$$

となり,

$$
\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) \le \left(\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty
$$

がわかる. すなわち, (2.11) が成り立つことがわかる. 以上をまとめると, 次の収束定理が得られる.

定理 2.10.

$[-\pi,\pi]$ で定義された連続関数 $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ は $(-\pi,\pi)$ 上 2 回微分可能であり, 導関数 f' は $x = \pm\pi$ まで連続に拡張できて, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$ をみたすとする. さらに, f の 2 階導関数 f'' は $(-\pi,\pi)$ 上可積分であるとする. このとき, $x \in (-\pi,\pi)$ に対して a_k, b_k を (2.1) で定めれば

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{2.14}$$

が成り立つ. (2.14) の右辺の級数は $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する.

導関数 f' が $x = \pm\pi$ まで連続に拡張できるとは, $\lim_{x\to\pm\pi} f'(x)$ が存在することである. このとき, $f'(\pm\pi) := \lim_{x\to\pm\pi} f'(x)$ と定めれば, 導関数 f' は $[-\pi,\pi]$ 上連続に拡張できる.

2.3. L^2 空間

Fourier 級数には直交性の概念 (1.6) があった. また, 二乗可積分関数のなす空間 $L^2(-\pi,\pi)$ を導入した. この空間について調べてみよう.

くりかえしになるが, 二乗可積分関数のなす空間 $L^2(-\pi,\pi)$ を

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ \text{可測関数},\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

で定める. $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で $f = g$ であるとは, ほとんどすべての $x \in (-\pi,\pi)$ に対して $f(x) = g(x)$ となることとする.

例 2.11.

$f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ は有界な可測関数とする. このとき, $f \in L^2(-\pi,\pi)$ となる. 実際に, $M := \sup_{-\pi<x<\pi} |f(x)|$ とおけば[1],

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} M^2\, dx = 2M^2\pi < \infty$$

[1]正確には本質的上限

$$\operatorname*{ess\,sup}_{-\pi<x<\pi} |f(x)| := \inf\{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \le M \text{ almost all } x \in (-\pi,\pi)\}$$

を考える必要がある. 上限の定義が最小の上界であること, すなわち

$$\sup_{-\pi<x<\pi} |f(x)| = \min\{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \le M \text{ for all } x \in (-\pi,\pi)\}$$

であったことを思い出そう.

となるからである. 例えば, $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

とおくと, $g \in L^2(-\pi, \pi)$ となる. つまり, $g \in L^2(-\pi, \pi)$ となる連続でない関数がある.

例 2.12.

$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

とおくと, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ となる. つまり, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ となる非有界な関数がある.

例 2.13.

$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

とおくと, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ とならない. つまり, $f \notin L^2(-\pi, \pi)$ となる非有界な関数がある.

命題 2.14.

$L^2(-\pi, \pi)$ は関数の和とスカラー倍により実線形空間となる.

証明の概要.

$f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $f + g \in L^2(-\pi, \pi)$ と $\lambda f \in L^2(-\pi, \pi)$ となるかを示そう.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |(\lambda f)(x)|^2 \, dx = |\lambda|^2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

より $\lambda f \in L^2(-\pi, \pi)$ はすぐにわかる. 難しいのは, $f + g \in L^2(-\pi, \pi)$ である.

凸不等式 (もしくは, 相加相乗の不等式) より $a, b \ge 0$ に対して

$$(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$$

となる. $a = |f(x)|$, $b = |g(x)|$ とすれば

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)+g(x)|^2\,dx &\le \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|+|g(x)|)^2\,dx \\ &\le 2\int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2+|g(x)|^2)\,dx \\ &= 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx\right) < \infty\end{aligned}$$

となり, $f+g \in L^2(-\pi,\pi)$ がわかる. あとは和とスカラー倍の性質を調べればよいが, これは $\mathbb{R}$ が体であることを使えばよい. □

$f,g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \tag{2.15}$$

と定める.

命題 2.15.
$L^2(-\pi,\pi)$ に対して, (2.15) で定めた $(\cdot,\cdot)_{L^2(-\pi,\pi)}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の内積となる.

証明.
示すべきことは, $f,g,h \in L^2(-\pi,\pi)$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$(f,f)_{L^2(-\pi,\pi)} \ge 0,$

$(f,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad (L^2(-\pi,\pi)$ の意味で),

$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} = (g,f)_{L^2(-\pi,\pi)},$

$(g+h,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = (g,f)_{L^2(-\pi,\pi)} + (h,f)_{L^2(-\pi,\pi)}, \quad (\lambda g,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = \lambda(g,f)_{L^2(-\pi,\pi)}$

である. $(f,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = 0$ ならば, $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で $f = 0$ を示すことが難しい.

$(f,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = 0$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}0 = (f,f)_{L^2(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx &\ge \int_{(-\pi,\pi)\cap\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|\ge\frac{1}{n}\}} |f(x)|^2\,dx \\ &\ge \frac{1}{n^2} m_1\left(\left\{x \in (-\pi,\pi) : |f(x)| \ge \frac{1}{n}\right\}\right) \ge 0\end{aligned}$$

となるので $m_1(\{x \in (-\pi,\pi) : |f(x)| \ge \frac{1}{n}\}) = 0$ となる. ここで, m_1 は一次元 Lebesgue 測度である. $\{x \in (-\pi,\pi) : |f(x)| \ge \frac{1}{n}\}$ は n について単調増加な集

合列で

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)=\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|>0\}$$

だから,

$$m_1(\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|>0\})=\lim_{n\to\infty}m_1\left(\left\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)=0$$

となる. つまり, $m_1(\{x\in(-\pi,\pi):|f(x)|\neq 0\})=0$ が示せたので, ほとんどすべての $x\in(-\pi,\pi)$ に対して $f(x)=0$ が成り立つ. □

$f\in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}:=\sqrt{(f,f)_{L^2(-\pi,\pi)}}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく. $\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}$ は $f\in L^2(-\pi,\pi)$ の $L^2(-\pi,\pi)$ ノルムという.

命題 2.16.
$f,g\in L^2(-\pi,\pi)$ に対して $d(f,g):=\|f-g\|_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおくと, d は $L^2(-\pi,\pi)$ の距離になる. すなわち, $f,g,h\in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$\begin{aligned}&d(f,g)\geq 0,\\&d(f,g)=0\Leftrightarrow f=g\quad(L^2(-\pi,\pi)\text{ の意味で }),\\&d(f,g)=d(g,f),\\&d(f,h)\leq d(f,g)+d(g,h)\end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 2.16 の証明は, 内積の性質をつかえば簡単にわかる. d が距離であることがわかれば, $L^(-\pi,\pi)$ の列に対する収束の定義を与えることができる. すなわち, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^2(-\pi,\pi)$ が $f\in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束するということを

$$d(f_n,f)=\|f_n-f\|_{L^2(-\pi,\pi)}\to 0\quad(n\to\infty)$$

と距離 d を用いて定義できる.

$L^2(-\pi,\pi)$ の重要な性質は, 命題 2.16 で定めた距離について完備となることである. この性質を示すために Lebesgue 積分と可測関数の極限関数に関する性質が必要となる.

定理 2.17.
$L^2(-\pi,\pi)$ は命題 2.16 で定めた距離について完備となる．すなわち，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ が命題 2.16 で定めた距離 d について Cauchy 列，つまり，$d(f_n,f_m) \to 0\ (n,m \to \infty)$ であるならば，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束列となる．

証明.
1. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ が $d(f_n,f_m) = \|f_n - f_m\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0\ (n,m \to \infty)$ をみたすとする．このときに，ある部分列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束すれば，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ も $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束することを示す．三角不等式により

$$\begin{aligned}\|f_k - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} &= \|f_k - f_{k_j} + f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} \\ &\le \|f_k - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)}\end{aligned}$$

となる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束するので，ある $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$j \in \mathbb{N}$ が $j \ge j_0$ をみたせば

$$\|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．つぎに，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ 上の Cauchy 列だから，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k, k_j \in \mathbb{N}$ が $k, k_j > k_0$ であれば，

$$\|f_k - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．したがって，$k_j > k_0$ と $j > j_0$ をみたすように $j \in \mathbb{N}$ を十分に大きくとれば，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$k \ge k_0$ ならば

$$\|f_k - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} \le \|f_k - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるので，$\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束することがわかった．以下，$L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束する部分列を構成する．

2. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ での Cauchy 列から，ある $k_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $k > k_1$ に対して，$\|f_k - f_{k_1}\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{1}{2}$ とできる．次に，ある $k_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $k > k_2$ かつ $k_2 > k_1$ に対して，$\|f_k - f_{k_2}\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{1}{4}$ とできる．以下，くりかえして任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して，$k_j > k_{j-1}$ かつ $\|f_k - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{1}{2^j}$ とできる．特に，$j \in \mathbb{N}$ に対して，$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{1}{2^j}$ をみたすように $k_j \in \mathbb{N}$ をとることができる．

3. $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が各点収束極限 f をもつことを示す.

$$\begin{aligned} f_{k_N}(x) &= f_{k_1}(x) + \big(f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x)\big) + \cdots + \big(f_{k_N}(x) - f_{k_{N-1}}(x)\big) \\ &= f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \Big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\Big) \end{aligned}$$

に注意して, ほとんどすべての $x \in (-\pi, \pi)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$F_N(x) := |f_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{N-1} \left| f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x) \right|$$

とおく. 三角不等式を用いると

$$\begin{aligned} \|F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} &\leq \|f_{k_1}\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \sum_{j=1}^{N-1} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^2(-\pi,\pi)} \\ &\leq \|f_{k_1}\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \|f_{k_1}\|_{L^2(-\pi,\pi)} + 1 < \infty \end{aligned}$$

となる. また, ほとんどすべての $x \in (-\pi, \pi)$ に対して, $0 \leq F_1(x) \leq F_2(x) \leq \cdots$ より, 単調収束定理を用いると, $f_{k_1} \in L^2(-\pi, \pi)$ から,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty} |F_N(x)|^2 dx &= \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|^2 \, dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \|F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \\ &\leq \Big(\big\|f_{k_1}\big\|_{L^2(-\pi,\pi)} + 1\Big)^2 < \infty \end{aligned}$$

となり, $F = \lim_{N\to\infty} F_N \in L^2(-\pi, \pi)$ を得る. 次に, $F \in L^2(-\pi, \pi)$ より, ほとんどすべての $x \in (-\pi, \pi)$ に対して $F(x) < \infty$ となるので,

$$\lim_{N\to\infty} f_{k_N}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \Big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\Big)$$

の右辺の級数は, ほとんどすべての $x \in (-\pi, \pi)$ に対して絶対収束する. 絶対収束する数列は収束するので, ある極限関数が存在して,

$$f(x) := \lim_{N\to\infty} f_{k_N}(x)$$

を定めることができる.

4. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ を示す．ほとんどすべての $x \in (-\pi,\pi)$ と任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|f_{k_N}(x)| \leq |F_N(x)| \leq |F(x)|$$

から,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{k_N}(x)\right|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\, dx \tag{2.16}$$

となる．$F \in L^2(-\pi,\pi)$ であったので Lebesgue の優収束定理から

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k_N}(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{N\to\infty} |f_{k_N}(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$$

となる．(2.16) で N について極限をとると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\, dx$$

となるので, $f \in L^2(-\pi,\pi)$ がわかった．

5. $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束することを示す．

$$|f_{k_j}(x) - f(x)|^2 \leq 2\left(|f_{k_j}(x)|^2 + |f(x)|^2\right) \leq 2\left(|F(x)|^2 + |f(x)|^2\right)$$

より,

$$\|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \leq 2\int_{-\pi}^{\pi} (|F(x)|^2 + |f(x)|^2)\, dx < \infty$$

となる．再び Lebesgue の優収束定理を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 &= \lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k_j}(x) - f(x)|^2\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{j\to\infty} |f_{k_j}(x) - f(x)|^2\, dx \\ &= 0\end{aligned}$$

より, $\|f_{k_j} - f\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる．従って, $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束する部分列を構成することができた． □

一般に, 計量線形空間 $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ が, 内積から定まる距離によって完備となるとき, **Hilbert 空間**という．したがって, 定理 2.17 により $L^2(-\pi,\pi)$ は Hilbert 空間となる．

2.3.1. 近似定理. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ は可測関数ではあるが滑らかな関数とは限らないため, 我々が普段つかう微分積分の諸性質がつかえるかどうかを確認しなければならない. この証明をするかわりに, $f \in L^2(-\pi,\pi)$ が滑らかな関数で「近似」できることを紹介する.

定理を述べるために, 記号を準備しよう. 連続関数 $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ の**台 (support)** を

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in (-\pi,\pi) : f(x) \neq 0\}}$$

で定義する. コンパクトな台を持つ滑らかな関数のなす空間 $C_0^\infty(-\pi,\pi)$ を

$$C_0^\infty(-\pi,\pi) := \{f \in C^\infty(-\pi,\pi) : \operatorname{supp} f \subset (-\pi,\pi) \text{ はコンパクト}\}$$

で定める.

定理 2.18.

任意の $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して, 関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(-\pi,\pi)$ が存在して f に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束する. すなわち, $C_0^\infty(-\pi,\pi)$ は $L^2(-\pi,\pi)$ で ($L^2(-\pi,\pi)$ の位相で) 稠密である.

証明の詳細はあとで述べることにして, 方針のみ述べる. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ を $x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi,\pi)$ のときは $f(x) = 0$ と定めることで, f を $\mathbb{R}$ 上の関数とみなす. このとき, f と $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の**畳み込み (convolution)** を

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

で定義する. 次に $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\rho \geq 0$ をみたす滑らかな関数で,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1, \quad \overline{\{x \in \mathbb{R} : \rho(x) \neq 0\}} \subset [-1,1]$$

をみたすようにとる. $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\rho_k(x) := k\rho(kx)$ とおけば, $\rho_k \geq 0$ であって

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_k(x)\,dx = 1, \quad \overline{\{x \in \mathbb{R} : \rho_k(x) \neq 0\}} \subset \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$$

となっている. この $\{\rho_k\}_{k=1}^\infty$ を**軟化子 (Mollifier)** という.

$g = \rho_k$ として $f_k := f|_{(-\pi+\frac{2}{k},\pi-\frac{2}{k})} * \rho_k$ とおくと, ρ_k が滑らかなことから, f_k も滑らかであって, $\operatorname{supp} f_k \subset (-\pi,\pi)$ となることが従う. さらに, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ は f に $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で収束することがわかる. よって, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ が求めたかった関数列となる.

2.3.2. 正規直交系. 内積が定まっている空間においては, 直交の概念を定義することができる. $f,g \in L^2(-\pi,\pi)$ が直交するとは, $(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} = 0$ となることである.

定義 2.19 (正規直交系)**.**
$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ が $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で**正規直交系**であるとは, $k,l \in \mathbb{N}$ に対して $(f_k,f_l)_{L^2(-\pi,\pi)} = \delta_{kl}$ となることをいう.

(1.5) で与えた関数列は $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で正規直交系である. (1.5) で与えた関数列の cos だけや sin だけを考えたものもまた正規直交系になっている.

正規直交系についての一般的な性質を述べよう.

命題 2.20 (Bessel の不等式)**.**
$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ を正規直交系とすると, 任意の $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f,f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}|^2 \leq \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \tag{2.17}$$

が成り立つ.

証明.
$f \in L^2(-\pi,\pi)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_k = (f,f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおく.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \\
&= \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 - 2\sum_{k=1}^{N} (f,\alpha_k f_k)_{L^2(-\pi,\pi)} + \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \qquad (2.18)\\
&= \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 - 2\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \alpha_k\alpha_l (f_k,f_l)_{L^2(-\pi,\pi)}
\end{aligned}$$

となる. (2.18) の右辺の最後の項は, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が正規直交系であることから

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \alpha_k\alpha_l (f_k,f_l)_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \alpha_k\alpha_l\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\alpha_k$$

となるので, (2.18) に代入して整理すると

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \leq \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

となる. $N \to \infty$ とすれば (2.17) を得る. □

定理 2.2 の Bessel の不等式との関係について述べておく. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ を (1.5) で与えた関数列でとすると, $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \sqrt{\pi}a_k$$

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \sqrt{\pi}b_k$$

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

となる. 命題 2.20 の Bessel の不等式 (2.17) に代入すると

$$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\pi a_k^2 + \pi b_k^2) \leq \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2,$$

すなわち Fourier 級数における Bessel の不等式 (2.6) が得られる. 定理 2.2 の証明より, 命題 2.20 の証明の方が読みやすいであろう. それは, sin, cos の直交性の性質が本質的であったことに由来する. ただし, 定理 2.2 の計算もまた重要である. 文字を使って証明を整理する前に, 具体的な例で計算することもまた必要だからである.

命題 2.20 の証明にでてきた $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{N}(f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)} f_k$ は f のよい近似になっていることを示そう. すなわち

命題 2.21.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ を $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で正規直交系とする. このとき, $f \in L^2(-\pi,\pi)$, $N \in \mathbb{N}$ と $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N}(f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)} f_k\right\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leq \left\|f - \sum_{k=1}^{N}\beta_k f_k\right\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

が成り立つ.

証明.

$\alpha_k = (f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}$ とおく. $l = 1, \ldots, N$ に対して

$$\left(f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k, f_l\right)_{L^2(-\pi,\pi)} = \alpha_l - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (f_k, f_l)_{L^2(-\pi,\pi)} = 0$$

だから

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \beta_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 &= \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k - \sum_{k=1}^{N} \beta_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \\
&= \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 + \left\| \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k - \beta_k) f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 \\
&\quad + 2 \left(f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k, \sum_{l=1}^{N} (\alpha_l - \beta_l) f_l \right)_{L^2(-\pi,\pi)} \\
&\geq \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2
\end{aligned}$$

となる. □

2.4. 可測関数に対する Fourier 級数の収束

連続関数に対する Fourier 級数の収束 (定理 2.8, 定理 2.10) では, Fourier 係数からなる級数の条件 (2.11) や 2 階微分可能性など, 何らかの条件が必要であった. そのかわりに, Fourier 級数の収束は $(-\pi, \pi)$ 上の一様収束という強い収束を示すことができる. では, 不連続な関数など, 条件が悪い関数についての Fourier 級数はどうなっているのだろうか？ この答えとして, 今までに述べた L^2 空間における収束を用いると, Fourier 級数の収束はきれいな形で書ける. すなわち, Fourier 級数の収束を一様収束から L^2 空間の収束に弱くすることによって, より性質の悪い関数においても, Fourier 級数の収束性を論ずることができる.

定理 2.22.
$f \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して, a_k, b_k を (2.1) で定めれば

(2.19) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

が $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で成り立つ. すなわち,

$$F_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{2.20}$$

とおけば, $\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0 \quad (N \to \infty)$ が成り立つ.

証明.

任意に $\varepsilon > 0$ をとると定理 2.18 より, $\|f - g\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{\varepsilon}{2}$ となる $g \in C_0^\infty(-\pi,\pi)$ がとれる. すると, 命題 2.21 より

$$\begin{aligned}\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} &\le \|f - F_N^g\|_{L^2(-\pi,\pi)} \\ &\le \|f - g\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|g - F_N^g\|_{L^2(-\pi,\pi)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \|g - F_N^g\|_{L^2(-\pi,\pi)}\end{aligned}$$

とできる. ここで, F_N^g は g に対する Fourier 級数の部分和, すなわち

$$F_N^g(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\tilde{a}_k \cos(kx) + \tilde{b}_k \sin(kx))$$

であって, $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ は g に対する Fourier 係数である.

g は定理 2.10 の仮定をすべてみたしている. 実際に $\operatorname{supp} g \subset (-\pi,\pi)$ であることから $g(\pm\pi) = g'(\pm\pi) = 0$ であり, g'' の可積分性も従う. だから, F_N^g は g に $(-\pi,\pi)$ 上一様収束する. すると,

$$\begin{aligned}\|g - F_N^g\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - F_N^g(x)|^2\, dx \\ &\le 2\pi \sup_{y\in(-\pi,\pi)} |g(y) - F_N^g(y)|^2 \to 0 \quad (N \to \infty)\end{aligned}$$

となるから, $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \ge N_0$ ならば $\|g - F_N^g\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる. まとめると, $N \ge N_0$ ならば $\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} < \varepsilon$ となるので, $\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0\ (N \to \infty)$ が得られた. □

Bessel の不等式 (定理 2.2) の前に「Bessel の不等式 (2.6) は (2.5) よりも精密な評価である」と述べた. このことを説明しよう. つまり, Bessel の不等式は実は等式になるということである.

定理 2.23 (Perseval の等式)**.**
$f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して, a_k, b_k を f の Fourier 係数とすると, **Perseval の等式**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \tag{2.21}$$

が成り立つ.

証明.
(2.8) の計算を同様に進めると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\right|^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

となるのであった. L^2 ノルムや部分和 F_N を使って書くと

$$\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 = \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\right) \tag{2.22}$$

となる. 定理 2.22 により, (2.22) 式で $N \to \infty$ とすれば, $\|f - F_N\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0$ となるのだから,

$$0 = \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

となり, Perseval の等式 (2.21) が得られた. □

一般に $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交系 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$ が完全正規直交系であるとは, Bessel の不等式 (2.17) が等号で成り立つこと, すなわち, 任意の $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, f_k)_{L^2(-\pi,\pi)}|^2 = \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2$$

が成り立つことをいう. Perseval の等式 (2.21) は (1.5) で与えた $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

が $L^2(-\pi,\pi)$ の完全正規直交系であることを意味している．

さて, 不連続な関数であっても $L^2(-\pi,\pi)$ 上での収束を示すことができたわけであるが, $L^2(-\pi,\pi)$ 上で収束しても, 一般に各点収束は得られないことが知られている．つまり, (2.19) はすべての $x \in (-\pi,\pi)$ について成り立っているわけではない．そこで, (2.19) の各点収束性について, 考察を進めることにしよう．$N \in \mathbb{N}$ に対して, f の Fourier 係数を (2.20) に代入すると

(2.23)

$$\begin{aligned}
F_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(0y)\,dy + \sum_{k=1}^{N}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,dy\right)\cos(kx)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,dy\right)\sin(kx)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(0y)\,dy \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(\cos(ky)\cos(kx)+\sin(ky)\sin(kx))\,dy\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(1+\sum_{k=1}^{N} 2\cos(k(y-x))\right)dy
\end{aligned}$$

となる．すなわち, $1+\sum_{k=1}^{N} 2\cos(kx)$ の $N\to\infty$ の挙動が $F_N(x)$ の挙動を決めていると考えられる．この級数は, Dirichlet 核と呼ばれている．すなわち,

定義 2.24 (Dirichlet 核)**.**

$N \in \mathbb{N}$ に対して **Dirichlet 核** $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^{N} 2\cos(kx), \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定める．

Dirichlet 核の級数を級数を用いずに表示してみよう. Euler の公式 $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
D_N(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{N}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = \sum_{k=0}^{N}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - 1 \\
&= \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} - 1 \\
&= \frac{2 - (e^{i(N+1)x} + e^{-i(N+1)x}) - (e^{ix} + e^{-ix}) + (e^{iNx} + e^{-iNx})}{2 - e^{ix} - e^{-ix}} - 1 \\
&= \frac{\cos(Nx) - \cos((N+1)x)}{1 - \cos x}
\end{aligned}
$$

が得られる. $\cos(Nx) - \cos((N+1)x) = \cos(Nx)(1 - \cos x) + \sin Nx \sin x$ と $1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$, $\sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ を利用すると

$$\frac{\cos(Nx) - \cos((N+1)x)}{1 - \cos x} = \cos(Nx) + \frac{\sin(Nx)}{\tan(x/2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が得られる. まとめて, 次が成り立つ.

命題 2.25.

$N \in \mathbb{N}$ に対して Dirichlet 核 D_N は

(2.24) $$D_N(x) = \cos(Nx) + \frac{\sin(Nx)}{\tan(x/2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

と書ける.

次に, (2.23) を Dirichlet 核 D_N を用いて書きかえる. $y - x = t$ と変数変換すると,

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(y-x)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_N(t)\,dt$$

となる. 次に, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x+2\pi) = f(x)$ となるように f を $\mathbb{R}$ 全体に拡張する. $-\pi - x \le k_0\pi < \pi - x$ なる奇数 $k_0 \in \mathbb{Z}$ をとると $t = \tau - 2\pi$ と変数

変換をすれば, D_N, f の周期性から

$$\begin{aligned}F_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi-x}^{k_0\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt + \int_{k_0\pi}^{\pi-x} f(x+t)D_N(t)\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\pi-x}^{(k_0+2)\pi} f(x+\tau-2\pi)D_N(\tau-2\pi)\,d\tau + \int_{k_0\pi}^{\pi-x} f(x+t)D_N(t)\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{k_0\pi}^{(k_0+2)\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt\end{aligned}$$

となる. 再度, f, D_N の周期性, D_N が偶関数であることより, 変数変換を行えば, k_0+1 が偶数であることに注意すると

$$\begin{aligned}F_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))D_N(t)\,dt\end{aligned} \tag{2.25}$$

が得られる.

$f \equiv 1$ に対する Fourier 係数は $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ だから $x \in \mathbb{R}$ に対して $F_N(x) = 1$ となる. また, $x, t \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+t) + f(x-t) = 2$ だから (2.25) より

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(x)\,dx = 1 \tag{2.26}$$

が得られる.

話を簡単にするために, $f \in L^2(-\pi,\pi)$ は $x = 0$ 以外の点では連続と仮定しよう. このとき, $F_N(0)$ はどこに収束しているのだろうか？ その結論を述べるために, 記号を用意する. $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} \tag{2.27}$$

とおく. f が $x \in (-\pi,\pi)$ で連続であれば, $\tilde{f}(x) = f(x)$ となる. $x \in (-\pi,\pi)$ で連続でない場合は, 一般に $\tilde{f}(x) \neq f(x)$ である. たとえば,

$$g(x) := \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases} \tag{2.28}$$

で定めた関数 $g : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ に対しては, $\tilde{g}(0) = 0 \neq g(0)$ である.

定理 2.26.
$f \in L^2(-\pi,\pi)$ は $x=0$ 以外の点では連続と仮定し, (2.27) で定めた $\tilde{f}(0)$ が存在するとする. さらに

$$\frac{\frac{f(t)+f(-t)}{2}-\tilde{f}(0)}{t} \in L^2(-\pi,\pi) \tag{2.29}$$

を仮定する. すると, (2.20) で定めた部分和 F_N について $F_N(0) \to \tilde{f}(0)$ $(N\to\infty)$ が成り立つ.

証明.
(2.25) と (2.26), (2.24) より

$$\begin{aligned}F_N(0)-\tilde{f}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(t)+f(-t)}{2}D_N(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \tilde{f}(0)D_N(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(t)+f(-t)}{2}-\tilde{f}(0)\right)\left(\cos(Nt)+\frac{\sin(Nt)}{\tan(t/2)}\right)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \left(\frac{f(t)+f(-t)}{2}-\tilde{f}(0)\right)\left(\cos(Nt)+\frac{\sin(Nt)}{\tan(t/2)}\right)dt\end{aligned}$$

となる. $g(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}-\tilde{f}(0)$ とおくと

$$F_N(0)-\tilde{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^\pi g(t)\cos(Nt)\,dt + \int_{-\pi}^\pi \frac{g(t)}{\tan(t/2)}\sin(Nt)\,dt\right)$$

となっている. $g, \frac{g(t)}{\tan(t/2)} \in L^2(-\pi,\pi)$ がわかれば, Bessel の不等式 (定理 2.2) より $F_N(0)-\tilde{f}(0)\to 0$ $(N\to\infty)$ がわかる.

$f \in L^2(-\pi,\pi)$ だったので,

$$\int_{-\pi}^\pi |g(t)|^2\,dt \le 3\int_{-\pi}^\pi \left(\frac{|f(t)|^2}{4}+\frac{|f(-t)|^2}{4}+|\tilde{f}(0)|^2\right)dt < \infty$$

すなわち, $g\in L^2(-\pi,\pi)$ がわかる. 次に, $\frac{\sin t}{t}\to 1$ $(t\to 0)$ だから, $-\pi<t<\pi$ に対して

$$\left|\frac{g(t)}{\tan(t/2)}\right| = \left|\frac{g(t)}{t}\right|\left|\frac{t}{\sin(t/2)}\right||\cos(t/2)| \le C\left|\frac{g(t)}{t}\right|$$

となる t によらない定数 $C>0$ を取ることができる. 仮定 (2.29) より, $\frac{g(t)}{t} \in L^2(-\pi,\pi)$ だから, $\frac{g(t)}{\tan(t/2)} \in L^2(-\pi,\pi)$ となることがわかった. □

定理 2.26 の仮定 (2.29) をどう調べればよいかが残った問題であるが, 具体例をみるに留めることにする.

例 2.27.

(2.28) で与えた関数

$$f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

について, $\tilde{f}(0) = 0$ であった. $t \neq 0$ にたいして, $f(t) + f(-t) = 0$ だから, (分子が 0 になっているので)(2.29) の仮定は成り立つ.

例 2.28.

関数 $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} -x - 3 & -\pi < x < 0 \\ 2x + 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

とおくと

$$\tilde{f}(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\varepsilon) + f(-\varepsilon)}{2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{2\varepsilon + 1 - (-\varepsilon) - 3}{2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{3\varepsilon - 2}{2} = -1$$

となる. $t > 0$ にたいして,

$$\frac{\frac{f(t)+f(-t)}{2} - \tilde{f}(0)}{t} = \frac{\frac{3t-2}{2} - (-1)}{t} = \frac{3}{2}$$

だから (2.29) の仮定は成り立つ.

2.5. 熱方程式への応用

一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, \ x \in (-\pi, \pi) \tag{2.30}$$

に周期境界条件

$$u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad t > 0 \tag{2.31}$$

と初期条件

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{2.32}$$

をつけた問題を考える. 未知関数 $u = u(t, x) : [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ は, 単位円の形をした細い針金の時間 t, 位置 x(rad) における温度を表すとき, (2.30), (2.31) が成り立つことが知られている. 時刻 $t = 0$ における温度 $u_0 = u_0(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ を与えたときに, 時刻 t で温度 u がどうなっているかが知りたい問題である. これを知らべるために, Fourier 級数を利用しよう.

しばらくの間, u_0 や u がどのような条件をみたすかは考えないことにして形式的な計算をしてみる.

与えられた関数 u_0 と未知関数 u を Fourier 級数展開

$$u_0(x) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^0 \cos(kx) + b_k^0 \sin(kx) \right),$$

$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos(kx) + b_k(t) \sin(kx))$$

して, Fourier 係数 $a_k(t)$, $b_k(t)$ を求めよう．この設定のもとで, 周期境界条件 (2.31) がみたされていることに注意しておく．$\frac{\partial u}{\partial t}$ と $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k'(t) \cos(kx) + b_k'(t) \sin(kx) \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(t)(-k^2) \cos(kx) + b_k(t)(-k^2) \sin(kx) \right)$$

となるから, (2.30), (2.32) に代入して係数を比較すると, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} a_k'(t) &= -k^2 a_k(t), \qquad & b_k'(t) &= -k^2 b_k(t), \\ a_k(0) &= a_0^0, & b_k(0) &= b_k^0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

となる．また, $a_0'(t) = 0$ かつ $a_0(0) = a_0^0$ が得られる．$a_0'(t) = 0$ より $a_0(t) = a_0(0) = a_0^0$ はすぐにわかる. 次に (2.33) から $a_k(t)$, $b_k(t)$ を求めよう.

$a_k'(t) + k^2 a_k(t) = 0$ だから, 天下り的ではあるが, $e^{k^2 t}$ を (2.33) にかけると

$$\frac{d}{dt}(e^{k^2 t} a_k(t)) = 0$$

が得られる．従って, $e^{k^2 t} a_k(t) = e^{k^2 0} a_k(0) = a_k^0$ となるので, 結局 $a_k(t) = a_k^0 e^{-k^2 t}$ が得られた. 同様にして, $b_k(t) = b_k^0 e^{-k^2 t}$ も得られる. 従って,

$$u(t, x) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^0 e^{-k^2 t} \cos(kx) + b_k^0 e^{-k^2 t} \sin(kx) \right) \tag{2.34}$$

が得られた.

a_k^0, b_k^0 が有限となる条件, たとえば, u_0 は $(-\pi, \pi)$ 上可積分であるとすれば, $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left(|a_k^0 e^{-k^2 t}| + |b_k^0 e^{-k^2 t}| \right) < \infty \tag{2.35}$$

が得られる. なぜなら, $k \to \infty$ に対して $k^{m+2}e^{-k^2 t} \to 0$ となるからである. まとめると, (2.34) の右辺は, t, x で微分したものも含めて $(-\pi, \pi)$ 上一様収束する. 従って次のことが結論できる.

定理 2.29.
$u_0 \in L^2(-\pi, \pi)$ とする. このとき, (2.34) の右辺の級数は $(-\pi, \pi)$ 上一様収束する. さらに (2.30), (2.31) をみたし, (2.32) を $L^2(-\pi, \pi)$ の意味でみたす. すなわち, $L^2(-\pi, \pi)$ の意味で $u(t, \cdot) \to u_0$ $(t \downarrow 0)$ が成り立つ.

証明.
(2.32) の証明を与える. Perseval の等式より

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t,x) - u_0(x)|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k^0(e^{-k^2 t} - 1)|^2 + |b_k^0(e^{-k^2 t} - 1)|^2\right) \tag{2.36}$$

となるから, (2.36) の右辺が $t \in (0, 1)$ 上一様収束していることがわかれば, 極限と級数の交換ができて $t \downarrow 0$ としたときに

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k^0(e^{-k^2 t} - 1)|^2 + |b_k^0(e^{-k^2 t} - 1)|^2\right) \to 0$$

が結論できる.

$0 < t < 1$ に対して

$$|a_k^0(e^{-k^2 t} - 1)|^2 \leq 2|a_k^0|^2(|e^{-k^2 t}|^2 + 1^2) \leq 4|a_k^0|^2$$

となり, $u_0 \in L^2(-\pi, \pi)$ だから $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k^0|^2 + |b_k^0|^2) < \infty$ となる. 従って, Weierstrass の優級数判定法より, (2.36) の右辺は $t \in (0, 1)$ 上一様収束する. □

最後に (2.35) から得られる重要な結果を述べておく. (2.34) の右辺は, (2.35) より x, t について何回でも微分可能となる. つまり, (2.30) の解は滑らかな関数になるということである. これは熱方程式のもつ特性であって, まったく自明なことではない. 実際に, 定理 2.29 の初期条件の仮定は $u_0 \in L^2(-\pi, \pi)$ であって, u_0 は微分とは限らない (なんとならば, 連続ですらないかもしれない) のである. すなわち, u_0 が微分できない関数であったとしても, 熱方程式の解は時刻が少しでもたてば滑らかになってしまうのである. また, 熱方程式 (2.30) をみたす u が求める微分可能性は, t について 1 階, x について 2 階であって, これ以上の微分可能性が得られるかどうかは方程式からすぐにわかることではない. このように微分方程式の解がどれだけ微

分可能性を持つかを調べる理論を正則性理論といい, 微分方程式の研究で重要な問題の一つである.

2.6. 等周不等式

単純閉曲線とは, 自身とは交わらない閉じた曲線のことである. 例えば, 周の長さが l の長方形を考えてみると, その長方形の面積 A について

$$16A \leq l^2 \tag{2.37}$$

となることと, 正方形で等号が成立することは簡単にわかる. では, 一般の単純閉曲線 C についてはどうだろうか？

定理 2.30 (等周不等式)**.**
滑らかな単純閉曲線 C の周の長さを l, 囲う面積を A とすると

$$4\pi A \leq l^2 \tag{2.38}$$

が成り立つ.

この不等式 (2.38) を**等周不等式**という. C として, 半径 r の円を考えると, $l = 2\pi r$, $A = \pi r^2$ だから, (2.38) で等号が成り立つことがわかる. つまり, **円は周の長さを一定にしたときに, 囲う面積を最大にする曲線**ということがわかる.

定理 2.30 の証明の方針.
1. 単純閉曲線 C を周の長さが l であることに注意して

$$C : (x(t), y(t)), \quad |(\dot{x}(t), \dot{y}(t))| = \frac{l}{2\pi} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とパラメータ表示すると,

$$\int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{l^2}{4\pi^2}\, dt = \frac{l^2}{2\pi}$$

が得られる. 一方, Green の定理 (現代解析学 I) によると

$$A = -\int_C y\, dx$$

だったから, $dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}\,dt$ に注意すると

$$\begin{aligned} l^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + 2y(t)\dot{x}(t))\,dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t)) + y(t))^2\,dt + 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{y}(t))^2 - y^2(t))\,dt \end{aligned}$$

となるので,

$$\int_0^{2\pi} ((\dot{y}(t))^2 - y^2(t))\,dt \geq 0 \tag{2.39}$$

が得られれば (2.38) が得られる.

2. y を Fourier 級数展開して

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos(kt) + b_n \sin(kt))$$

と表すと

$$\dot{y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-ka_n \sin(kt) + kb_k \cos(kt)) \tag{2.40}$$

となる. $y(t) - \frac{a_0}{2}$ をあらためて $y(t)$ とおくと, $a_0 = 0$ となるように C を y 軸方向に平行移動したことになり,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\dot{y}(t))^2\,dt &= (\dot{y}, \dot{y})_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2), \\ \int_0^{2\pi} y(t)^2\,dt &= (y, y)_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \end{aligned} \tag{2.41}$$

がわかる. $k^2 \geq 1$ より, (2.41) の級数を比較すれば (2.39) が得られる. □

注意 2.31.

定理 2.30 の証明は Hurwitz による. Hurwitz は等周不等式 (2.38) で等号が成立するのは円のときに限ることも証明している. 詳しくは, [**6**, §4.4], [**3**, Chapter 4 §1] を参照せよ.

注意 2.32.

(2.40) で行った微分について, 微分と級数の交換は自明ではないし, (2.41) の $\dot{y}$ に関する右辺の級数の収束も自明ではない. 従って, パラメータ表示に使った x や y にどの程度の条件が必要か？ つまり, 曲線 C にどの程度の条件を仮定すべきか？ も考察すべき問題である. 上記で述べた証明の大筋が

最も重要ではあるが, 大筋を正当化させるための曲線 C に課すべき条件を明らかにさせることもまた重要である.

第 3 章

Fourier 変換

この章では, 複素ベクトル空間の知識を使う. 以下, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. 複素数値 L^2 空間 $L^2(-\pi, \pi)$ を

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

と定める. $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して, f, g の $L^2(-\pi,\pi)$ 内積を

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

で定める. 共役をとることに注意すること. Euler の公式により, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{3.1}$$

となることも注意しておこう.

3.1. 複素 Fourier 級数

$f \in L^2(-\pi,\pi)$ が実数値関数のとき, $L^2(-\pi,\pi)$ の意味で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{3.2}$$

と Fourier 級数展開できた. a_k, b_k は Fourier 係数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \tag{3.3}$$

であった. Euler の公式 (3.1) の変形

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

を Fourier 級数 (3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}e^{i0x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) \\ &= \frac{a_0}{2}e^{i0x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \end{aligned} \tag{3.4}$$

とかける. ここで,

$$c_k := \frac{a_k - ib_k}{2} \tag{3.5}$$

は**複素 Fourier 係数**と呼ばれる係数である. sin が奇関数だから

$$b_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-kx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = -b_k$$

となるので, (3.3) の k の範囲を整数に広げれば, 複素 Fourier 係数 (3.5) の定義は自然であることに注意しよう.

命題 3.1.
$k, l \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(e^{ikx}, e^{ilx})_{L^2(-\pi,\pi)} = 2\pi\delta_{kl} \tag{3.6}$$

証明.
複素数値 L^2 空間の内積は共役を取ることに注意すると

$$(e^{ikx}, e^{ilx})_{L^2(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{ilx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x}\,dx$$

となる. $k \neq l$ のとき

$$(e^{ikx}, e^{ilx})_{L^2(-\pi,\pi)} = \left[\frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)x}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

となる. $k = l$ のとき, $e^{i(k-l)x} = 1$ となるから

$$(e^{ikx}, e^{ilx})_{L^2(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$$

となる. □

命題 3.1 より, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交系となる. 従って, (3.4) の c_k は

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}(f, e^{ikx})_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx) - i\sin(kx))\,dx = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \end{aligned}$$

となり, 正規直交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ で f を展開した係数と一致する. まとめて, 次が得られる.

定理 3.2.
$f \in L^2(-\pi,\pi)$ の複素 Fourier 級数展開は

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \tag{3.7}$$

で与えられる. (3.7) の右辺の Fourier 級数は次の意味で収束する:

$$\left\| f - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \right\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0 \quad (N \to \infty). \tag{3.8}$$

注意 3.3.
(3.8) の収束は, 通常の無限級数の収束**ではない.** 通常の無限級数の収束は

$$\left\| f - \sum_{k=-N}^{M} c_k e^{ikx} \right\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

と正の無限大と負の無限大で別の部分和 (つまり N と M) を用いなければならない. (3.8) で $k=-N$ から $k=N$ までの和を考えるのは, $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ で考えたときに $k=0$ から $k=N$ まで考えることに相当する.

3.2. 可積分関数に対する Fourier 変換

$a < b$ に対して, 複素数値 L^2 空間 $L^2(a,b)$ を

$$L^2(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数}, \int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}$$

と定める. $f, g \in L^2(a,b)$ に対して, f, g の $L^2(a,b)$ 内積を

$$(f,g)_{L^2(a,b)} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

で定める. 次に, $L > 0$ と $f \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ に対して $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ を

$$g(y) := f\left(\frac{L}{2\pi}y\right), \quad y \in (-\pi, \pi)$$

で定めると, $g \in L^2(-\pi, \pi)$ である. 実際に $x = \frac{L}{2\pi}y$ と変数変換すると, $f \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(y)|^2\,dy = \frac{2\pi}{L}\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

となる. そこで, $g \in L^2(-\pi, \pi)$ の複素 Fourier 級数展開

$$g(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iky}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iky}\,dy$$

を f で書きかえてみよう. $x = \frac{L}{2\pi}y$ と変数変換すると

(3.9)
$$c_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-\frac{2\pi ikx}{L}}\,dx, \quad f(x) = \frac{1}{L}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-\frac{2\pi ikx}{L}}\,dx\right)e^{\frac{2\pi ikx}{L}}$$

となる. 形式的になるが, (3.9) の級数を区分求積法にみたてて, $L \to \infty$ とすると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx\right)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi \tag{3.10}$$

が得られる. さて, これはどこまで正しいのだろうか? $L \to \infty$ とすることについては, 有限区間で考えていた関数から, 無限区間で定義された関数, もしくは周期性がない関数の Fourier 級数なるものを考えることに相当する. このことからも, $L \to \infty$ を考えることには意味がある.

まず, Fourier 係数から考えることにしよう.

定義 3.4 (Fourier 変換)**.**
可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して, f の **Fourier 変換** $\mathscr{F}[f]$, $\hat{f}$ を

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

で定める.

Fourier 変換の基本的な性質を確認しよう．そのために, 可積分関数のなす空間 $L^1(\mathbb{R})$ を

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}) &:= \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, f,\ \mathrm{Im}\, f \text{ は可測関数},\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty \right\}, \\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} &:= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

と定める．

命題 3.5.
$\mathscr{F}$ は $L^1(\mathbb{R})$ 上で定義された線形写像であり, $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathscr{F}[f](\xi)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{3.13}$$

が成り立つ．

証明.
$f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} |\mathscr{F}[f](\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2\pi i x \xi}|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

となるので, $\xi \in \mathbb{R}$ について上限をとれば (3.13) が得られる．
$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f+g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f(x) + g(x)) e^{-2\pi i x \xi}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = (\mathscr{F}[f] + \mathscr{F}[g])(\xi), \\ \mathscr{F}[cf](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (c f(x)) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = c \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = (c\mathscr{F}[f])(\xi) \end{aligned} \tag{3.14}$$

となるから, $\mathscr{F}$ は $L^1(\mathbb{R})$ 上の線形写像となる． □

$h \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対してそれぞれ

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h), \qquad (\delta_\lambda f)(x) := f(x/\lambda) \tag{3.15}$$

で定める.

命題 3.6.
$h \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ に対して, 平行移動作用素 τ_h とスケール変換 δ_λ を (3.15) で定めたものとすると, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i \xi h}\widehat{f}(\xi), \quad \widehat{(\delta_\lambda f)}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi) \tag{3.16}$$

が成り立つ.

証明.
$h \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して, $y = x - h$ と変数変換することにより,

$$\begin{aligned}\widehat{(\tau_h f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \tau_h f(x) e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-h) e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i(y+h)\xi}\,dy \\ &= e^{-2\pi i h\xi}\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y\xi}\,dy = e^{-2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

が得られる.

$\lambda > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して, $y = x/\lambda$ と変数変換することにより,

$$\begin{aligned}\widehat{(\delta_\lambda f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \delta_\lambda f(x) e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x/\lambda) e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i(\lambda y)\xi}\lambda\,dy \\ &= \lambda\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y(\lambda\xi)}\,dy = \lambda\widehat{f}(\lambda\xi)\end{aligned}$$

が得られる. □

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, f と g のたたみこみ (convolution) $f * g$ は

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

で定義されるのであった.

命題 3.7.
$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \tag{3.17}$$

が成り立つ.

証明.
$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, 形式的に積分を交換して, $z = x - y$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
\widehat{(f*g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy \right) e^{-2\pi i x\xi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\xi}\, dx \right) g(y) e^{-2\pi i y\xi}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i z\xi}\, dz \right) g(y) e^{-2\pi i y\xi}\, dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

が得られる.

Fubini の定理を用いて (3.18) を正当化しよう. 非負値可測関数の Lebesgue 積分は Fubini-Tonelli の定理より積分の順序交換が可能だから,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left| f(x-y) g(y) e^{-2\pi i x\xi} \right| dxdy &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z)|\, dz \right) dy < \infty
\end{aligned}$$

となるので, $|f(x-y)g(y)e^{-2\pi i x\xi}|$ が $\mathbb{R}^2$ 上可積分となる. これにより, Fubini の定理から (3.18) の積分の計算が正当化できる. □

3.3. Gauss 核の Fourier 変換

関数 $e^{-|x|^2}$ は様々な分野で現れる基本的な関数である. 例えば, 熱方程式の階を Fourier 級数で求めたときに, (2.34) において, $e^{-k^2 t}$ が各 Fourier 係数にかけられていたのであった. そこで, $e^{-|x|^2}$ の Fourier 変換を調べる.

定義 3.8 (Gauss 核)**.**
$\lambda > 0$ に対して **Gauss 核** g_λ を

$$g_\lambda(x) := \exp(-\pi\lambda|x|^2), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

で定める.

この Gauss 核の Fourier 変換を計算しよう.

定理 3.9.
$\lambda > 0$ に対して, g_λ を Gauss 核とすると

$$\widehat{g_\lambda}(\xi) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp(-\pi|\xi|^2/\lambda) \tag{3.20}$$

が成り立つ.

定理 3.9 の証明は $\lambda = 1$ の場合を示せば十分であることを先に注意しておこう. 実際に $\widehat{g_1}(\xi) = \exp(-\pi|\xi|^2)$ が示せれば,

$$g_\lambda(x) = \exp\left(-\pi\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right)^2\right) = \delta_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} g_1(x)$$

だから, 命題 3.6 より

$$\widehat{g_\lambda}(\xi) = \widehat{\delta_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} g_1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} g_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\pi\frac{|\xi|^2}{\lambda}\right)$$

となり, (3.20) が得られる.

g_1 の Fourier 変換を計算するために, 次の命題を示す.

命題 3.10.
可測関数 $f = f(x,\xi) : (a,b)\times(c,d) \to \mathbb{R}$ は ξ について偏微分可能であるとし, x について $f, \frac{\partial f}{\partial \xi}$ が可積分であるとする. ある可積分関数 $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ がとれて $x \in (a,b), \xi \in (c,d)$ に対して $|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)| \le g(x)$ が成り立つとする. このとき

$$\frac{d}{d\xi}\int_a^b f(x,\xi)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\,dx \tag{3.21}$$

が成り立つ.

証明.

$h \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,\xi+h)\,dx - \int_a^b f(x,\xi)\,dx\right) = \int_a^b \frac{f(x,\xi+h)-f(x,\xi)}{h}\,dx \tag{3.22}$$

の右辺の被積分関数を考える.

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,\xi+h)-f(x,\xi)}{h}\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt}f(x,\xi+th)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi+th)h\,dt\right| \le g(x)\end{aligned}$$

となるので, Lebesgue の優収束定理より, 積分と極限の順序交換ができる. (3.22) で $h \to 0$ とすれば (3.21) が得られる. □

定理 3.9 の証明.

g_1 の Fourier 変換を計算すると, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{g_1}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(|x|^2+2\pi i x\xi+i^2|\xi|^2)+i^2|\xi|^2}\,dx \\ &= e^{-\pi|\xi|^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx =: e^{-\pi|\xi|^2}f(\xi)\end{aligned}$$

となる. $f(\xi)=1$ を示せばよい.

$\xi_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi_0)$ を計算する. $\xi_0 - 1 \le \xi \le \xi_0 + 1$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\exp\left(-\pi(x+i\xi)^2\right) = -2\pi i(x+i\xi)\exp\left(-\pi(x+i\xi)^2\right)$$

だから

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}\exp\left(-\pi(x+i\xi)^2\right)\right| \le 2\pi(|x|+|\xi_0|+1)\exp(-\pi x^2)\exp(\pi(|\xi_0|+1)^2)$$

となり, 右辺は $x \in \mathbb{R}$ について可積分なので, 微分と積分の順序が交換可能であり

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi_0) &= -2\pi i\int_{-\infty}^{\infty}(x+i\xi_0)\exp(-\pi(x+i\xi_0)^2)\,dx \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\exp(-\pi(x+i\xi_0)^2)\,dx \\ &= \left[\exp(-\pi(x+i\xi_0)^2)\right]_{x=-\infty}^{\infty} = 0\end{aligned} \tag{3.23}$$

となる. よって, f は定数関数となり, $f(\xi)=f(0)$ となる.

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi|x|^2)\,dx=1$$

より, $f(\xi)=1$ となることがわかった. □

3.4. 急減少関数の Fourier 変換

一般に. $f\in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分になるとは限らない. 命題 3.5 により, $\hat{f}$ は有界な関数になるが, だからといって, $\hat{f}$ が $\mathbb{R}$ 上可積分になるかどうかはわからない (例えば, 0 でない定数関数は $\mathbb{R}$ 上可積分にならない). そのため, $\hat{f}$ が都合のよい関数になるための条件を与えよう.

定義 3.11 (Schwartz 空間)**.**
$\mathbb{R}$ 上の **Schwartz 空間** $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ を

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}):=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}):\ \text{すべての } k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ に対して } \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|f^{(l)}(x)|<\infty\} \tag{3.24}$$

で定める. $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ を**急減少関数**という.

例 3.12.
コンパクトな台を持つ関数空間 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ を

$$C_0^\infty(\mathbb{R}):=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}):\operatorname{supp}f\subset\mathbb{R}\text{ は (相対) コンパクト }\}$$

と定める. このとき, $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ となる. 実際に, $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, $\operatorname{supp}f^{(l)}\subset\operatorname{supp}f$ となる. $\operatorname{supp}f$ はコンパクト, すなわち有界閉集合となるから, ある $M>0$ が存在して, $\operatorname{supp}f\subset[-M,M]$ となる. 従って, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|f^{(l)}(x)|&=\sup_{x\in[-M,M]}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|f^{(l)}(x)|\\&=(1+M^2)^{\frac{k}{2}}\sup_{x\in[-M,M]}|f^{(l)}(x)|<\infty\end{aligned}$$

となる.

例 3.13.
$\lambda>0$ に対して Gauss 核 $g_\lambda(x)=e^{-\pi\lambda x^2}$ は $C_0^\infty(\mathbb{R})$ に属さない. しかし, $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$g_\lambda^{(l)}(x)=P_l(x)e^{-\pi\lambda x^2}$$

となる多項式 P_l がとれる. $|x| \to \infty$ としたときに, $e^{-\pi\lambda x^2}$ はどんな多項式よりも早く 0 に収束することから, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} g_\lambda^{(l)}(x) \to 0 \quad |x| \to \infty$$

がわかる. このことより, $g_\lambda \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ がわかる.

例 **3.14.**

多項式 x, x^2 や $\sin x$, $\cos x$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に属さない. しかし, $e^{-x^2}\cos x$ や $e^{-x^2}x$ などは $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に属する.

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ならば, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $(1+|x|^k)f^{(l)}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分となる. 実際, $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1+|x|^2)^{\frac{k+2}{2}} f^{(l)}(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{k+2}{2}} f^{(l)}(x) =: C < \infty$$

より,

$$(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} f^{(l)}(x) \le \frac{C}{1+|x|^2}$$

となるが, この右辺は $\mathbb{R}$ 上可積分だから, $(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} f^{(l)}(x)$ も $\mathbb{R}$ 上可積分となる. $(1+|x|^k) \le 2(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}$ に注意すれば, $(1+|x|^k)f^{(l)}$ も可積分となることがわかる.

命題 **3.15.**

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathscr{F}[f'](\xi) = (2\pi i\xi)\mathscr{F}[f](\xi), \qquad \mathscr{F}[(-2\pi ix)f](\xi) = \frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[f](\xi) \tag{3.25}$$

証明**.**

f' の Fourier 変換は部分積分により

$$\begin{aligned} \widehat{(f')}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx \\ &= \left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} + 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx \end{aligned} \tag{3.26}$$

となるが, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ より, $\left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} = 0$ となる. よって, (3.25) の第一式が示せた. 第二式については, $\frac{d}{d\xi}e^{-2\pi ix\xi} = -2\pi ixe^{-2\pi ix\xi}$ に注意すると, 形

式的に

$$(3.27)\quad \begin{aligned}(\widehat{-2\pi i x f})(\xi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x\xi}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}(f(x)e^{-2\pi i x\xi})\,dx \\ &= \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

が得られる. 積分と微分の順序交換は

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}(f(x)e^{-2\pi i x\xi})\right| = |-2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x\xi}| \leq 2\pi |x f(x)|$$

の右辺 $|xf(x)|$ が $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ だから可積分となり, 命題 3.10 の仮定をみたす. □

定理 3.16.
$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して, $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ となる.

証明.
まず, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \leq (1 + |\xi|)^k \leq 2^{k-1}(1 + |\xi|^k)$$

となることから, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $(1 + |\xi|^k)\hat{f}^{(l)}$ が $\xi \in \mathbb{R}$ について有界となることを示せばよい. 命題 3.15 より

$$\hat{f}^{(l)}(\xi) = \frac{d^l}{d\xi^l}\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}[(-2\pi i x)^l f](\xi),$$

$$|\xi|^k |\widehat{f}^{(l)}(\xi)| = |\xi|^k \left|\frac{d^l}{d\xi^l}\mathscr{F}[f](\xi)\right| = \frac{1}{(2\pi)^k}\left|\mathscr{F}[((-2\pi i x)^l f)^{(k)}](\xi)\right|$$

である. $((-2\pi i x)^l f)^{(k)}$ が可積分であることから, 命題 3.5 より $(1 + |\xi|^k)\hat{f}^{(l)}(\xi)$ が $\xi \in \mathbb{R}$ について有界であることがわかる. □

命題 3.17.
$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して, 次がが成り立つ.

$$(3.28)\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) g(y)\,dy.$$

証明.

積分の順序交換を認めれば,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-2\pi ix\xi}\,d\xi\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(\xi)e^{-2\pi ix\xi}\,dxd\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx\right)g(\xi)\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

となり証明が終わる. Fubini の定理を用いて, 積分の順序交換を正当化しよう. Fubini-Tonelli の定理より

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|f(x)g(\xi)e^{-2\pi ix\xi}\right|\,dxd\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)|\,d\xi < \infty$$

から, $|f(x)g(\xi)e^{-2\pi ix\xi}|$ が $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上可積分となるから Fubini の定理が使えて, 積分の順序交換が可能となる. □

さて, (3.10) に戻って, f の Fourier 逆変換を定義しよう. (3.10) によれば, $e^{2\pi ix\xi}$ を掛けて積分すれば, 逆変換が定義できる. すなわち次のように定義すればよい.

定義 3.18 (Fourier 逆変換)**.**

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して, f の**逆 Fourier 変換** $\mathscr{F}^{-1}[f], \check{f}$ を

$$\mathscr{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) := \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

で定める.

定理 3.16 によれば, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ である. 従って, $\hat{f}$ に対する Fourier 逆変換を考えることができる. そこで, (3.10) が正しいことを $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ のときに示そう.

定理 3.19.

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi \tag{3.30}$$

が成り立つ.

証明.

1. $\lambda > 0$ に対して, g_λ を Gauss 核, すなわち, $g_\lambda(x) = \exp(-\pi\lambda|x|^2)$ とする. このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して命題 3.17 より

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(y) (\widehat{e^{2\pi i x\xi} g_\lambda})(y)\, dy \tag{3.31}$$

となる. 実際, ξ の関数として $e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ となるからである. Gauss 核の Fourier 変換 (定理 3.9) より

$$\begin{aligned}(\widehat{e^{2\pi i x\xi} g_\lambda})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi) e^{-2\pi i y\xi}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(\xi) e^{-2\pi i (y-x)\xi}\, d\xi \\ &= \widehat{g_\lambda}(y-x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi|y-x|^2}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

だから, (3.31) は

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi)\, d\xi = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{\pi|y-x|^2}{\lambda}\right) dy \tag{3.32}$$

となる. 以下, $\lambda \downarrow 0$ としたときに (3.32) の左辺は $\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x)$ に収束すること, (3.32) の右辺は $f(x)$ に収束することを示す.

2. $\lambda \downarrow 0$ としたときに (3.32) の左辺が $\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x)$ に収束することを示す. 被積分関数について,

$$|\widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi)| g_\lambda(\xi) \le |\widehat{f}(\xi)|$$

と評価でき, $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ だから, 特に可積分である. $g_\lambda(x) \to 1$ $(\lambda \downarrow 0)$ となることから, Lebesgue の優収束定理が使えて

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} g_\lambda(\xi)\, d\xi \to \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = \mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x) \quad (\lambda \downarrow 0) \tag{3.33}$$

が得られる.

3. (3.32) の右辺が $f(x)$ に収束することを示す. 変数変換 $z = \lambda^{-\frac{1}{2}}(y-x)$ により

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{\pi|y-x|^2}{\lambda}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{\lambda} z) \exp(-\pi|z|^2)\, dz$$

となる. 次に

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi|z|^2)\, dz = 1$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\exp\left(-\frac{\pi|y-x|^2}{\lambda}\right)dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{\lambda}z)\exp(-\pi|z|^2)\,dz - \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-\pi|z|^2)\,dz\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x+\sqrt{\lambda}z)-f(x))\exp(-\pi|z|^2)\,dz\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left|(f(x+\sqrt{\lambda}z)-f(x))\right|\exp(-\pi|z|^2)\,dz
\end{aligned} \tag{3.34}$$

となる.

4. $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ だから, とくに f は有界なのである $M > 0$ がとれて, $x, w \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(w) - f(x)| \le M$$

とできる. 次に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, f は x で連続なので, $\delta > 0$ がとれて, $w \in \mathbb{R}$ に対して $|w - x| < \delta$ ならば $|f(w) - f(x)| < \varepsilon$ とできる. さらに, $\exp(-\pi|z|^2)$ が $\mathbb{R}$ 上可積分なので, $R > 0$ が存在して

$$\int_{\{|x|\ge R\}} \exp(-\pi|z|^2)\,dz < \varepsilon$$

とできる. 以上より $R\sqrt{\lambda} < \delta$ なる $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left|(f(x+\sqrt{\lambda}z)-f(x))\right|\exp(-\pi|z|^2)\,dz \\
&\le \int_{\{|z|\le R\}} \left|(f(x+\sqrt{\lambda}z)-f(x))\right|\exp(-\pi|z|^2)\,dz \\
&\qquad + \int_{\{|z|\ge R\}} \left|(f(x+\sqrt{\lambda}z)-f(x))\right|\exp(-\pi|z|^2)\,dz \\
&\le \int_{\{|z|\le R\}} \varepsilon\exp(-\pi|z|^2)\,dz + \int_{\{|z|\ge R\}} M\exp(-\pi|z|^2)\,dz \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \varepsilon\exp(-\pi|z|^2)\,dz + M\varepsilon = (1+M)\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.35}$$

となるから, (3.34) と組み合わせると (3.32) の右辺は $\lambda \downarrow 0$ としたときに $f(x)$ に収束することがわかった.

5. 以上より, (3.32) で $\lambda \downarrow 0$ とすれば $\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x)$ が得られる. □

注意 **3.20.**

等式 (3.10) は $\lambda = 0$ のときには成立しない. なぜなら, $|e^{2\pi i x\xi}| = 1$ とな

るために, ξ の関数として $e^{2\pi i x\xi}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に属さないからである. Gauss 核 g_λ を掛けたことで, 命題 3.17 が使えるようにしたのである.

注意 3.21.

等式 (3.30) で $\xi = -\eta$ と変数変換すると

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-\eta)e^{-2\pi i x\eta}\,d\eta = \mathscr{F}[\check{\widehat{f}}](x)$$

が得らえる. すなわち, $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}$ のどちらも L^2 上の恒等写像になる. このことから, $\mathscr{F}^{-1}$ は $\mathscr{F}$ の逆写像であることがわかる.

3.5. Fourier 変換の L^2 理論

急減少関数は何回でも微分可能な関数であった. 応用上は, 微分ができない関数についても, よい性質, たとえば逆変換が定義できる枠組みで Fourier 変換を定義したい. 可積分関数の Fourier 変換は定義できるので, 逆変換が定義できるかどうかが問題である. まず, Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R})$ で等長となることを示す.

定理 3.22 (Plancherel の定理)**.**

$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R})} = (\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3.36}$$

が成り立つ. とくに,

$$\|\mathscr{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3.37}$$

となる.

証明.

(3.36) の内積は複素内積であることに注意する. 従って,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\check{\overline{g}}(\xi)\,d\xi \tag{3.38}$$

となる. 実際

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{g}}(\xi) &= \overline{\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-2\pi i x\xi}\,d\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi = \check{\overline{g}}(\xi)\end{aligned}$$

となる. 命題 3.17 と定理 3.19 より
(3.39)
$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}^{\vee}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\overline{\widehat{g}}^{\vee}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\,dx = (f,g)_{L^2(\mathbb{R})}$$

が得られる. $g=f$ とすれば (3.37) が得られる. □

(3.37) に注目すると, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して $\|\mathscr{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ がわかる. $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密であったことに注意すると, $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, ある $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ がとれて, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ とできる. さらに $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ がなりたっていたことから, $\mathscr{F}[f_k]$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上の全単射写像になっていた. f_k は f に近いわけだから, $\mathscr{F}[f] = \lim_{k\to\infty}\mathscr{F}[f_k]$ とさだめるのはおかしなことではないだろう. しかし, 注意すべきこととして, $\mathscr{F}[f]$ が近似列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ の選び方に依存しているかもしれないので, 依存しないこと (つまり well-defined であること) を示す必要がある. このことを示そう. すなわち

命題 3.23.
$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ をみたすものとする.

(1) ある $g \in L^2(\mathbb{R})$ が存在して, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}[f_k] \to g$ となる.
(2) $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\tilde{f}_k \to f$ をみたすものとすると, (1) でとれる g について $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}[\tilde{f}_k] \to g$ が成り立つ.

証明.
1. (1) を示す. $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ が $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ をみたすならば, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ は $L^2(\mathbb{R})$ の距離で Cauchy 列 となるから

$$\|f_k - f_l\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad (k,l\to\infty)$$

となる. $\mathscr{F}$ は線形だから, $\mathscr{F}$ の $L^2(\mathbb{R})$ での等長性 (3.37) を用いると

$$\|\mathscr{F}[f_k]-\mathscr{F}[f_l]\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathscr{F}[f_k-f_l]\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_k-f_l\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad (k,l\to\infty)$$

となるので, $\{\mathscr{F}[f_k]\}_{k=1}^\infty$ は $L^2(\mathbb{R})$ の意味で Cauchy 列となる. $L^2(\mathbb{R})$ は完備だから (定理 2.17), ある $g \in L^2(\mathbb{R})$ が存在して, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}[f_k] \to g$ となる.

2. (2) を示すために, $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\tilde{f}_k \to f$ をみたすものとする. すると, $\mathscr{F}$ の線形性と $L^2(\mathbb{R})$ での等長性 (3.37) から

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}[\tilde{f}_k]-g\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathscr{F}[\tilde{f}_k]-\mathscr{F}[f_k]+\mathscr{F}[f_k]-g\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\le \|\mathscr{F}[\tilde{f}_k]-\mathscr{F}[f_k]\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\mathscr{F}[f_k]-g\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= \|\tilde{f}_k-f_k\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\mathscr{F}[f_k]-g\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad (k\to\infty)\end{aligned}$$

となるので, $\{\mathscr{F}[\tilde{f}_k]\}_{k=1}^{\infty}$ は g に収束する. □

以上により, $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ となる $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ をとれば, $\mathscr{F}[f_k]$ が $L^2(\mathbb{R})$ の意味で収束することがわかった. この極限を用いて, $f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を定義しよう.

定義 3.24.
$f \in L^2(\mathbb{R})$ の **Fourier 変換** $\mathscr{F}[f]$ を $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ となる $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を用いて, 命題 3.23 で取れる g に対して, $\mathscr{F}[f] := g$ で定義する.

命題 3.23 を用いれば, Schwartz 空間の関数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ で成り立っていた全単射の性質が $L^2(\mathbb{R})$ で成り立つ. このことを示すために次の有用な定理を示す.

定理 3.25.
H, H' を計量線形空間, $T : H \to H'$ を線形写像とする. このとき, 次は同値である.

(1) $C > 0$ が存在して, すべての $u \in H$ に対して, $\|Tu\|_{H'} \le C\|u\|_H$
(2) $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ が H から定まる距離で $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ となるならば, H' から定まる距離で $Tu_k \to Tu$ $(k \to \infty)$ となる.

証明.
1. (1) ならば (2) を示す. $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ が H から定まる距離で $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ となることを仮定する. すると, T は線形だから

$$\|Tu_k - Tu\|_{H'} = \|T(u_k-u)\|_{H'} \le C\|u_k-u\|_H \to 0 \quad (k\to\infty)$$

となるので, H' の意味で, $Tu_k \to Tu$ $(k \to \infty)$ となることがわかった.

2. (2) ならば (1) を示すために, 背理法を用いる. すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, ある u_k が存在して, $\|Tu_k\|_{H'} > k\|u_k\|_H$ であるとしよう. $v_k := \frac{1}{k}\frac{u_k}{\|u_k\|_H}$ と

おくと

$$\|v_k\|_H = \frac{1}{k}\left\|\frac{u_k}{\|u_k\|_H}\right\|_H = \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となるので, H の意味で $v_k \to 0$ となる. しかし,

$$\|Tv_k\|_{H'} = \left\|T\left(\frac{1}{k}\frac{u_k}{\|u_k\|_H}\right)\right\|_{H'} = \frac{1}{k}\frac{1}{\|u_k\|_H}\|Tu_k\|_{H'} \geq 1$$

となり, H' の意味で $T_k \nrightarrow 0 = T0$ $(k \to \infty)$ である. これは (2) の仮定に矛盾する. □

定理 3.25 の (1) が成り立つ線形写像 T を**有界写像**といい, (2) が成り立つ線形写像 T を**連続写像**という. 定理 3.25 は, 線形写像において, 有界性と連続性は同値であるということを主張している.

Plancherel の定理を $L^2(\mathbb{R})$ に拡張しよう. 特に, Fourier 変換が $L^2(\mathbb{R})$ 上の連続線形写像となることを示そう.

定理 3.26 (Plancherel の定理)**.**
$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $(f,g)_{L^2(\mathbb{R})} = (\mathscr{F}[f], \mathscr{F}[g])_{L^2(\mathbb{R})}$ が成り立つ. とくに, $\|\mathscr{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ となる.

証明.
$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$, $g_k \to g$ をみたすものとする. Plancherel の定理 (定理 3.22) より

$$(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} = (\mathscr{F}[f_k], \mathscr{F}[g_k])_{L^2(\mathbb{R})}$$

となる. $k \to \infty$ としたときに,

$$(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} \to (f,g)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (\mathscr{F}[f_k], \mathscr{F}[g_k])_{L^2(\mathbb{R})} \to (\mathscr{F}[f], \mathscr{F}[g])_{L^2(\mathbb{R})}$$

となることを示せばよい.

$(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} \to (f,g)_{L^2(\mathbb{R})}$ を示す. Schwarz の不等式より

(3.40)
$$\begin{aligned}|(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} - (f,g)_{L^2(\mathbb{R})}| &\leq |(f_k - f, g_k)_{L^2(\mathbb{R})}| + |(f, g_k - g)_{L^2(\mathbb{R})}| \\ &\leq \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_k\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_k - g\|_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

となる. $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $g_k \to g$ だから, $\|g_k\|_{L^2(\mathbb{R})}$ は k について有界である. すなわち, ある $M > 0$ ががとれて, すべての $k \in \mathbb{N}$ について, $\|g_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq M$

とできる．よって, $k \to \infty$ とすると

(3.41)

$$|(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} - (f, g)_{L^2(\mathbb{R})}| \leq M \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g_k - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$$

となるので, $(f_k, g_k)_{L^2(\mathbb{R})} \to (f, g)_{L^2(\mathbb{R})}$ が得られた.

$(\mathscr{F}[f_k], \mathscr{F}[g_k])_{L^2(\mathbb{R})} \to (\mathscr{F}[f], \mathscr{F}[g])_{L^2(\mathbb{R})}$ を示す．$L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換の定義より, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}[f_k] \to \mathscr{F}[f]$, $\mathscr{F}[g_k] \to \mathscr{F}[g]$ となる．あとは, 上の証明と同様である. □

Plancherel の定理 (定理 3.26) より, $\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界線形写像となることがわかる．定理 3.25 より, $\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の連続線形写像となることがわかった．すなわち, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R})$ が $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f \in L^2(\mathbb{R})$ に収束するならば, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}[f_k] \to \mathscr{F}[f]$ となることがわかる．$f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ でなくてもよいことに注意せよ.

$L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換 $\mathscr{F}$ が $L^2(\mathbb{R})$ 上で全単射となることを示そう.

定理 3.27.
$\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の全単射写像になる．とくに, $\mathscr{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ を $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\mathscr{F}^{-1}[f](x) = \mathscr{F}[f](-x)$ により定めると, $\mathscr{F}^{-1}$ は $\mathscr{F}$ の逆写像になる.

証明.
$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して Plancherel の定理 (定理 3.26) から

$$\|\mathscr{F}^{-1}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F} f(-x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F} f(x)|^2 \, dx = \|\mathscr{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

となる．これと $\mathscr{F}$ の線形性から, $\mathscr{F}^{-1}$ も $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界線形写像となることがわかる.

さて, $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, ある $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ がとれて, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ とできる．定理 3.19 より $f_k = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f_k]]$ である．$L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f_k]] \to \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]]$ を示せばよい．$\mathscr{F}$ の線形性と Plancherel の定理 (定理 3.26) より

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f_k]] - \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]]\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f_k - f]]\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\mathscr{F}[f_k - f]\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

となるので, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f_k]] \to \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]]$ が成り立つ.

$f = \mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[f]]$ となることも同様である. □

たたみこみに関する等式

$$\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g]$$

を示すには準備がいる. 次のたたみこみに対する Young の不等式を示す.

定理 3.28 (たたみこみに対する Young の不等式)**.**
$f\in L^2(\mathbb{R})$, $g\in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\|f*g\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \tag{3.42}$$

が成り立つ.

証明.
$x\in\mathbb{R}$ に対して Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|&\le\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^{\frac12}(|f(x-y)||g(y)|^{\frac12})\,dy\\&\le\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,dy\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|^2|g(y)|\,dy\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, Fubini-Tonelli の定理より

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2&\le\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|^2|g(y)|\,dy\right)dx\\&=\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|^2|g(y)|\,dy\,dx\\&=\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|^2\,dx\right)|g(y)|\,dy=\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\end{aligned}$$

が得られる. □

$f,g\in L^2(\mathbb{R})$ のとき, $f*g\in L^2(\mathbb{R})$ かどうかがわからないため, $\mathscr{F}[f*g]$ が定義できるかどうかがわからない. $g\in L^1(\mathbb{R})$ であれば, たたみこみに対する Young の不等式 (定理 3.28) より $f*g\in L^2(\mathbb{R})$ がわかるので, $\mathscr{F}[f*g]$ が定義できる.

定理 3.29.
$f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \tag{3.43}$$

が成り立つ.

証明.
$L^2(\mathbb{R})$ の意味で, $f_k \to f$ となる $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ をとると, 命題 3.7 より

$$\mathscr{F}[f_k * g] = \mathscr{F}[f_k]\mathscr{F}[g] \tag{3.44}$$

が成り立つ. たたみこみに対する Young の不等式 (定理 3.28) より

$$\begin{aligned}\|f_k * g - f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(f_k - f) * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\le \|(f_k - f)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad (k \to \infty)\end{aligned}$$

となるので, $L^2(\mathbb{R})$ の意味で $f_k * g \to f * g$ となる. さらに, $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ から $f_k * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ となるので, (3.44) で $k \to \infty$ とすれば $\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g]$ が得られる. □

3.6. 熱方程式への応用

一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{3.45}$$

に初期条件

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{3.46}$$

をつけた問題を考える. 未知関数 $u = u(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, (仮想的に) 無限に長い細い針金の時間 t, 位置 x における温度を表すとき, (3.45), (3.46) が成り立つことが知られている. 時刻 $t = 0$ における温度 $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を与えたときに, 時刻 t で温度 u がどうなっているかが知りたい問題である. これを知らべるために, Fourier 変換を利用しよう. しばらくの間, u_0 や u がどのような条件をみたすかは考えないことにして形式的な計算をしてみる.

熱方程式 (3.45) を変数 x について Fourier 変換すると, 命題 3.15 より

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = (2\pi i\xi)^2\widehat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi) \tag{3.47}$$

となる. この常微分方程式 (3.47) は求積法で解くことができて,

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u}(0,\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u_0}(\xi)$$

と解ける. 命題 3.7 と定理 3.19 より, 変数 ξ に対する Fourier 逆変換をとると

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}(t,\xi)] = \mathscr{F}^{-1}[e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u_0}] = \mathscr{F}^{-1}[e^{-4\pi^2\xi^2 t}] * u_0 \tag{3.48}$$

となる. Gauss 核の Fourier 変換 (定理 3.9) より

$$e^{-4\pi^2\xi^2 t} = e^{-\pi(4\pi t)\xi^2} = \lambda^{\frac{1}{2}}\widehat{g_\lambda}(\xi), \quad \lambda = \frac{1}{4\pi t}$$

だから,

$$\mathscr{F}^{-1}[e^{-4\pi^2\xi^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

が得られる. (3.48) に代入することで

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right) * u_0(t,x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy \end{aligned} \tag{3.49}$$

が (3.45) の解の候補となる. 実際に, 次が成り立つ.

定理 3.30.
$u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ とする. このとき, (3.49) で定めた u は (3.45) をみたす. さらに, (3.46) について, $\|u(t,x) - u_0(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} \to 0$ $(t \to 0)$ が成り立つ.

証明.
(3.45) は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\right) = 0 \tag{3.50}$$

に注意して, (形式的には) 積分と微分の順序交換をすれば得られる. (3.46) については, Plancherel の定理 (定理 3.26) と Lebesgue の優収束定理より

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathscr{F}[u](t,\cdot) - \mathscr{F}[u_0]\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|(1 - e^{-4\pi^2\xi^2 t})\mathscr{F}[u_0]\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad (t \downarrow 0) \end{aligned}$$

から従う. □

次に, 与えられた関数 $f = f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x) \tag{3.51}$$

に初期値 (3.46) を与えた問題の解を導こう. (3.51) を両辺 x について Fourier 変換すると, (3.47) と同様の計算により

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(t,x) = -4\pi^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi) + \widehat{f}(t,\xi)$$

となる. この常微分方程式を解くために, 積分因子 $e^{4\pi^2\xi^2 t}$ をかけると

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u}(t,\xi)) = e^{4\pi^2\xi^2 t}\widehat{f}(t,\xi)$$

が得られる. 変数 t を τ にかえて, $0 \le \tau \le t$ で積分すると

$$e^{4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u}(t,\xi) - \widehat{u}(0,\xi) = \int_0^t e^{4\pi^2\xi^2\tau}\widehat{f}(\tau,\xi)\,d\tau,$$

すなわち

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\xi) &= e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u}(0,\xi) + \int_0^t e^{-4\pi^2\xi^2(t-\tau)}\widehat{f}(\tau,\xi)\,d\tau \\ &= e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t e^{-4\pi^2\xi^2(t-\tau)}\widehat{f}(\tau,\xi)\,d\tau\end{aligned} \tag{3.52}$$

が得られた. 熱核 $G_t(x)$ を

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \tag{3.53}$$

で定めれば, (3.52) を Fourier 逆変換することにより

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(t,x) + \int_0^t G_{t-\tau} * f(\tau,x)\,d\tau \tag{3.54}$$

が得られる. (3.54) は熱方程式 (3.51) に対する **Duhamel の公式**という.

　最後に, $f = f(u)$ と f が未知関数 u に依存して決まる場合の方針を述べよう. すなわち,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u(t,x)) \tag{3.55}$$

に初期値 (3.46) を与えた問題を考える. f は t, x に依存してもよいが, 話を簡単にするために, f が u のみに依存する場合を考えよう. (3.55) に対応する Duhamel の公式は

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(t,x) + \int_0^t G_{t-\tau} * f(u(\tau,x))\,d\tau \tag{3.56}$$

となり, 今までと違って, 右辺に未知関数 u を含んでいる．そこで, (3.55) の解が存在するかどうかを, 積分の含んだ積分方程式 (3.56) の解が存在するかどうかによって考える．アイデアは

$$\Psi(u) := (G_t * u_0)(t,x) + \int_0^t G_{t-\tau} * f(u(\tau,x))\,d\tau \tag{3.57}$$

を考えて, Ψ の不動点, つまり $u = \Psi(u)$ を探す問題に帰着させるということである．Ψ を定義する集合 (関数空間という) は何か, その集合の位相をどう定めるか, が解の存在証明に重要になる．

3.7. Shannon の標本化定理

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\xi_0 \notin \operatorname{supp} f$ であることをある $r > 0$ が存在して, 殆んどすべての $(\xi_0 - r, \xi_0 + r)$ に対して $f = 0$ が成り立つことをいう．$f \in L^2(\mathbb{R})$ が連続関数であるときは

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

と一致する．$f \in L^2(\mathbb{R})$ が**帯域制限関数**であるとは, $\operatorname{supp}(\mathscr{F}[f])$ が $\mathbb{R}$ 上のコンパクト集合となることをいう．$\operatorname{supp}(\mathscr{F}[f])$ が $\mathbb{R}$ 上のコンパクト集合であるということは, 有界閉集合であることと同値だから, ある $R > 0$ が存在して, 殆んどすべての $|\xi| \geq R$ に対して $\mathscr{F}[f](\xi) = 0$ となっている．Fourier 変換は Fourier 級数における $e^{2\pi i x\xi}$ の係数とみなせることから, f が帯域制限関数であるということは, 周波数が大きな情報をもっていないということである．f が帯域制限関数であるとき, 次に Shannon の標本化定理が知られている．

定理 3.31 (Shannon の標本化定理)**.**
$T > 0$ とし, $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ は $\operatorname{supp}(\mathscr{F}[f]) \subset (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$ をみたすとする．このとき,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(nT) h_T(x - nT) \tag{3.58}$$

が成り立つ．ここで,

$$h_T(x) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{T})}{\frac{\pi x}{T}}$$

であり, (3.58) の右辺の極限は $L^2(\mathbb{R})$ の意味かつ $\mathbb{R}$ 上一様収束である．

証明は, 緩増加超関数とその Fourier 変換の知識を必要とする．[**4**, 5.3 節] を参考せよ．

索引

参考文献

[1] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, 2011.

[2] Elliott H. Lieb, and Michael Loss, *Analysis*, second edition, Graduate Studies in Mathematics **14**, American Mathematical Society, 2001.

[3] Elias M. Stein, Rami Shakarchi(原著), 新井 仁之, 杉本 充, 高木啓行, 千原 浩之 (訳) フーリエ解析入門, プリンストン解析学講義, 日本評論社, 2007.

[4] 新井 仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2010.

[5] 加藤 義夫, 偏微分方程式, サイエンスライブラリ現代数学への入門, サイエンス社, 2003.

[6] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.