測度論と積分論

水野 将司

目次

第 1 章

Riemann 積分の問題点

微分積分学において，Riemann 積分とその計算手法について勉強した．そこで，そこそこ複雑な集合

$$A = [0,1] \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}, \frac{2^j-1}{2^j}, \ldots\right\}$$

の長さ $|A|$ がどうなるか考えてみよう. Riemann 積分を使って計算するなら，除外している点をのぞいた計算

$$|A| = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}}^{\frac{2^j-1}{2^j}} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2^j-1}{2^j} - \frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 \tag{1.1}$$

は正しそうにみえる. しかし，(1.1) は正しいかどうかは，Riemann 積分の範疇では説明できない. なぜなら，**Riemann 積分の区間加法性は有限和**であって，(1.1) の**区間加法性は可算無限和**になっているからである.

もう少し，この問題を説明するために，

$$I_j := \left(\frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}, \frac{2^j-1}{2^j} \right)$$

とおく. すると，(1.1) の積分は，I_j の長さについての無限級数となっていることがわかる. さらなる説明のために，特性関数を導入する. 一般に集合 B に対する特性関数 χ_B を

$$\chi_B(x) := \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

で定める. すると，(1.1) の積分は

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}}^{\frac{2^j-1}{2^j}} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int_{\frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}}^{\frac{2^j-1}{2^j}} dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x)\, dx \tag{1.2}$$

となる．そこで，

$$f_N(x) := \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x), \quad f(x) := \chi_A(x) \tag{1.3}$$

と定める．すると，(1.1) と (1.2) より

$$|A| = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N(x)\,dx \tag{1.4}$$

となるから，関数列 $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ について，積分と極限が順序交換できるかが問題になる．Riemann 積分で積分と極限が順序交換できるための十分条件は可積分関数列 $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ が可積分関数 f に一様収束することであった．そこで，関数列の各点収束，一様収束を復習しよう．

定義 1.1 (各点収束，一様収束)**.**

閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上**各点収束**するとは，すべての $x \in [a,b]$ に対して，

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．

閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上**一様収束**するとは，

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．

問題 1.1.

閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上各点収束すること，一様収束することを ε-論法を用いて記述せよ．ε-論法によれば，各点収束と一様収束の違いは何か？

f_N と f を (1.3) で定めたものとすると，$\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ は f に $[0,1]$ 上各点収束するが，f に一様収束はしない．従って，Riemann 積分では極限と積分の交換

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \chi_A(x)\,dx \tag{1.5}$$

を説明することが難しい．

問題 1.2.

(1.3) で定めた関数列 $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ と f に対して, f_N は f に $(0,1)$ 上各点収束するが一様収束しないことを示せ (ヒント: $\sup_{0<x<1} |f_N(x) - f(x)|$ はどうなるか？).

他方，χ_A は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能であり

$$\int_0^1 \chi_A(x)\,dx = 1 \tag{1.6}$$

が成り立つ. したがって，(1.1), (1.5) の計算は, **正当化することはできないけれども，結果は (たまたま) 正しい**ということになる. この「正当化はできないが，結果は正しかった」には細心の注意を払わないといけない. 実は正当化できるという問題であればまだしも，たまたま結果が正しかっただけなのかもしれない.

問題 1.3.

χ_A は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能であることと (1.6) を示せ (ヒント: 分割として，A に属さない点の近くの分割の幅を小さくすることで，Riemann 下積分が 1 に十分に近くなることをいう).

次に，もう少し複雑な集合

$$D := [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3 \ldots\} \tag{1.7}$$

を考えてみる. $\mathbb{Q}$ は可算集合であったから，(1.7) の右辺の表記は可能である ($q_1, q_2, q_3, \ldots$ をどの順番で取るべきかは気にしなくてよい). すると,

$$|D| = \int_0^1 \chi_D(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \chi_{\{q_1,q_2,q_3,\ldots,q_N\}}(x)\,dx \tag{1.8}$$

としたいところである. 実際に $\{\chi_{\{q_1,q_2,q_3,\ldots,q_N\}}\}_{N=1}^{\infty}$ は χ_D に各点収束している. しかし，χ_D は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能でないため，そもそも (1.8) の真ん中の積分は Riemann 積分の意味を持っていない.

問題 1.4.

(1.7) で定めた $D = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ に対して, $\{\chi_{\{q_1,q_2,q_3,\ldots,q_N\}}\}_{N=1}^{\infty}$ は χ_D に $[0,1]$ 上各点収束するが, 一様収束しないことを示せ. また，χ_D は $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能でないことを示せ.

一連の議論から考察できることは **Riemann 積分だけで長さを決定するには都合がよくない**ということであろう. Riemann 積分によって, 集合 $A \subset [0,1]$ の長さを決定する方法は

1. A の特性関数 χ_A が Riemann 積分可能かどうかを調べる.

2. χ_A の Riemann 積分を A の長さとする.

である. このアイデアは重要であるが, 他方で長さを求めるのに Riemann 積分を考えなければいけないという問題がつきまとう. これから考える Lebesgue 積分は, このアイデアの順番を逆にして

1. A の長さを前もって決めておく.
2. A の特性関数 χ_A の積分を A の長さで定める.

と, 先に長さを決めるというアプローチをとる. このアイデアのよいところは, 長さや積分可能な関数を積分を考えるまえに決定できるというところである. つまり, 考えることのできる集合, 関数の世界を先に決めることで, 病的な集合, 関数を最初から排除しておくことができるのである. 病的な関数はどのような関数かについて詳しくは述べないが, この講義で行う Lebesgue 積分における病的な集合, 関数というのは, 通常の考察ではとりあえず考えなくてもよい集合, 関数であるといってよい. つまり, 十分に広い世界のうえでの積分論を展開できるということである.

注意 1.2.

Riemann 積分とは面積を求める操作であることを認識していると, 上記の説明は奇異に思えるかもしれないが, 実際に A の長さを前もって決めるときには, Riemann 積分を利用することで決めることもできる. また, Riemann 積分においては, 微分積分学の基本定理によって, 微分との関係が綺麗な形でまとめることができる. Lebesgue 積分をまなべば Riemann 積分が必要ないというわけではない.

第 2 章

一変数の測度論

有界とは限らない開区間 $\Omega \subset \mathbb{R}$ に対し，Ω 上の集合 $A \subset \Omega$ の長さをどう定義すればよいかについて考察する.

2.1. σ-加法族と可測空間

集合 $A \subset \Omega$ の長さが決められるとき，どのような性質をもっていると都合がよいであろうか？

1. $A = \Omega$ のとき，つまり，全体の長さは (値がどうなるかはさておき) 決められると都合がよいだろう.
2. A の長さが決められるとき，その補集合 $A^c = \Omega \setminus A$ の長さも決められると都合がよいだろう.
3. $A_1, A_2, \ldots$ の長さが決められるとき, その**可算無限個の和集合** $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ **の長さも決められる**とよいだろう.

3 番目の性質が重要で，Riemann 積分はこの性質が備わっていない. 従って, (1.7) の長さを決めることができなかったわけである. 実際に (1.7) の D は

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$$

と表すことができ，$\{q_k\}$ の長さは 0 にもかかわらず，その和集合 D の長さを Riemann 積分の意味では決めることができなかった. そこで，長さを決めることができる集合全体を考えよう.

定義 2.1 (σ-加法族，可測空間)**.**
$\Sigma \subset 2^{\Omega}$ が Ω 上の **σ-加法族**であるとは，次の 3 つの性質をもつことをいう.

1. $\Omega \in \Sigma$.
2. 任意の $A \in \Sigma$ に対して $A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$.
3. 任意の可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ に対して, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Ω に σ-加法族 Σ が定まっているとき，(Ω, Σ) を**可測空間**といい，$A \in \Sigma$ を**可測集合**という.

可測集合というのは，長さを測ることができる集合ということであり，その集合の長さが無限大になっていたり，0 になっていたりすることは気にしていない. 逆にいうと，可測集合でない集合というのは，長さを測ることができない集合ということである. そして，これからは，主に長さを測ることができる集合しか考えないことにしたいのである.

$\Sigma = 2^\Omega$ とすれば $(\Omega, 2^\Omega)$ は可測空間となる. σ-加法族とはどのようなものか？ という具体例はとても大事な問題であるが，とりあえずそういうものがあるということを認めて先に進もう. 他の可測空間 (Ω, Σ) の具体例と構成の方法についてはあとで述べる. σ-加法族のもつ性質をいくつか述べよう.

命題 2.2.

(Ω, Σ) を可測空間とすると，次が成り立つ.

(1) $\emptyset \in \Sigma$. すなわち，空集合は可測集合となる.

(2) 任意の可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ に対して $\bigcap_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$，すなわち，可算個の可測集合の共通部分もまた可測集合となる.

(3) 任意の $A, B \in \Sigma$ に対して，$A \cup B$，$A \cap B$, $A \setminus B \in \Sigma$，すなわち任意の二つの可測集合の和集合，共通部分，差集合はまた可測集合となる.

証明.

(1) $\emptyset = \Omega \setminus \Omega = \Omega^c$ である. σ-加法族の定義から $\Omega \in \Sigma$ である. σ-加法族の補集合についての定義から $\Omega^c \in \Sigma$ となるので, $\emptyset \in \Sigma$ となる.

(2) 任意可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ に対して，de Morgan の法則により

$$\bigcap_{k=1}^\infty A_k = \bigcap_{k=1}^\infty (A_k^c)^c = \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k^c\right)^c$$

である. $A_k \in \Sigma$ だったから，σ-加法族の補集合についての定義から，$A_k^c \in \Sigma$ となる. さらに，σ-加法族の可算和集合についての定義から，$\bigcap_{k=1}^\infty A_k^c \in \Sigma$ となり，再度，σ-加法族の補集合についての定義から $\left(\bigcap_{k=1}^\infty A_k^c\right)^c \in \Sigma$ となる. よって，$\bigcap_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$ がわかった.

(3) $A, B \in \Sigma$ とする. $k \in \mathbb{N}$ に対して，A_k を $A_1 = A, A_2 = B$，$A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$ で定めると，命題 2.2 の (1) より $A_k \in \Sigma$ であり σ-加法族の可算和集合についての定義から，$A \cup B = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$ となるから，$A \cup B \in \Sigma$ がわかる. de Morgan の法則より

$$A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$$

であり，σ-加法族の補集合についての定義から $A^c, B^c \in \Sigma$ だから，先の結果により，$A^c \cup B^c \in \Sigma$ となり，再び，σ-加法族の補集合についての定義から $A \cap B \in \Sigma$ がわかる．$A \setminus B = A \cap B^c$ となることに注意すれば，$A \setminus B \in \Sigma$ も得られる．

□

一般に集合族 $\mathcal{F}$ が与えられたとき，その集合族を含むような最小の σ-加法族の存在を示そう．

命題 2.3.
集合族 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ に対し

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\Sigma:\sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{F}\subset\Sigma}} \Sigma \tag{2.1}$$

は $\mathcal{F}$ の元を含む (集合の包含関係に対する) 最小の σ- 加法族になる．

証明.
$\sigma(\mathcal{F})$ が σ-加法族であることを示すためには, 3 つの性質を調べればよい．

1. $\mathcal{F} \subset \Sigma$ をみたすすべての σ-加法族 Σ に対して，$\Omega \in \Sigma$ となるから，$\Omega \in \sigma(\mathcal{F})$ が成り立つ．
2. 任意の $A \in \sigma(\mathcal{F})$ に対し，$\mathcal{F} \subset \Sigma$ をみたすすべての σ-加法族 Σ について, $A \in \Sigma$ が成り立つ．Σ が σ-加法族だから, $A^c \in \Sigma$ となる．Σ が任意だったことから, $A^c \in \sigma(\mathcal{F})$ も成り立つ．
3. 任意可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{F})$ に対し, $\mathcal{F} \subset \Sigma$ をみたすすべての σ-加法族 Σ について，$A_k \in \Sigma$ が成り立つ．Σ が σ-加法族だから，$\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$ となる．Σ が任意だったことから，$\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \sigma(\mathcal{F})$ も成り立つ．

以上から，$\sigma(\mathcal{F})$ は σ-加法族となる．

任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F} \subset \Sigma$ をみたすすべての σ-加法族 Σ について，$A \in \mathcal{F} \subset \Sigma$ だから，$A \in \Sigma$ が成り立つ. Σ は任意だったから，$A \in \sigma(\mathcal{F})$ が成り立つ. したがって，$\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ となる．

最小であることをみるために，Σ' を $\mathcal{F} \subset \Sigma'$ をみたす任意の σ-加法族であるとする．すると，Σ' は $\sigma(\mathcal{F})$ の定義に現れる共通部分の仮定をみたすので

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{\Sigma:\sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{F}\subset\Sigma}} \Sigma \subset \Sigma'$$

となる．つまり，$\sigma(\mathcal{F})$ は Σ' より集合の包含関係について小さいことがわかるので，$\sigma(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ を含む最小の σ-加法族であることがわかった． □

命題 2.3 により，集合族 $\mathcal{F}$ を含む (集合の包含関係において) 最小の σ-加法族を定義することができる．

定義 2.4 (生成された σ-加法族)**.**
集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ に対し，命題 2.3 の (2.1) で定まる σ-加法族 $\sigma(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ で生成された σ-加法族とか，$\mathcal{F}$ を含む最小の σ-加法族という．

この方法により，例えば開集合全体 $\mathcal{O}$ を含む最小の σ-加法族を考えることができる．しかし，構造がたくさん入るとより複雑になる (そして面白くなる) ため，とりあえずは位相のことは考えない，つまり開集合とか閉集合については考えないで話を進めることにしよう．位相構造と可測性との関係については，後の 2.4 節で述べることにする．逆にいうと，今までの議論の中に開区間や閉区間の話が一切でてきてないことに注意をして欲しい．つまり，長さが決められるか否かという概念の中に実数の性質は一切使っていない．従って，Ω が一般の集合であってもまったく同様に議論を展開できる．

2.2. 測度と測度空間

可測空間 (Ω, Σ) 上の可測集合 A に長さ $\mu(A)$ が定まったとしよう．このとき，μ はどのような性質を持つべきであろうか？

1. 長さが負になるのはとりあえず困るので，$A \in \Sigma$ に対して, $\mu(A) \geq 0$ であろう．また，$\Omega = \mathbb{R}$ としたときに $\mu(\Omega) = \mu(\mathbb{R})$，つまり $\mathbb{R}$ の長さは無限大としておきたいので，$\mu(A) = \infty$ となってもよいことにしておこう．
2. 空集合の長さは 0，すなわち $\mu(\emptyset) = 0$ であろう．
3. $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ は重なりがない，つまり，任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対して，$k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとしよう．このとき，それぞれの長さの和が和集合の長さに等しくなるべきだろう．すなわち

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \tag{2.2}$$

となるべきであろう．

Riemann 積分において，(2.2) の ∞ を自然数にかえたものは成り立っている．つまり，任意の**有限個**の $A_1, A_2, A_3, \ldots A_N \in \Sigma$ と $1 \leq k, l \leq N$ に対して，$k \neq l$

ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとき，

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) \tag{2.3}$$

が成り立っている．このことを**有限加法性**という．(2.2) で重要なことは，**可算無限個の和集合で考えることができる**ということである．この性質はすなわち，一般に図形の面積を計算するときに，小さな長方形を重なりがないように**可算無限個**ならべて，その長方形の面積の和が図形の面積とみなせるということである．そこで，この可算個の和集合を考えることのできる長さを一般化した測度を定義しよう．

定義 2.5 (測度，測度空間)**.**
可測空間 (Ω, Σ) に対し，$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ が Ω 上の**測度**であるとは，次をみたすことをいう．

0. すべての $A \in \Sigma$ に対して，$0 \leq \mu(A) \leq +\infty$.
1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ と $k, l \in \mathbb{N}$ に対して，$k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとき，

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2.4}$$

となる．この性質を**完全加法性**という．

μ が可測空間 (Ω, Σ) 上の測度であるとき, (Ω, Σ, μ) を**測度空間**という．

注意 2.6.
式 (2.4) の等号は無限大を含めてなりたつことに注意せよ．つまり, (2.4) の左辺の級数が発散するとき (これはある A_k に対して $\mu(A_k) = \infty$ となるときも含む)，右辺は無限大となるということである．

測度や測度空間が存在するのか, 我々が普段考えている「長さを測る」操作が本当に測度になるのか (正確には，我々は無限回長さを測ることはできないので, 我々の考える「長さを測る」の拡張として測度が存在するのか) は確かめなければならない．しかし，とりあえず, 我々が普段考えている「長さを測る」操作が本当に測度になることを認めておこう．このことはあとの 2.4 節で, Lebesgue 測度の存在ということによって証明する．測度とは「長さを測るもの」であって，可測集合とは「長さを決めることができる集合」と思っておけばよい．

測度空間の性質をいくつか確認しよう．つまり定義 2.5 から，測度が実際に長さを測るためにもつべき性質があるかについて調べよう．

命題 2.7.
(Ω, Σ, μ) を測度空間とするとき，次が成り立つ．

(1) $A, B \in \Sigma$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$
(2) $A, B \in \Sigma$ に対し，$A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$

注意 2.8.
命題 2.7 の (1) に帰納法を用いることで有限加法性 (2.3) が従う．つまり，完全加法性は有限加法性より強い条件である．

証明.

(1) $A_1 := A$，$A_2 := B$，$A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ とすると，$k, l \in \mathbb{N}$ に対して，$k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ となる．よって完全加法性と $\mu(\emptyset) = 0$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \cup B$ より

$$\mu(A) + \mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A \cup B)$$

となる．

(2) $A \subset B$ より $B = A \cup (B \setminus A)$ が成り立つ．$A, B \in \Sigma$ と命題 2.2 により，$B \setminus A \in \Sigma$ である．(1) の結果により

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B)$$

となり，$\mu(B \setminus A) \geq 0$ であることから，

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$$

が得られる．

□

問題 2.1.
$A \subset B$ をみたす $A, B \in \Sigma$ に対し，$A_1 = A$，$A_2 = B \setminus A$，$A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ とおく．このとき $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = B$ を (集合の等号の定義に従って) 示せ．

問題 2.2.
(Ω, Σ, μ) を測度空間とする．任意有限個の $A_1, A_2, A_3, \ldots A_N \in \Sigma$ と $1 \leq$

$k, l \le N$ に対して, $k \ne l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとき,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)$$

を示せ. 命題 2.7 を使ってもいいし，完全加法性から直接示してもよい.

次に単調増加な集合列と測度の関係について述べる.

命題 2.9.
(Ω, Σ, μ) を測度空間とするとき，次が成り立つ.

(1) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{2.5}$$

(2) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ が成り立つとき

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{2.6}$$

証明.

(1) $k \in \mathbb{N}$ に対して，$B_k := A_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$ とおくと，$B_k \in \Sigma$ であり，$k, l \in \mathbb{N}$ に対して，$k \ne l$ ならば $B_k \cap B_l = \emptyset$，かつ $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{N} B_k = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ となる. 従って，完全加法性により,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \tag{2.7}$$

となる. 命題 2.7 の (1) より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(B_k) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \tag{2.8}$$

となるが，$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ より $\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_N$ となる. (2.7) と (2.8) を組み合わせて (2.5) を得る.

(2) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ より $A_1 \setminus A_1 \subset A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \setminus A_3 \subset \cdots$ となる．また命題 2.9 の (1) より

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k)\right) \tag{2.9}$$

が得られる．

$A_k \cup (A_1 \setminus A_k) = A_1$ かつ $A_k \cap (A_1 \setminus A_k) = \emptyset$ だから命題 2.7 の (1) より

$$\mu(A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1)$$

が得られる． $\mu(A_1) < \infty$ より命題 2.7 の (2) と A_k の単調性から $\mu(A_k) < \infty$ となるので $\mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$ とできる．さらに命題 2.7 の (2) と A_k の単調性から $\mu(A_k)$ も単調減少な非負の数列なので収束する．従って，

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \tag{2.10}$$

とできる．

つぎに，de Morgan の法則より

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \cap A_k^c = A_1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \\ &= A_1 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\end{aligned}$$

となる．$(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (A_1 \setminus (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)) = A_1$ かつ $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \cap (A_1 \setminus (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)) = \emptyset$ だから命題 2.7 の (1) より

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) = \mu(A_1)$$

が得られる．$\mu(A_1) < \infty$ より命題 2.7 の (2) と $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset A_1$ から $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) < \infty$ となるので

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k)\right) = \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \tag{2.11}$$

となる．(2.10) と (2.11) を (2.9) に代入することで，(2.6) が得られる．

□

問題 2.3.

任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ に対して，$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ が成り立つとする. $k \in \mathbb{N}$ に対して, $B_k := A_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$ とおく.

(1) $k, l \in \mathbb{N}$ が $k \neq l$ ならば $B_k \cap B_l = \emptyset$ を示せ.
(2) $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して $\bigcup_{j=1}^{N} B_k = \bigcup_{j=1}^{N} A_k$ となることを示せ.

問題 2.4.

命題 2.9 の (2) は $\mu(A_1) < \infty$ でないと成り立たない. 反例を作ってみよ.

我々が普段考えている「長さを測る」ことは実は結構難しい. しかし，個数を数えることもまた「個数を測る」と考えることができ，実際に測度の性質を持っている. 正確な形で述べよう.

例 2.10 (計数測度)**.**

$\Sigma = 2^{\Omega}$ とした可測空間 $(\Omega, 2^{\Omega})$ に対して, **計数測度 (数え上げ測度，counting measure)**μ を $A \in 2^{\Omega}$ に対して

$$\mu(A) := A \text{ の元の個数}$$

で定義する.

問題 2.5.

$\Sigma = 2^{\mathbb{R}}$ とした可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ と計数測度 μ に対し，次の値を求めよ.

$$\mu(\mathbb{R}), \quad \mu(\mathbb{Q}), \quad \mu(\mathbb{Z}), \quad \mu(\{4,5,6\}), \quad \mu(\{100 \text{ 以下の素数 }\})$$

問題 2.6.

例 2.10 で定めた $(\Omega, 2^{\Omega}, \mu)$ が測度空間になることを示せ. つまり，計数測度 μ が可測空間 $(\Omega, 2^{\Omega})$ 上の測度になることを示せ.

もう一つ重要な測度として，Dirac のデルタ測度を紹介する. この測度は，各点収束するが一様収束しない関数列の極限の例としてしばしば現れる.

例 2.11 (Dirac のデルタ測度)**.**

$\Sigma = 2^{\Omega}$ とした可測空間 $(\Omega, 2^{\Omega})$ と，$a \in \Omega$ に対して，a を台にもつ **Dirac のデルタ測度** δ_a を $A \in 2^{\Omega}$ に対して

$$\delta_a(A) := \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

で定義する.

問題 2.7.

$\Sigma = 2^{\mathbb{R}}$ とした可測空間 $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ と，$0 \in \mathbb{R}$ を台にもつ Dirac のデルタ測度 δ_0 について，次が正しいか正しくないか判定せよ．

$$\delta_0(\mathbb{R}) = 1, \quad \delta_0(\mathbb{Q}) = 0, \quad \delta_0((-1,1)) = 2, \quad \delta_0([0,\infty)) = 1.$$

問題 2.8.

例 2.11 で定めた $(\Omega, 2^{\Omega}, \delta_a)$ が測度空間になることを示せ．つまり，Dirac のデルタ測度 δ_a が可測空間 $(\Omega, 2^{\Omega})$ 上の測度になることを示せ．

測度は無限大になることがある．たとえば $(-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}$ の測度 (長さ) は無限大と定義するのが自然であろう．ただ，無限大は極限が発散することで定義したことから，$(-\infty, \infty)$ を近似できる有限な測度をもつ集合があると便利である．たとえば，$k \in \mathbb{N}$ に対し $A_k := (-k, k) \subset \mathbb{R}$ は有限な測度をもち，$(-\infty, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ と近似することができる．このような性質を持つ測度を定義する．

定義 2.12 (σ-有限測度)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) が **σ-有限**であるとは, $\mu(A_k) < \infty$ となる可算個の可測集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ が存在して $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とできることをいう．

問題 2.9.

例 2.11 で定義した Dirac のデルタ測度をもつ測度空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, \delta_a)$ は σ-有限となることを示せ．

問題 2.10.

$\Omega \subset \mathbb{R}$ をたかだか可算集合とする．例 2.10 で定義した計数測度 μ をもつ測度空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, \mu)$ は σ- 有限となることを示せ．また，$\Omega \subset \mathbb{R}$ が可算集合でない無限集合の場合はどうか？

測度が 0 の集合は特別な意味をもつ．長さを測るうえで，一点集合は無視できる (測ることができない) 特別な集合である．

定義 2.13 (零集合)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測集合 $A \in \Sigma$ が**零集合**であるとは，$\mu(A) = 0$ をみたすことをいう．

空集合 $\emptyset$ は測度の定義からつねに零集合である．しかし，零集合であるからといって，空集合とは限らない．

問題 2.11.

$(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \delta_0)$ を例 2.11 で定めた 0 を台にもつ Dirac のデルタ測度による測度

空間とする．このとき，$(0,\infty)$ は零集合となることを示せ．また，零集合はどのような集合か？

問題 2.12.
例 2.10 で定義した計数測度をもつ測度空間 $(\Omega, 2^{\Omega}, \mu)$ に対して，零集合は空集合に限ることを示せ．

零集合の部分集合はやはり零集合であるべきであるが，可測集合であるかどうかがわからない．つまり，零集合の部分集合は測ることができないかもしれない．そこで，零集合の部分集合がつねに可測となる測度空間を考えよう．

定義 2.14 (完備測度，完備測度空間)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) の測度 μ が**完備測度**であるとは, 任意の集合 $A, B \subset \Omega$ に対して，$A \subset B$, $B \in \Sigma$，$\mu(B) = 0$ をみたすならば，$A \in \Sigma$ かつ $\mu(A) = 0$ となることをいう．μ が完備測度であるとき，(Ω, Σ, μ) を**完備測度空間**という．

2.3. 外測度と測度空間の構成

σ-加法族によって, 長さが決められる集合全体はどのような性質をもつかを考え, 長さが決められる集合における長さを測度として定義した. 次に, 今までに学んだ自然な長さの決め方である Riemann 積分からどうやって測度空間を定めるかについての一般論を述べる．そして, 次の小節で, 実際に Riemann 積分からどうやって測度空間を作ればよいかについて述べる．

定義 2.15 (外測度)**.**
$\mu^* : 2^{\Omega} \to [0, +\infty]$ が Ω 上の (Carathéodory の) **外測度** であるとは, 次の条件をみたすときをいう．

0. すべての $A \subset \Omega$ に対して, $0 \leq \mu^*(A) \leq +\infty$.
1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. (劣加法性) 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset \Omega$ に対して
$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \tag{2.12}$$
となる．
3. 任意の $A, B \subset \Omega$ に対して $A \subset B$ ならば $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ となる．

測度の定義 (定義 2.5) と外測度の定義 (定義 2.15) の一番の違いは完全加法性に関する (2.4), (2.12) と定義域である．完全加法性 (2.4) をみたす測度 μ と σ-加法族の組を具体的に構成することは難しい．それに対し, 外測度はす

べての部分集合 $A \subset \Omega$ について定義するかわりに (2.4) の等式を要求せずに, 不等式 (2.12) のみを要求している. それゆえに, 測度と対応する σ-加法族を構成することよりも, 外測度を構成することの方が一般的に易しい.

外測度はすべての集合について定義した. その集合のなかで, 外測度と相性のよい集合を定義する.

定義 2.16 (外測度について可測)**.**

Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が**外測度 μ^* について可測集合**であるとは, 任意の集合 $B \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \tag{2.13}$$

が成り立つことをいう.

(2.13) について, $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ かつ $(B \cap A) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ だから, 外測度が長さの概念であるなら成り立って欲しい等式である. しかし, 外測度の定義から (2.13) は得られない.

問題 2.13.

Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ^* について可測集合であることは, すべての $B \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

が成り立つことと同値であることを示せ. つまり, (2.13) の等式は, 左辺の方が大きいことを示せば十分となることを示せ (ヒント:$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ に外測度の定義を用いて, (2.13) の右辺は左辺より常に大きいことをいえばよい).

外測度について可測集合がもつ簡単な性質を述べる.

命題 2.17.

Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, 次が成り立つ.

(1) $A \subset \Omega$ に対して $\mu^*(A) = 0$ ならば A は μ^* について可測集合となる.
(2) $A \subset \Omega$ が μ^* について可測集合ならば $A^c = \Omega \setminus A$ も μ^* について可測集合となる.

証明.

(1) $\mu^*(A) = 0$ と仮定する. 任意の $B \subset \Omega$ に対して $A \cap B \subset A, B \setminus A \subset B$ だから, 外測度 μ^* の定義から $\mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) = 0, \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$

が得られる. 組み合わせて

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$$

となるから, A は μ^* について可測集合となる.

(2) $A \subset \Omega$ が μ^* について可測集合と仮定する. 任意の $B \subset \Omega$ に対して, $A^c \cap B = B \setminus A$, $B \setminus A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A$ となるから, A が μ^* について可測集合であったことより

$$\mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \setminus A^c) = \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(B \cap A) = \mu^*(B)$$

が得られる. 従って, A^c は μ^* について可測集合である.

□

Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき

$$\Sigma := \{A \subset \Omega : A \text{ は} \mu^* \text{について可測集合}\}$$

と定める. $\mu^*(\emptyset) = 0$ だから, 命題 2.17 より, $\emptyset \in \Sigma$ がわかる. したがって, 外測度と可測集合のなす組は完全加法性をのぞけば, 完備測度と同様の性質をもっている. 実際には, Σ は σ-加法族になること, μ^* が Σ で定義された測度になることを示そう.

定理 2.18.
Ω 上の外測度 μ^* が与えられたとき, Σ を

$$\Sigma := \{A \subset \Omega : A \text{ は} \mu^* \text{について可測集合}\} \tag{2.14}$$

で定める. このとき, Σ は Ω 上の σ-加法族となり, (Ω, Σ, μ^*) は完備測度空間となる.

証明.

1. Σ が σ-加法族であることを示す. まず. $A_1, A_2 \in \Sigma$ に対し, $A_1 \cup A_2 \in \Sigma$ となることを示す. 任意の $B \subset \Omega$ に対して, A_1, A_2 が μ^* について可測集合であることから,

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((B \setminus A_1) \setminus A_2)\end{aligned}$$

となる. $(B \setminus A_1) \setminus A_2 = B \setminus (A_1 \cup A_2)$ と $(B \cap A_1) \cup ((B \setminus A_1) \cap A_2) = B \cap (A_1 \cup A_2)$ に注意すると, 外測度の劣加法性から

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &\geq \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*((B \setminus (A_1 \cup A_2))\end{aligned}$$

が得られる．よって, $A_1 \cup A_2 \in \Sigma$ が得られる (問題 2.13 を参照)．帰納的に繰り返すことで, 有限個の $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Sigma$ に対して, $\bigcup_{j=1}^k A_j \in \Sigma$ がわかる．さらに, $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c$, $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c$ に注意すれば, 有限個の $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Sigma$ に対して, $\bigcap_{j=1}^k A_j$, $A_1 \setminus A_2 \in \Sigma$ がわかる．

2. 可算個の $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ に対し $B_k := A_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$ とおくと, $B_k \in \Sigma$ であり, $k, l \in \mathbb{N}$ に対して, $k \neq l$ ならば $B_k \cap B_l = \emptyset$, かつ $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して $\bigcup_{j=1}^N B_j = \bigcup_{j=1}^N A_j$ となる．

3. 任意の $k \in \mathbb{N}$, $B \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^k B_j\right) = \sum_{j=1}^k \mu^*\left(B \cap B_j\right) \tag{2.15}$$

を帰納法で示す. $k = 1$ のときは明らかなので, $k \in \mathbb{N}$ で (2.15) が成り立つことを仮定する. $\bigcup_{j=1}^k B_j$ が μ^* について可測であること,$k \neq l$ ならば $B_k \cap B_l = \emptyset$ より

$$\begin{aligned}
&\mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right)\right) \\
&= \mu^*\left(\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right)\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) + \mu^*\left(\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right)\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) \\
&= \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) + \mu^*(B \cap B_{k+1})
\end{aligned}$$

が得られる. 帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right)\right) &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) + \mu^*(B \cap B_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^k \mu^*(B \cap B_j) + \mu^*(B \cap B_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} \mu^*(B \cap B_j)
\end{aligned}$$

が得られる. つまり, $k + 1$ のときも (2.15) が成り立つことがわかった.

4. (2.15) と外測度の定義から

$$\sum_{j=1}^k \mu^*(B \cap B_j) = \mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^k B_j\right) \leq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^\infty B_j\right)$$

となる. 右辺に外測度の劣加法性を使うと

$$\sum_{j=1}^{k} \mu^*(B \cap B_j) \le \mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap B_j)$$

となるので, $k \to \infty$ とすれば

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap B_j) \tag{2.16}$$

が得られる.

5. 任意の $B \subset \Omega$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\bigcup_{j=1}^{k} B_j$ が可測であることと (2.15), 外測度の定義より

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)\right) \\ &\ge \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B \cap B_j) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right)\end{aligned}$$

となる. $k \to \infty$ とすれば (2.16) と B_j の性質により

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\ge \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap B_j) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) \\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) \\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right)\end{aligned}$$

となる. 問題 2.13 だから, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ は μ^* について可測集合となるから, Σ は σ-加法族となる.

6. μ^* の完全加法性を示す. 任意の可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ と $k, l \in \mathbb{N}$ に対して, $k \neq l$ ならば $A_k \cap A_l = \emptyset$ をみたすとき, $A_k = B_k$ となることに注意すると (2.16) より, 任意の $B \subset \Omega$ に対して

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_j)$$

となる. $B = \Omega$ とすれば

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

が得られる. 以上と命題 2.17 により, (Ω, Σ, μ^*) が完備測度空間となることがわかった. □

繰り返しとなるが, これまでの議論のなかで, Ω が $\mathbb{R}$ の部分集合であるという事実は何も使っていない. したがって, ここまでの議論はどんな集合 Ω についても同様に進めることができる.

2.4. Lebesgue 測度

定理 2.18 によれば, 外測度を定義できれば, そこから測度を構成することができる. そこで, Lebesgue 積分の最初のステップである, 集合 A の長さをまえもって決めることにしよう. 以下, $\Omega = \mathbb{R}$ とする.

2.4.1. Lebesgue 外測度. $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)\right\} \tag{2.17}$$

と定義する. m^* のことを Lebesgue 外測度という. 感覚的にいうと, 集合 A の長さをそれより大きい半開区間の和集合で覆って, その半開区間の長さの和で A の長さを決めようということである.

注意 2.19.
(2.17) の和集合のそれぞれの集合を $(a_k, b_k]$ と半開区間にしている専門書もある. 半開区間にとると

$$(0, 1] = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

のような分割が可能になる,

Lebesgue 外測度は我々が考えている「長さ」を測っていることを示そう.

定理 2.20.
$-\infty < a < b < \infty$ に対して, $m^*((a, b)) = b - a$ となる.

証明.

1. $m^*((a,b)) \leq b-a$ を示す. $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_k = b_k$ $(k \geq 2)$ とすれば,

$$(a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) = (a,b) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$$

となっており,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = (b-a) + 0 + 0 + \cdots = b-a$$

となる. $m^*((a,b))$ は $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$ の下限であることから, $m^*((a,b)) \leq b-a$ がわかる.

2. $m^*((a,b)) \geq b-a$ を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $m^*((a.b))$ の定義から, ある開区間の列 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$m^*((a,b)) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq m^*((a,b)) + \varepsilon, \quad (a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) \tag{2.18}$$

が成り立つ. 次に, 任意の十分小さな $\delta > 0$ に対して $[a+\delta, b-\delta] \subset (a,b)$ であり, $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ は $[a+\delta, b-\delta]$ の開被覆となっている. 従って, Heine-Borel の被覆定理から, ある有限開被覆 $\{(a_{k_j}, b_{k_j})\}_{j=1}^{N} \subset \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$[a+\delta, b-\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{N}(a_{k_j}, b_{k_j}) \tag{2.19}$$

とできる. (2.18) と (2.19) より

$$(b-\delta) - (a+\delta) \leq \sum_{j=1}^{N}(b_{k_j} - a_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq m^*((a,b)) + \varepsilon$$

だから

$$b - a - 2\delta - \varepsilon \leq m^*((a,b)) \tag{2.20}$$

が得られる. $\varepsilon, \delta > 0$ は任意だったことと, $m^*((a,b))$ が ε, δ によらないことから, (2.20) で $\varepsilon, \delta \to +0$ とすることにより, $b-a \leq m^*((a,b))$ が得られる. □

次に, m^* は外測度となっていることを示す.

命題 2.21.
(2.17) で定めた m^* は $\mathbb{R}$ 上の外測度になる.

証明.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, (2.17) の定義の下限をとる無限級数は非負値なので, $0 \leq m^*(A) \leq \infty$ がわかる.

1. $m^*(\emptyset) = 0$ を示す. $k \in \mathbb{N}$ に対して $\emptyset \subset (-\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}})$ であることから,

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq \frac{1}{2^{k+1}} - \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^k}$$

がわかる. $k \to \infty$ とすれば $m^*(\emptyset) = 0$ がわかる.

2. 可算個の $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset \mathbb{R}$ に対して, $m^*(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k)$ を示す. $\sum_{k=1}^\infty m^*(A_k) = \infty$ のときは明らかなので, $\sum_{k=1}^\infty m^*(A_k) < \infty$ のときに示す. 任意の $\varepsilon > 0$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して, m^* の下限の性質から, ある開区間の族 $\{(a_l^k, b_l^k)\}_{l=1}^\infty$ が存在して

$$\sum_{l=1}^\infty (b_l^k - a_l^k) \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad A_k \subset \bigcup_{l=1}^\infty (a_l^k, b_l^k)$$

とできる.

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{l=1}^\infty (a_l^k, b_l^k)$$

だから

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) &\leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty (b_l^k - a_l^k) \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \left(m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

が得られる. $\varepsilon \to +0$ とすれば $m^*\left(\bigcup_{k=1}^k A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k)$ が得られる.

3. $A, B \subset \mathbb{R}$ が $A \subset B$ をみたすとき, $m^*(A) \leq m^*(B)$ を示す. $m^*(B) = \infty$ のときは明らかなので, $m^*(B) < \infty$ のときに示せばよい. $B \subset \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k)$ をみたすとき, $A \subset B \subset \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k)$ だから

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k)$$

となる. $B \subset \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k)$ をみたす $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$ について下限をとれば $m^*(A) \leq m^*(B)$ がわかる. □

以上のことより, $\mathbb{R}$ 上の外測度 m^* に定理 2.18 を用いることで, 測度空間 $(\mathbb{R}, \Sigma, m)$ を得ることができる. 定理 2.20 より, この測度 m は我々が普段考

えている長さの概念 (Riemann 積分を用いて素朴に考えるときの長さの概念) と完全加法性をもっている．従って, この測度をもとにすれば, Riemann 積分の拡張として (つまり, Riemann 積分の計算手法はある程度そのまま使えたうえで), よりよい性質をもった積分を考えることができるであろう．この測度空間 $(\mathbb{R}, \Sigma, m)$ を Lebesgue 測度空間という．すなわち

定義 2.22 (Lebesgue 外測度, Lebesgue 可測集合, Lebesgue 測度, Lebesgue 測度空間)**.**

$A \subset \mathbb{R}$ に対して (2.17) で定めた外測度 m^* すなわち

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\} \tag{2.21}$$

で定めた外測度 m^* を $\mathbb{R}$ 上の (1 次元)**Lebesgue 外測度**という．m^* について可測な集合を $\mathbb{R}$ 上の (1 次元)**Lebesgue 可測集合**といい, m^* を Lebesgue 可測集合に制限した測度 m を $\mathbb{R}$ 上の (1 次元)**Lebesgue 測度**という．Σ を m^* について可測な集合全体からなる集合族としたとき, $(\mathbb{R}, \Sigma, m)$ を $\mathbb{R}$ における **Lebesgue 測度空間**という．

Lebesgue 測度を作るストーリーをまとめておこう．Lebsgue 測度を作るために,「長さをより大きいもので近似する」Lebesgue 外測度を定義する．その測度が外測度であることを証明することにより,「長さを測ることができる集合」と「完全加法性をみたす測度」を同時に定義するのである．

2.4.2. Borel 測度. 今までの議論において, Ω の位相空間としての性質はまったく考慮していなかった．長さが決められるかどうかについて, $\mathbb{R}$ の位相的性質は考えなくても定義することはできる．他方, 実際に長さを決めるときには開集合が可測集合となることは自然なことと考えられる．そこで, 開集合をすべて可測集合とするような σ-加法族を定義しよう．

定義 2.23 (Borel 集合族, Borel 集合)**.**

Ω 上の開集合系 $\mathcal{O}$ に対し, $\sigma(\mathcal{O})$ を Ω 上の **Borel 集合族**といい, $\mathcal{B}(\Omega)$ と書く．$\mathcal{B}(\Omega)$ の元 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ を Ω 上の **Borel 集合**という．

問題 2.14.

開区間 $\Omega \subset \mathbb{R}$ に対して, 閉集合 $F \subset \Omega$ が Borel 集合となることを示せ (ヒント: 閉集合の補集合は開集合).

Ω 上の開集合, 閉集合, コンパクト集合は Borel 集合になる．選択公理を用いると, Borel 集合でない集合が存在することが示せる (例えば伊藤 [**5**] を参照). しかし, このあとの議論でこの事実は必要ではない．

定義 2.24 (Borel 測度)**.**
Ω 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\Omega)$ 上で定義された測度 μ を Ω の **Borel 測度**という.

実際には, 測度空間 (Ω, Σ, μ) が $\mathcal{B}(\Omega) \subset \Sigma$ をみたすときに μ を Borel 測度ということもある. 正確には μ の Borel 集合族への制限が Borel 測度であるが, 簡単のために上記の表現をすることも多い.

一般に $A \subset \Omega$ が Lebesgue 可測集合であるかどうかを判定するのは容易ではないが, 幸いにして, 開集合や閉集合は Lebesgue 可測集合となる. 実際に次が成り立つ.

定理 2.25.
Ω 上の Borel 集合は Lebesgue 可測集合となる. すなわち, Lebesgue 測度は Borel 測度である.

この証明はあとに回す. 注意深く考えるならば, Borel 集合でない集合や, Lebesgue 非可測集合があるということに気をつけなければならない. 実際に, 選択公理を用いると, Lebesgue 非可測集合が存在することが示せる. 例として, Vitali が示した Vitali 集合というものがある. また, Banach-Tarski のパラドックス「1 つの球を適当に分割して, 組みかえることことで, 元と同じ半径をもつ球を 2 つ作ることができる」が知られているが, このパラドックスによって得られる 2 つの球は Lebesgue 可測集合にならないことが知られている.

しかし, これらの集合は「病的」であるため, とりあえずそういう集合もあるという認識をもっていれば (少なくとも今の段階では) 差し支えない. 測度論をより精密に扱う研究をするとき, とりわけ選択公理等を用いて解析する必要があるときには, Lebesgue 非可測集合が存在することに注意を払えばよいだろう.

2.5. 測度論に関するさらなる話題

2.5.1. 多次元 Lebesgue 測度. 定義 2.22 にて, 1 次元の Lebesgue 測度空間を構成した. このアイデアはそのまま多次元に拡張することができる. 結果のみ述べよう. $d \in \mathbb{N}$ と $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して

(2.22)
$$m_d^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^1 - a_k^1)\cdots(b_k^d - a_k^d), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k^1, b_k^1)\times\cdots\times(a_k^d, b_k^d)\right\},$$

と定める.

定理 2.26.
$(a^1, b^1) \times \cdots \times (a^d, b^d) \subset \mathbb{R}^d$ に対して,

$$m_d^*((a^1, b^1) \times \cdots \times (a^d, b^d)) = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) \cdots (b^d - a^d) \tag{2.23}$$

となる.

問題 2.15.
定理 2.26 を証明せよ.

命題 2.27.
$d \in \mathbb{N}$ と $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して

(2.24)

$$m_d^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^1 - a_k^1) \cdots (b_k^d - a_k^d), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^1, b_k^1) \times \cdots (a_k^d, b_k^d) \right\},$$

と定めると, m_d^* は $\mathbb{R}^d$ 上の外測度となる.

問題 2.16.
命題 2.27 を証明せよ.

定義 2.28 (多次元 Lebesgue 測度空間)**.**
$d \in \mathbb{N}$ と $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して

(2.25)

$$m_d^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^1 - a_k^1) \cdots (b_k^d - a_k^d), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^1, b_k^1) \times \cdots (a_k^d, b_k^d) \right\},$$

で定めた外測度 m_d^* を d 次元 **Lebesgue 外測度**という. m_d^* について可測な集合を d 次元 **Lebesgue 可測集合**といい, m_d^* を Lebesgue 可測集合に制限した測度 m_d を d 次元 **Lebesgue 測度**という. Σ を m_d^* について可測な集合全体からなる集合族としたとき, $(\mathbb{R}^d, \Sigma, m)$ を d 次元 **Lebesgue 測度空間**という.

2.5.2. Hausdorff 測度.

2.5.3. Carathéodory の判定法. Lebesgue 測度が Borel 測度となること (定理 2.25) を証明する. そのために, 距離空間上の測度が Borel 測度になるための十分条件を与える, Carathéodory の判定法を紹介する.

定義 2.29 (metric outer measure)**.**
距離空間 (X,d) 上の外測度 ν が **metric outer measure** であるとは, $E,F \subset X$ が

$$d(E,F) := \inf\{d(x,y) : x \in E,\ y \in F\} > 0 \tag{2.26}$$

であれば $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ をみたすことをいう.

Carathéodory の判定法は metric outer measure が Borel 測度であることを主張するものである. すなわち

定理 2.30 (Carathéodory の判定法)**.**
ν を距離空間 (X,d) 上の metric outer measure とする. このとき, X 上の Borel 集合は ν について可測となる.

定理 2.30 の証明のために次の補題を用意する.

補題 2.31.
ν を距離空間 (X,d) 上の metric outer measure とする. $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ を X 上の単調増加な集合列とし, $A := \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ とおく. $j \in \mathbb{N}$ に対して, $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ を仮定する. このとき, $\nu(A_j) \to \nu(A)$ $(j \to \infty)$ が成り立つ.

注意 2.32.
命題 2.9 の主張との違いは, A_j が可測集合でなくてもよいということである.

補題 2.31 の証明.
1. $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \le \nu(A)$ を示す. すべての $j \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\nu(A_j) \le \nu(A) \tag{2.27}$$

である. $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ は単調増加だから $\{\nu(A_j)\}_{j=1}^{\infty}$ も単調増加となるので, (2.27) より収束する. よって, (2.27) で $j \to \infty$ とすれば $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \le \nu(A)$ となる.
2. $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \ge \nu(A)$ を示す. $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_j = \begin{cases} A_1 & j = 1 \\ A_j \setminus A_{j-1} & j \ge 2 \end{cases} \tag{2.28}$$

とおく. このとき, $i, j \in \mathbb{N}$ が $j + 2 \le i$ をみたせば

$$B_j \subset A_j, \quad B_i \subset A \setminus A_{i-1} \subset A \setminus A_{j+1} \tag{2.29}$$

となっている．したがって, $m \in \mathbb{N}$ に対して

(2.30)
$$d\left(B_{2m+1}, \bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}\right) \geq d\left(A \setminus A_{2m}, A_{2m-1}\right) > 0 \quad (\because B_{2m+1} \subset A \setminus A_{2m})$$
$$d\left(B_{2m+2}, \bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}\right) \geq d\left(A \setminus A, A_{2m+1}, A_{2m}\right) > 0 \quad (\because B_{2m+2} \subset A \setminus A_{2m+1})$$

となるから, metric outer measure の定義より

(2.31)
$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k-1}), \quad \nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k}),$$

となる．

3. (2.31) で $m \to \infty$ とした右辺の級数はどちらも収束することを仮定してよい．実際, どちらかが発散したとすると, $A_{2m} \supset \bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}$, $\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}$ となるから $\nu(A_{2m}) \geq \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k-1})$ かつ $\nu(A_{2m}) \geq \sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k})$ となるから $\nu(A_j) \to \infty$ $(j \to \infty)$ となる．よって, $\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \geq \nu(A)$ は成り立つ．

4. 外測度の劣加法性より, $i \in \mathbb{N}$ に対して

(2.32)
$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu\left(A_i \cup \bigcup_{k=i+1}^{\infty} B_k\right) \\ &\leq \nu(A_i) + \sum_{k=i+1}^{\infty} \nu(B_k) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) + \sum_{k=i+1}^{\infty} \nu(B_k) \end{aligned}$$

が成り立つ．$i \to \infty$ とすれば級数は 0 に収束するので $\nu(A) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$ が成り立つ． □

定理 2.30 の証明.

1. 閉集合 $F \subset X$ が ν について可測となることを示す．そのためには, 任意の集合 $E \subset X$ に対して

(2.33)
$$\nu(E) \geq \nu(E \cap F) + \nu(E \setminus F)$$

となることを示せば十分である．$\nu(E) = \infty$ であれば (2.33) は成立しているので, $\nu(E) < \infty$ を仮定してよい．$A = E \setminus F$ とおき, $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_j := \left\{x \in A : d(x, F) \geq \frac{1}{j}\right\}$$

とおく. $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ は単調増加な集合列となる.

2. $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ を示す. $a \in A$ を任意にとる. $A \subset X \setminus F$ であり, F が閉集合だから, $X \setminus F$ は開集合となり, a は $X \setminus F$ の内点となる. すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\{x \in X : d(x,a) < \varepsilon\} \subset X \setminus F$$

をみたす. このことから特に $d(a,F) > 0$ がわかる. 以上により, ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して, $d(a,F) \geq \frac{1}{j}$ が成り立つので, $a \in A_j$ となり, $a \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ がわかった. 他方, すべての $j \in \mathbb{N}$ に対して $A_j \subset A$ だから $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset A$ も成り立つ.

3. $j \in \mathbb{N}$ に対して $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ を示す. $x \in A_j$, $y \in A \setminus A_{j+1}$ と $z \in F$ に対して, $\frac{1}{j} \leq d(x,F) \leq d(x,z)$ である. 従って, 三角不等式より

$$\frac{1}{j} \leq d(x,F) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

となる. $z \in F$ について下限をとれば, $d(y,F) < \frac{1}{j+1}$ であることに注意して

$$\frac{1}{j} \leq d(x,y) + d(y,F) < d(x,y) + \frac{1}{j+1}$$

となるので, $d(x,y) \geq \frac{1}{j(j+1)} > 0$ がわかる. $x \in A_j$, $y \in A \setminus A_{j+1}$ について下限をとれば $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ が得られる.

4. A_j の定義から $d(A_j, F) \geq \frac{1}{j} > 0$ となるので, metric outer measure の定義から

$$\nu(E \cap F) + \nu(A_j) = \nu((E \cap F)l \cup A_j) \leq \nu(E) \tag{2.34}$$

がわかる. (2.34) で $j \to \infty$ とすると補題 2.31 が使えて,

$$\nu(E \cap F) + \nu(A) \leq \nu(E)$$

が成り立つ. $A = E \setminus F$ だったことから, F が ν について可測集合であることが示された. 可測集合の補集合はまた可測集合であることから, 開集合も ν について可測であることが従う.

5. ν について可測集合を集めた集合族 Σ は σ- 加法族となる (定理 2.18). Σ は開集合系 $\mathcal{O}$ を含むことがわかったので, $\mathcal{O}$ を含む最小の σ-加法族 $\mathcal{B}(\Omega)$ との大小関係から $\mathcal{B}(\Omega) \subset \Sigma$ がわかる. よって, X 上の Borel 集合 は ν について可測となることが示された. □

以上の準備のもと, 定理 2.25 の証明を与えよう.

定理 2.25 の証明.

Lebesgue 外測度 m^* が metric outer measure であることを示せばよい. そのために, $E, F \subset \Omega = (a,b)$ が $d(E,F) > 0$ をみたすときに, $m^*(E \cup F) \geq$

$m^*(E) + m^*(F)$ を示せば十分である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，開区間の列 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，

$$m^*(E \cup F) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k), \qquad E \cup F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$$

とできる．必要ならば，(a_k, b_k) をより小さな開区間に分割することにより，$b_k - a_k < \frac{1}{2}d(E,F)$ をみたすように取り替えてよい[1]．次に，得られた $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} =: \mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I}_E := \{(a_k, b_k) \in \mathcal{I} : (a_k, b_k) \cap E \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{I}_F := \{(a_k, b_k) \in \mathcal{I} : (a_k, b_k) \cap F \neq \emptyset\}$$

の二つの部分集合族にわける．このとき，$\mathcal{I}_E \cap \mathcal{I}_F = \emptyset$ である．実際に，$(a_k, b_k) \in \mathcal{I}_E$ が $(a_k, b_k) \in \mathcal{I}_F$ をみたすならば，$x \in E$ と $y \in F$ が存在して，$x, y \in (a_k, b_k)$ となる．よって，$d(E,F) \leq |x - y| < b_k - a_k < \frac{1}{2}d(E,F)$ となり，$d(E,F)$ の定義に矛盾する．

$\mathcal{I}$ は $E \cup F$ の被覆だったら，$\mathcal{I}_E, \mathcal{I}_F$ はそれぞれ E, F の被覆になっている．従って，

$$\begin{aligned} m^*(E) + m^*(F) &\leq \sum_{(a_k,b_k)\in\mathcal{I}_E}(b_k - a_k) + \sum_{(a_k,b_k)\in\mathcal{I}_F}(b_k - a_k) \\ &\leq \sum_{(a_k,b_k)\in\mathcal{I}}(b_k - a_k) \leq m^*(E \cup F) + \varepsilon \end{aligned}$$

が得られた．$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$m^*(E) + m^*(F) \geq m^*(E \cup F)$ が得られる． □

2.5.4. 確率論との関係.

[1]正確にやるなら，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$(a_k, b_k) \subset (a_k^1, b_k^1) \cup \cdots \cup (a_k^N, b_k^N)$ かつ，$b_k^N - a_k^N < \frac{1}{2}d(E,F)$, $(b_k^1 - a_k^1) + \cdots + (b_k^N - a_k^N) < (b_k - a_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ をみたすように作ればよい．

第 3 章

可測関数と Lebesgue 積分

1 変数の測度論において, $A \subset \mathbb{R}$ の長さをどう定めるかについて考察した. 次に, A 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}$ に対する積分を考察するために,「積分を考えることができる関数」を定義する. そして, その積分を考えることができる関数に対して, 特性関数を用いた積分の定義を与える. 以下, (Ω, Σ, μ) を測度空間とする. わかりにくければ, $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, μ を Lebesgue 測度としてよい.

3.1. 可測関数

Lebesgue 積分は面積を計算するときに, 横に切って和を求めるということであった. すると, Ω 上の非負値関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ のグラフ $y = f(x)$ を横に切って, 積分を定義するのであれば, 区分求積法により, 形式的には

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in \Omega : f(x) > \frac{k}{n}\right\}\right) \frac{1}{n} \to \int_{\Omega} f(x)\, dx \quad (n \to \infty) \tag{3.1}$$

となるであろう. (3.1) の左辺の無限級数は, y 軸を刻み幅 $\frac{1}{n}$ で分割すると, 横の長さが, $\mu\left(\left\{x \in \Omega : f(x) > \frac{k}{n}\right\}\right)$, 縦の長さが $\frac{1}{n}$ となっていることから得られる. $n \to \infty$ にすることから, (3.1) が意味を持つためには, すべての $\lambda > 0$ に対して, $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}$ が可測集合でなければならないことがわかる. そこで, もう少し条件をつけて次の定義を与える.

定義 3.1 (可測関数)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が**可測関数**であるとは任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}$ が可測集合, すなわち $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\} \in \Sigma$ となることをいう.

定義 3.1 で不等号になぜ等号を加えないのかが気になるかもしれない. しかし, 可測集合の性質を使うと, 不等号に等号を加えるかどうかは, 可測関数の定義に影響を与えないことがわかる. 実際に次が成り立つ.

命題 3.2.
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ について, 次の 4 条件は同値である.

(1) f が可測関数である.
(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : f(x) < \lambda\}$ が可測集合となる.
(3) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : f(x) \geq \lambda\}$ が可測集合となる.
(4) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : f(x) \leq \lambda\}$ が可測集合となる.

証明.
1. (1)⇒(4) を示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\{x \in \Omega : f(x) \leq \lambda\} = \{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}^c$$

となる. f が可測関数だから $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}$ は可測集合である. 可測集合の性質から, $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}^c$ もまた可測集合となることから, $\{x \in \Omega : f(x) \leq \lambda\}$ が可測集合であることが従う.

2. (4)⇒(2) を示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\{x \in \Omega : f(x) < \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega : f(x) \leq \lambda - \frac{1}{n}\right\} \tag{3.2}$$

となる. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して仮定より $\{x \in \Omega : f(x) \leq \lambda - \frac{1}{n}\}$ は可測集合となるので, 可測集合の性質から, $\{x \in \Omega : f(x) < \lambda\}$ もまた可測集合となる.

3. (2)⇒(3) の証明は **1.** の証明と同様である.

4. (3)⇒(1) は $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ に対して, $\{x \in \Omega : f(x) \geq \lambda + \frac{1}{n}\}$ を考えて, **2.** と同様に示せばよい. □

問題 3.1.
式 (3.2) を証明せよ.

問題 3.2.
命題 3.2 の (2)⇒(3), (3)⇒(1) の証明を完成させよ.

問題 3.3.
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : f(x) = \lambda\}$ が可測集合となることを示せ. なお, $\{x \in \Omega : f(x) = \lambda\}$ を高さ λ の等高面という.

可測関数は関数における和や積, スカラー倍や絶対値について閉じている. つまり, 次が成り立つ.

命題 3.3 (可測関数の和, 積, スカラー倍, 絶対値)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対し, 和 $f+g$, スカラー倍 cf, 積 fg, 最大値 $\max\{f, g\}$, 最小値 $\min\{f, g\}$, 絶対値 $|f|$ はまた可測関数となる.

証明.
1. $f+g$ が可測関数となることを示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in \Omega : (f+g)(x) > \lambda\}$ が可測集合となることを示せばよい. そこで,

$$
\begin{aligned}
\{x \in \Omega : (f+g)(x) > \lambda\} &= \{x \in \Omega : f(x) + g(x) > \lambda\} \\
&= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in \Omega : f(x) > \lambda - r\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > r\})
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

と変形する. (3.3) の一つ目の等号は $(f+g)$ の定義である. 二つ目の等号について, $\{x \in \Omega : f(x) + g(x) > \lambda\}$ が最右辺に含まれることを示す. 任意の $x \in \{x \in \Omega : f(x) + g(x) > \lambda\}$ に対して, $g(x) > -f(x) + \lambda$ より $\mathbb{Q}$ の稠密性から, ある $r \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$
g(x) > r > -f(x) + \lambda
$$

となる. よって, $g(x) > r$ かつ $f(x) > \lambda - r$ が成り立つので, x は最右辺の集合に属する.

f, g は可測関数だから, $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda - r\}$, $\{x \in \Omega : g(x) > r\}$ は可測集合となる. $\mathbb{Q}$ は可算集合ゆえ, σ-加法族の性質 (定義 2.1, 命題 2.2) から

$$
\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in \Omega : f(x) > \lambda - r\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > r\})
$$

も可測集合となる. (3.3) より $\{x \in \Omega : (f+g)(x) > \lambda\}$ も可測集合となる.

2. スカラー倍 cf が可測関数になることを示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega : (cf)(x) > \lambda\}$ が可測集合であることを示せばよい. $c = 0$ のときは,

$$
\{x \in \Omega : (cf)(x) > \lambda\} = \begin{cases} \emptyset, & \lambda \geq 0 \\ \Omega, & \lambda < 0 \end{cases}
$$

となるから, $\{x \in \Omega : (cf)(x) > \lambda\}$ は可測集合である. $c > 0$ のときは演習にまわす. $c < 0$ のとき

$$
\{x \in \Omega : (cf)(x) > \lambda\} = \{x \in \Omega : cf(x) > \lambda\} = \left\{x \in \Omega : f(x) < \frac{\lambda}{c}\right\}
\tag{3.4}
$$

となるから (不等号の向きが変わることに注意), f が可測関数であることと命題 3.2 により, $\{x \in \Omega : (cf)(x) > \lambda\}$ が可測集合となることがわかる.

3. fg が可測関数となることを示す.

$$fg = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\}$$

となるから, f^2 が可測関数となることを示せば十分である. そこで, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in \Omega : f^2(x) > \lambda\}$ が可測集合となることを示す.

$$\{x \in \Omega : f^2(x) > \lambda\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f(x) > \sqrt{\lambda}\} \cup \{x \in \Omega : f(x) < -\sqrt{\lambda}\}, & \lambda \geq 0, \\ \Omega, & \lambda < 0 \end{cases}$$

となるから, f が可測関数であることより, $\{x \in \Omega : f^2(x) > \lambda\}$ が可測集合となる.

4. 最大値 $\max\{f, g\}$ が可測関数となることを示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in \Omega : \max\{f, g\}(x) > \lambda\}$ が可測集合であることを示せばよい. $x \in \Omega$ に対して $\max\{f, g\}(x) > \lambda$ は「$f(x) > \lambda$ または $g(x) > \lambda$」と同値だから

$$\{x \in \Omega : \max\{f, g\}(x) > \lambda\} = \{x \in \Omega : f(x) > \lambda\} \cup \{x \in \Omega : g(x) > \lambda\} \tag{3.5}$$

となる. f, g が可測関数であることと, σ-加法族の性質 (命題 2.2) により, $\{x \in \Omega : \max\{f, g\}(x) > \lambda\}$ は可測集合となる.

5. 最小値 $\min\{f, g\}$, 絶対値 $|f|$ は

$$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}, \quad |f| = \max\{f, 0\} - \min\{f, 0\}$$

と変形できることに注意して, 和とスカラー倍, 最大値が可測関数になることを用いればよい. □

問題 **3.4.**

(3.3) の二つ目の等号を示せ.

問題 **3.5.**

命題 3.3 でのスカラー倍の証明を丁寧に書け.

問題 **3.6.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して, 最小値 $\min\{f, g\}$, 絶対値 $|f|$ が可測関数になることを, 命題 3.3 の和, スカラー倍, 最大値の可測性を用いずに示せ (ヒント: (3.5) に対応するものを min で作ってみよ. $\lambda \geq 0$ に対して $|f(x)| > \lambda$ は「$f(x) > \lambda$ または $f(x) < -\lambda$」と同値である).

Ω 上の関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ の上限 $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 下限 $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 上極限 $\limsup_{k\to\infty} f_k$, 下極限 $\liminf_{k\to\infty} f_k$ とは $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}\{f_k(x)\}, \\
\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) &:= \inf_{k\in\mathbb{N}}\{f_k(x)\}, \\
\limsup_{k\to\infty} f_k(x) &:= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right), \\
\liminf_{k\to\infty} f_k(x) &:= \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right)
\end{aligned}$$

であった (上極限, 下極限の最後の等式は $\sup_{k\geq n} f_k(x)$, $\inf_{k\geq n} f_k(x)$ が n についての単調列になることから従う). とくに, $\mathbb{R}$ 上の上極限, 下極限は極限と違って, 常に存在することに注意せよ. また, 上極限と下極限が一致するとき, 極限が存在する.

問題 3.7.

Ω 上の関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $x \in \Omega$ に対して, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) \leq \limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ を示せ.

(2) 任意の $x \in \Omega$ に対して, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ となるならば, 極限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ が存在して,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$$

となることを示せ. (ヒント: $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\inf_{k\geq n} f_k(x) \leq f_n(x) \leq \sup_{k\geq n} f_k(x)$$

となることを使う. 添字に注意せよ)

このような関数列の極限操作において, 可測関数の性質が保存されることを示そう.

命題 3.4 (可測関数列の極限関数)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して, 上限 $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 下限 $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 上極限 $\limsup_{k\to\infty} f_k$, 下極限 $\liminf_{k\to\infty} f_k$ は (値が有限となるように定義域を制限することで) 可測関数である.

証明.

1. $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ が可測関数となることを示す. 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > \lambda\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : f_k(x) > \lambda\} \tag{3.6}$$

と変形する. 右辺の集合が左辺の集合に含まれることは簡単に示せるので, 左辺の集合が右辺の集合に含まれることを示す. 任意の左辺の集合の元 x に対して $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > \lambda$ だから $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) - \lambda) > 0$ とおくと, ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\begin{aligned} f_{k_0}(x) &> \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) - \varepsilon_0 \\ &> \frac{1}{2}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) + \lambda\right) > \lambda \end{aligned}$$

となる. よって, x が左辺の集合に属することがわかった.

すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して f_k は可測関数だから, σ-加法族の性質 (定義 2.1) より (3.6) の右辺は可測集合となる. 従って, $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ が可測関数となる.

2. $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)$ より, $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ も可測関数となる. 上極限の定義と, 上限, 下限が可測関数になることから上極限が可測関数となることが従う. 下極限についての可測性は

$$\liminf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\limsup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)$$

を用いればよい. □

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が Ω 上の可測関数列であるとき, 極限関数 $\lim_{k\to\infty} f_k$ が存在すればそれは可測関数である. 実際,

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k$$

となるので, 上極限, 下極限関数が可測関数となることより, 極限関数もまた可測関数となる.

注意 3.5.

命題 3.4 の「値が有限となるように定義域を制限することで」は, 実は必要ない. 実際, $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = \infty$ となるとき, 任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して,

$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > r$ となるから, (3.6) と組み合わせると

$$\left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = \infty\right\} = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} \left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > r\right\} = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : f_k(x) > r\}$$

が得られる. つまり, 可測集合列の上限が発散する点全体は可測集合となる. 従って, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > \lambda\right\} = \left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = \infty\right\} \cup \left\{x \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) < \infty\right\}$$

と変形すれば, 定義域に制限を課すことなしに可測性が得られる.

問題 3.8.
(3.6) の集合の等号を示せ.

$\Omega \subset \mathbb{R}$ であるときに連続関数が可測になることを定理として述べておこう. これにより, 連続関数の各点収束極限で書ける関数はすべて可測関数であることが従う.

定理 3.6.
$\Omega \subset \mathbb{R}$ における 1 次元 Lebesgue 測度空間上の連続関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ は可測関数である.

証明.
任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $(\lambda, \infty) \subset \mathbb{R}$ は開集合である.

$$\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\} = f^{-1}\left((\lambda, \infty)\right)$$

に注意すると, f が連続関数であることから $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}$ は開集合である. 定理 2.25 より Lebesgue 測度は Borel 測度であることから, $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}$ は Lebesgue 可測集合となるので f が可測関数であることが従う. □

一般に Lebesgue 測度空間上の可測関数を **Lebesgue 可測関数**という.
合成関数の可測性には注意が必要である.

命題 3.7 (合成写像の可測性)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ と連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ は可測関数となる.

証明.

f が可測関数だから, $a < b$ に対して

$$\{x \in \Omega : a < f(x) < b\} = f^{-1}((a,b))$$

が可測集合となる. これと $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ が $\mathbb{R}$ の開基になることから, 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対して, $f^{-1}(U)$ は可測集合となる.

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in \Omega : g \circ f(x) > \lambda\} = f^{-1}\left(g^{-1}((\lambda, \infty))\right)$$

となり, g が連続関数だから $g^{-1}((\lambda,\infty)) \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の開集合となる. よって, $\{x \in \Omega : g \circ f(x) > \lambda\}$ は可測集合となるので, $g \circ f$ は可測関数となる. □

結論として, 我々が普段使う関数はほぼ可測関数であると思ってよい. もちろん Lebesgue 可測でない集合が存在することから, Lebesgue 測度において可測でない関数も存在するが, 我々が普段考える操作 (和, 差, 商, 積や絶対値, (都合のいい) 関数との合成) において可測性は閉じている. さらに, 各点収束極限においても, 可測性が閉じていることに注意して欲しい. 他方で, 各点収束極限は, 連続性や Riemann 可積分性について閉じていない. この, 各点収束極限で可測, σ-加法族を導入した一番のメリットである.

3.2. Lebesgue 積分の定義

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し

$$f_+ := \max\{f, 0\}, \quad f_- := \max\{-f, 0\} \tag{3.7}$$

と定める. f_+ を f の正値部分 (positive part), f_- を f の負値部分 (negative part) という. このとき, $f = f_+ - f_-$ とかけることと, f_+, f_- はともに非負値可測関数となることに注意する. もし, 積分が定義できれば

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f_+(x)\,dx - \int_\Omega f_-(x)\,dx$$

となるべきだから, 非負値な可測関数 f_+, f_- について積分を定義すればよい. 以下, しばらくのあいだ, 考える関数は非負値関数とする.

もう一度, (3.1) に立ち返ってみる. 区分求積法によれば, 形式的には

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in \Omega : f(x) > \frac{k}{n}\right\}\right)\frac{1}{n} \to \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}\right)\,d\lambda \quad (n \to \infty) \tag{3.8}$$

となっているべきでもあろう．これは, $\frac{1}{n}$ が $d\lambda$ に, $\frac{k}{n}$ が λ にかわり, 無限級数が積分記号に変化したと考えておけばとりあえずはよい．ここで得られた積分

$$\int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}\right) d\lambda \tag{3.9}$$

は, 形式的な積分の順序交換

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)\,dx &= \int_\Omega \left(\int_0^{f(x)} d\lambda\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{\{x\in\Omega: f(x)>\lambda\}}(x)\,d\lambda\right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \chi_{\{x\in\Omega: f(x)>\lambda\}}(x)\,dx\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\})\,d\lambda \end{aligned} \tag{3.10}$$

から得られることにも注意しておこう．ここで,

$$\chi_{\{x\in(0,1): f(x)>\lambda\}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x \in (0,1) : f(x) > \lambda\} \\ 0 & x \notin \{x \in (0,1) : f(x) > \lambda\} \end{cases} \tag{3.11}$$

は特性関数である．(3.10) の一つ目の等号は, $f(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} d\lambda$ を代入したもの, 三つ目の等号は, 積分の順序を交換したもの, 四つ目の等号は, 特性関数の積分の性質からわかる．二つ目の不等式は, (3.11) の定義で x を固定して, λ に関する関数としてみたときに,

$$\chi_{\{x\in\Omega: f(x)>\lambda\}}(x) = \begin{cases} 1 & f(x) > \lambda \\ 0 & f(x) \le \lambda \end{cases}$$

となることから得られる．さて, (3.8), (3.10) から, f の積分が定義できたのであれば, その値は (3.9) で与えるのが自然であることが推察される．そこで, この一変数の広義積分 (3.9) が, Riemann 積分の範疇で定義できていることを示し, そのうえで, この積分 (3.9) を改めて積分の定義とすることにしよう．

まず, (3.9) の被積分関数は λ について単調減少になることに注意しよう．実際, $0 < \lambda < \lambda'$ ならば,

$$\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\} \supset \{x \in \Omega : f(x) > \lambda'\}$$

だから, 測度の性質 (命題 2.7) より

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}) \geq \mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda'\})$$

が従う. すると, 単調関数の Riemann 積分可能性に関する次の命題が使えることがわかる.

命題 3.8.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を有界で単調減少な関数とすると, f は Riemann 積分可能となる.

問題 3.9.
命題 3.8 を示せ (ヒント: $f(a) - f(b) = M > 0$ とおいて, $[a,b]$ の n 等分割を考える).

命題 3.8 を用いて, Ω 上の非負値可測関数 f の Lebesgue 積分を次で定義する.

定義 3.9 (積分)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分を

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\})\, d\lambda \tag{3.12}$$

で定める. ただし, (3.12) の右辺が発散するときと, 右辺の被積分関数がある正の数 $\lambda > 0$ に対して無限大になるときは, 積分の値は無限大と定める. 非負値とは限らない可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する積分を (3.7) で定めた f_+, f_- を用いて

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f_+\, d\mu - \int_\Omega f_-\, d\mu \tag{3.13}$$

で定める. 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が**可積分**であるとは

$$\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty \tag{3.14}$$

が成り立つことをいう.

積分の積分変数を明示するときには,

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$$

と書くこともある．また, 測度 μ が明らかなときは

$$\int_\Omega f$$

と $d\mu$ を省略して書くこともある．この書き方をするときは, 被積分関数を明示するために括弧を使うなどの必要がある．μ が Lebesgue 測度のときは $d\mu$ のかわりに dx を使うことも多い.

問題 3.10.

測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して特性関数 χ_A の積分が $\mu(A)$ となること, すなわち

$$\int_\Omega \chi_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$$

となることを示せ.

例 3.10.

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1), \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \setminus (0,1) \end{cases}$$

で定めよう．このときに, m を $(0,1)$ 上の 1 次元 Lebesgue 測度として

$$\int_{(0,1)} f(x)\, dm(x) = \int_0^1 f(x)\, dm(x)$$

を計算しよう．f は非負値可測関数だから, (3.12) の右辺を計算すればよい. $\lambda > 0$ に対して

$$\{x \in (0,1) : f(x) > \lambda\} = \begin{cases} \mathbb{Q} \cap (0,1), & 0 < \lambda < 1 \\ \emptyset, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

だから, $\lambda > 0$ の値にかかわらず, $m(\{x \in (0,1) : f(x) > \lambda\}) = 0$ となる. 従って,

$$\int_{(0,1)} f(x)\, dm(x) = \int_0^\infty m(\{x \in (0,1) : f(x) > \lambda\})\, d\lambda = \int_0^\infty 0\, d\lambda = 0$$

がわかる．他方, f は $(0,1)$ 上 Riemann 積分可能でないことが知られている. 問題 1.4 も参考にせよ.

問題 3.11.
$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\cap(0,1),\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\setminus(0,1)\end{cases}$$

で定める. m を $(0,1)$ 上の 1 次元 Lebesgue 測度として

$$\int_{(0,1)} f(x)\,dm(x)=\int_0^1 f(x)\,dm(x)$$

を求めよ.

問題 3.12.
測度空間 (Ω,Σ,μ) 上の可測集合 $A\in\Sigma$ に対して,

$$\int_\Omega \chi_A(x)\,d\mu(x)=\mu(A)$$

となることを定義に基づいて示せ.

積分において, 重要で基本的な性質は順序の保存性である. あらっぽくいえば, 関数 f,g が $f\le g$ をみたすならば, 積分についても順序が保存される, すなわち $\int_\Omega f\le\int_\Omega g$ が成り立つ. Lebesgue 積分においても, この積分の順序保存性が成り立つ. つまり

定理 3.11 (Lebesgue 積分の順序保存性)**.**
測度空間 (Ω,Σ,μ) 上の可積分関数 $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ は $f\le g$ をみたすとする. このとき

$$\int_\Omega f\,d\mu\le\int_\Omega g\,d\mu \tag{3.15}$$

が成り立つ.

証明.
1. $f\ge 0$ のときを示す. 任意の $\lambda>0$ に対して, $f\le g$ より

$$\{x\in\Omega : f(x)>\lambda\}\subset\{x\in\Omega : g(x)>\lambda\}$$

だから, 特に, $\mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\}) \le \mu(\{x \in \Omega : g(x) > \lambda\})$ である. 従って, Riemann 積分の順序保存性から

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\})\,d\lambda \\ &\le \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : g(x) > \lambda\})\,d\lambda = \int_\Omega g\,d\mu\end{aligned}$$

となる.

2. $f \ge 0$ と限らない場合を示す. このとき, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$ と表すと, $f \le g$ だから $f_+ \le g_+$, $f_- \ge g_-$ が成り立つ. **1.** の結果より, (3.15) が成り立つ. □

注意 3.12.

定理 3.11 の可積分性の仮定は, 非負値可測関数におきかえることができる. このときは, (3.15) の意味として, f の積分が発散する (つまり f が可積分でない) ときは, g の積分が発散する (つまり g が可積分にならない) ことを含む.

以下, $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ を開区間として, m を Ω 上の 1 次元 Lebegsue 測度, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を**非負値** Riemann 可積分関数とするとき, f の Riemann 積分と, Lebesgue 測度 m に関する Lebesgue 積分は等しい, つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\Omega f\,dm$$

を認める. Lebesgue 可測関数 f が Lebesgue 測度について可積分となるとき, f を **Lebesgue 可積分関数**とか, たんに **Lebesgue 可積分**であるという.

例 3.13.

$\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が, ある $0 < k < 1$ に対し,

$$|f(x)| \le \frac{1}{x^k}, \quad x \in (0,1)$$

をみたすとき, f は Lebesgue 可積分関数となる. 証明は定理 3.11 と $\frac{1}{x^k}$ が $(0,1)$ 上広義 Riemann 積分可能であることを用いればよい.

問題 3.13.

$0 < k < 1$ に対し, $\frac{1}{x^k}$ が $(0,1)$ 上広義 Riemann 積分可能であることを示し, その Riemann 積分の値を求めよ.

例 3.14.

$\Omega = (1,\infty) \subset \mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が, ある $k > 1$ に対し

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^k}, \quad x \in \Omega = (1,\infty)$$

をみたすとき, f は可積分関数となる. 証明は定理 3.11 と $\frac{1}{x^k}$ が $(1,\infty)$ 上広義 Riemann 積分可能であることを用いればよい.

問題 3.14.

$k > 1$ に対し, $\frac{1}{x^k}$ が $(1,\infty)$ 上広義 Riemann 積分可能であることを示し, その Riemann 積分の値を求めよ.

例 3.13, 3.14 から, 絶対収束する広義 Riemann 可積分関数は Lebesgue 積分として扱うことができることがわかる.[1] 他方, f が絶対収束しない広義 Riemann 可積分関数は Lebesgue 積分として扱うことができない. 実際に, 次の例はよく知られている.

例 3.15.

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0,\infty)$$

と定める. このとき, f は $(0,\infty)$ 上広義 Riemann 積分可能であるが, 絶対収束しない. すなわち

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty, \quad \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$$

である. このことは, (符号変化をする) **広義 Riemann 積分可能な関数は一般に Lebesgue 可積分になるとは限らないことを主張している.** いいかえると, Lebesgue 積分は, **広義 Riemann 積分をすべて含んだ拡張にはなっていない.** Lebesgue 積分は, 絶対収束する広義 Riemann 積分をすべて含んだ拡張になっている.

Lebesgue 積分の定義がわかったところで, 実際に具体的な値を求められる積分はそれほど多くはない. Lebesgue 積分は, **被積分関数を具体的に書き下すことができないときでも, とりあえず不等式や評価などの計算ができるための方法**である.

積分のもつ, 重要な性質は定理 3.11 で述べた順序保存性と線形性である. 線形性については次の節で述べる.

[1] f が Lebesgue 可測関数になることは示す必要があるが, 連続関数に制限して考えてもよい.

3.3. 単関数と Lebesgue 積分

この講義での Lebesgue 積分の定義 (定義 3.9) は Lieb-Loss [**4**] の流儀による. この定義は, **Lebesgue 積分をグラフの面積を横に切って定義することに**対して, 素朴な定義ではあるが, 他方で, 日本で多くみられる専門書の定義, 特に単関数を用いた定義とは違っている. そこで, 単関数を用いた定義を紹介しておこう.

定義 3.16 (単関数)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が**単関数**であるとは, 有限個の互いに交わらない可測集合 $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \Sigma$ と実数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in \Omega \tag{3.16}$$

と書けることをいう.

例 **3.17.**
$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,1)$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ 1 & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}, \\ 2 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}, \\ 3 & \frac{3}{4} \le x < 1 \end{cases}$$

とおくと, f は単関数である. 実際に, $E_1 = (0, \frac{1}{4})$, $E_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $E_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $E_4 = [\frac{3}{4}, 1)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 3$ とおけば

$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} c_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in (0,1)$$

となる. また, $\tilde{E}_1 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$, $\tilde{E}_2 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $\tilde{E}_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $\tilde{E}_4 = [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$, $\tilde{E}_5 = (\frac{7}{8}, 1)$, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 1$, $\tilde{c}_3 = 2$, $\tilde{c}_4 = \tilde{c}_5 = 3$, とおけば

$$f(x) = \sum_{l=1}^{5} \tilde{c}_l \chi_{\tilde{E}_l}(x), \quad x \in (0,1)$$

となる. つまり, (3.16) の $(x_k, E_k) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ のとり方は一通りではない.

測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測集合 $E \in \Sigma$ に対して,

$$\int_{\Omega} \chi_E \, d\mu = \mu(E) \tag{3.17}$$

と定義するのは妥当であろう．従って, 非負値単関数においては, (3.17) の線形和によって積分を定義するのが妥当であろう．このことにより, 次の定義を得る.

定義 3.18 (単関数の積分)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値単関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を有限個の $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ と正数 $a_1, \ldots, a_n > 0$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in \Omega \tag{3.18}$$

と書いたとき, 単関数 f の Lebesgue 積分を

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) \tag{3.19}$$

で定義する.

例 3.17 で説明したとおり, 単関数の表示の仕方は一通りではない．したがって, (3.19) の右辺が単関数の表示の仕方に依らないことを示さないとならない.

命題 3.19 (積分の well-defined)**.**
定義 3.18 の (3.19) の右辺は単関数の表し方 (3.18) によらない．すなわち, 単関数 f が $c_k, \tilde{c}_l > 0$, $E_k, \tilde{E}_l \in \Sigma$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{c}_l \chi_{\tilde{E}_l}(x)$$

と書けるとき,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{c}_l \mu(\tilde{E}_l)$$

が成り立つ.

証明.

$k = 0, \ldots, n, l = 0, \ldots, m$ に対し

$$E_0 := \Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right), \quad \tilde{E}_0 := \Omega \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m} \tilde{E}_l \right), \quad E_{k,l} := E_k \cap \tilde{E}_l$$

とおく. 任意の $x \in E_0 \cup \tilde{E}_0$ に対して, $f(x) = 0$ となる. そこで, $c_0 = \tilde{c}_0 = 0$ とおく.

$k = 1, \ldots, n$ に対して, $E_k = \bigcup_{l=0}^{m} E_{k,l}$ かつ, $E_{k,l}$ は互いに交わならいので,

$$c_k \mu(E_k) = c_k \mu \left(\bigcup_{l=0}^{m} E_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{m} c_k \mu \left(E_{k,l} \right)$$

となる. よって,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{m} c_k \mu \left(E_{k,l} \right) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu \left(E_{k,l} \right) \tag{3.20}$$

となる.

$l = 1, \ldots, m$ を固定すると, $E_{k,l} \neq \emptyset$ ならば $x \in E_{k,l}$ に対し, $f(x) = c_k = \tilde{c}_l$ となる. よって, $E_{k,l}$ は互いに交わらないので,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu \left(E_{k,l} \right) = \sum_{k : E_{k,l} \neq \emptyset} c_k \mu \left(E_{k,l} \right) = \tilde{c}_l \mu \left(\bigcup_{k : E_{k,l} \neq \emptyset} E_{k,l} \right) = \tilde{c}_l \mu \left(\tilde{E}_l \right)$$

となる. 従って, (3.19) に (3.24) を代入すれば

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{c}_l \mu(\tilde{E}_l)$$

が成り立つ. □

単関数の積分の定義を用いて, 一般の可測関数 f に対する積分を定義しよう.

定義 3.20 (Lebesgue 積分)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する (Lebesgue) 積分を

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} s \, d\mu : s : \Omega \to \mathbb{R} \text{ は非負値単関数}, 0 \leq s \leq f \right\} \tag{3.21}$$

で定める． 非負値とは限らない可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ の測度 μ に関する Lebesgue 積分 を (3.7) で定めた f_+, f_- を用いて

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f_+\, d\mu - \int_\Omega f_-\, d\mu \tag{3.22}$$

で定める. 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が **(Lebesgue) 可積分**であるとは

$$\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty \tag{3.23}$$

が成り立つことをいう.

積分において, 重要で基本的な性質は順序の保存性であることは, 前に述べた. この事実が定義 3.20 によって定義された積分であっても成立することを示そう. すなわち,

定理 3.21 (Lebesgue 積分の順序保存性)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ は $f \leq g$ をみたすとする. このとき

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu \tag{3.24}$$

が成り立つ.

証明.
f, g が非負値のときに示す. 非負値単関数 $s : \Omega \to \mathbb{R}$ が $0 \leq s \leq f$ をみたすならば, $0 \leq s \leq g$ となるから

$$\int_\Omega s\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu \tag{3.25}$$

が成り立つ. s についての上限をとれば, (3.25) の右辺は s に依らないので,

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$$

が得られる.

f, g が非負値でないときは, $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$ としたときに $f_+ \leq g_+$, $g_- \leq f_-$ となることに注意して, 非負値関数の積分の結果を用いればよい. □

注意 3.22.
定理 3.21 の可積分性の仮定は, 非負値可測関数におきかえることができる. このときは, (3.24) の意味として, f の積分が発散する (つまり f が可積

分でない) ときは, g の積分が発散する (つまり g が可積分にならない) ことを含む.

この小節の最後に定義 3.9 と定義 3.20 の関係について調べておく. 測度空間 (Ω, Σ, μ) の可測集合 $E \in \Sigma$ に対し, 定義 3.9 による特性関数 χ_E の積分が $\mu(E)$ に一致することをみておこう. $\lambda > 0$ に対して

$$\{x \in \Omega : \chi_E(x) > \lambda\} = \begin{cases} E & 0 < \lambda < 1 \\ \emptyset & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

となるから定義 3.9 の定義によって, 積分を計算すると

$$\int_\Omega \chi_E \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : \chi_E(x) > \lambda\}) \, d\lambda = \int_0^1 \mu(E) \, d\lambda = \mu(E)$$

となって, たしかに定義 3.9, 3.20 による定め方と一致していることがわかる. 次の節による収束定理を用いれば, 定義 3.9 と定義 3.20 は実は同じ定義であることがわかる.

第 4 章

収束定理

Riemann 積分における積分と極限の交換には, 関数列の一様収束性が一つの十分条件であった. 復習のために, 一様収束の定義を思い出そう. $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ が $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に Ω 上一様収束するとは,

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{4.1}$$

となることであった. 一様収束性を示すためには, $|f_k(x) - f(x)|$ が $x \in \Omega$ によらない数列で評価できることと, その数列が 0 に収束することの二つが示せればよい. しかし, 実際には, この一様収束性は示せないが, 積分と極限が交換できる場合がある. 二つほど例を出そう.

例 4.1.

$f_k : (0,2) \to \mathbb{R}$ と $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} f_k(x) &:= \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 - \frac{1}{k}, \\ -kx + k, & 1 - \frac{1}{k} < x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \\ f(x) &:= \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2}$$

とおく. すると, f_k が f に $(0,2)$ 上各点収束して, 積分と極限の順序交換ができること, すなわち, $x \in (0,2)$ に対して, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ と

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^2 f_k(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \tag{4.3}$$

がわかる. 他方, f_k は f に $(0,2)$ 上一様収束しない[1].

問題 4.1.

例 4.1 において, f_k が f に $(0,2)$ 上各点収束はするが, 一様収束しないこと, そして (4.3) が成り立つことを示せ.

[1]本来は広義一様収束を考えるべきではあるが, 広義一様収束も成り立たない.

例 4.2.

$f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ と $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$
f_k(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \cos\left(3k\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), & \frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \le x < 1, \end{cases} \tag{4.4}
$$
$$
f(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}
$$

とおく. すると, f_k が f に $(0,1)$ 上各点収束して, 積分と極限の順序交換ができること, すなわち, $x \in (0,1)$ に対して, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ と

$$
\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \tag{4.5}
$$

がわかる. 他方, f_k は f に $(0,1)$ 上一様収束しない.

問題 4.2.

例 4.2 において, f_k が f に $(0,1)$ 上各点収束はするが, 一様収束しないこと, そして (4.5) が成り立つことを示せ.

他方, 一様収束を仮定しない場合, Riemann 積分の範疇では極限関数が積分可能にならない例 (問題 1.4) がある. さらに, 各点収束はするが, 極限関数の積分の値と, 積分の極限が一致しない例もある.

例 4.3.

$f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ と $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$
f_k(x) := \begin{cases} -k^2 x + k, & 0 < x \le \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} < x \le 1, \end{cases} \tag{4.6}
$$
$$
f(x) := 0, \quad 0 < x < 1
$$

とおく. すると, f_k が f に $(0,1)$ 上各点収束して, 積分と極限の順序交換ができないこと, すなわち, $x \in [0,1]$ に対して, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ と

$$
\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \ne \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \tag{4.7}
$$

がわかる. 当然ながら, f_k は f に $(0,1)$ 上一様収束しない.

問題 4.3.

例 4.3 において, f_k が f に $(0,1)$ 上各点収束はするが, 一様収束しないこと, そして (4.7) が成り立つことを示せ.

これらのことから, 積分と極限の交換はどの程度ゆるめることができるのか？ ということが問題になる. さらにいえば, 一様収束を示すのが難しい問題において, 積分と極限が交換できる条件を調べることは有用である. そこで, Lebesgue 積分の範囲において, 積分と極限の交換が可能となる条件を考察する.

4.1. 単調収束定理

例 4.1 の関数列 f_k は単調に増加している. このような単調性がある関数列においては, 極限が収束するか否かに関わらず積分と極限の交換ができる. すなわち, 次が成り立つ.

定理 4.4 (単調収束定理)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は k について単調増加, すなわち, すべての $x \in \Omega$ について $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ をみたすとし, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ とおく. このとき,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu \tag{4.8}$$

が成り立つ.

注意 4.5.
定理 4.4 において, f の可積分性も仮定しなくてよい. 従って, (4.8) は収束が無限大になることも含めて成り立つ.

注意 4.6.
(4.8) を

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu \tag{4.9}$$

と書きかえれば, この単調収束定理は**積分と極限の順序交換**に関する定理ということがわかる. 特にこの定理は, 単調増加 (と非負値性) を仮定さえすれば, 常に積分と極限の順序交換ができることを主張している.

単調収束定理の証明のために, 補題を用意する. これは, Riemann 積分において, **一様収束を仮定せずに**積分と極限の順序交換ができる一つの十分条件を与えている

補題 4.7.

有界閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数列 $\{F_k = F_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ は, λ について単調減少, k について単調増加とする. $F = \lim_{k\to\infty} F_k$ とおくと,

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b F(\lambda)\,d\lambda \tag{4.10}$$

が成り立つ.

証明.

まず, F_k が λ について単調減少であることから, 極限関数 F も λ について単調減少となることに注意しておく.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, Darboux の定理からある $\delta > 0$ が存在して、L 等分割 $\Delta = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_L\}$ に対して、$\frac{b-a}{L} < \delta$ ならば

$$\int_a^b F(\lambda)\,d\lambda < \sum_{l=1}^{L} \left(\inf_{\lambda_{l-1} \le \lambda \le \lambda_l} F(\lambda) \right) (\lambda_l - \lambda_{l-1}) + \varepsilon$$

が成り立つ. $L \in \mathbb{N}$ を $\frac{b-a}{L} < \delta$ をみたすように十分に大きくとれば, $\lambda_l = a + \frac{(b-a)k}{L}$ だから, F が単調減少であることとあわせて,

$$\int_a^b F(\lambda)\,d\lambda < \frac{b-a}{L} \sum_{l=1}^{L} F\left(a + \frac{(b-a)l}{L}\right) + \varepsilon \tag{4.11}$$

が得られる.

2. $k = 0, 1, 2, \ldots, L$ に対して, $F_k(\lambda_l) \to F(\lambda_l)$ $(k \to \infty)$ かつ, F_k は k について単調増加だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, $k \ge N$ ならば

$$F(\lambda_l) - F_k(\lambda_l) < \varepsilon$$

とできる ($\lambda_0, \ldots, \lambda_l$ が有限個だから, N がとれることに注意). 従って, $k \in \mathbb{N}$ が $k \ge N$ をみたせば F_k の λ に対する単調減少性と組み合わせて

(4.12)

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{L} \sum_{l=1}^{L} F\left(a + \frac{(b-a)l}{L}\right) + \varepsilon &< \frac{b-a}{L} \sum_{l=1}^{L} F_k\left(a + \frac{(b-a)l}{L}\right) + (b-a+1)\varepsilon \\
&\le \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda + (b-a+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

が得られる. (4.11) と (4.12), F_k の k に対する単調増加性より

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda - \int_a^b F(\lambda)\,d\lambda\right| &= \int_a^b F(\lambda)\,d\lambda - \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda \\ &< (b-a+1)\varepsilon\end{aligned}$$

となるから, (4.10) が成り立つ. □

この補題をもとにして, 定理 4.4 を示そう.

定理 4.4 の証明.

1. $k \in \mathbb{N}$ に対して f_k は非負値可測関数で k について単調増加だから, $f = \lim_{k\to\infty} f$ も存在して非負値可測関数である (命題 3.4). 従って, 積分の定義から

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \mu(\{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda\})\,d\lambda = \int_0^\infty \mu(\{x\in\Omega : f(x) > \lambda\})\,d\lambda$$

を示すことが目標になる. 以下,

$$\begin{aligned}F_k(\lambda) &:= \mu(\{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda\}),\\ F(\lambda) &:= \mu(\{x\in\Omega : f(x) > \lambda\})\end{aligned}$$

とおけば.

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty F_k(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty F(\lambda)\,d\lambda \tag{4.13}$$

を示せばよいことがわかる.

2. 任意の有界閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ に対し, F_k, F を $[a,b]$ 上に制限したときに補題 4.7 の仮定がみたされていることを確かめる. $\lambda, \lambda' \in [a,b]$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda < \lambda'$ であれば,

$$\{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda\} \supset \{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda'\}$$

だから, 測度 μ の性質により, $F_k(\lambda) \geq F_k(\lambda')$ となることがわかる. つまり, $F_k(\lambda)$ は λ について単調減少である. 次に f_k が k について単調増加だったことより, $\lambda \in [a,b]$ に対して

$$\{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda\} \subset \{x\in\Omega : f_{k+1}(x) > \lambda\}$$

が成り立つ. 測度 μ の性質により, $F_k(\lambda) \leq F_{k+1}(\lambda)$ となるから, $F_k(\lambda)$ は k について単調増加となる. さらに, $f = \lim_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\Omega : f_k(x) > \lambda\} = \{x\in\Omega : f(x) > \lambda\}$$

となるから, 命題 2.9 より, $\lambda \in [a,b]$ に対して $F_k(\lambda) \to F(\lambda)$ $(k \to \infty)$ となることもわかる.

3. f が可積分であるときに (4.13) を示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して, $a < b$ かつ

$$\int_0^a F(\lambda)\,d\lambda < \varepsilon, \quad \int_b^\infty F(\lambda)\,d\lambda < \varepsilon$$

とできる. また, 補題 4.7 より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, $k \geq N$ ならば, F が $[a,b]$ 上 Riemann 可積分になることより

$$\int_a^b F(\lambda)\,d\lambda - \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda < \varepsilon$$

が得られる. 従って, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $k \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty F_k(\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty F(\lambda)\,d\lambda\right| &= \int_0^\infty F(\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty F_k(\lambda)\,d\lambda \\
&\leq \int_0^a F(\lambda)\,d\lambda + \int_a^b F(\lambda)\,d\lambda + \int_b^\infty F(\lambda)\,d\lambda \\
&\quad - \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

となる. 従って (4.13) が成り立つ.

4. f が可積分とならない場合を考える. まず, ある $a > 0$ が存在して, $F(a) = \infty$ となる場合を考える. 任意の $M > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, $k \geq N$ ならば $F_k(a) > M$ とできる. 従って, $k \geq N$ ならば, $F_k(\lambda)$ が λ について単調減少だったことより

$$\int_0^\infty F_k(\lambda)\,d\lambda \geq \int_0^a F_k(\lambda)\,d\lambda \geq \int_0^a F_k(a)\,d\lambda > Ma$$

となる. よって, (4.13) は左辺が無限大に発散する意味で成り立つ.

5. f が可積分とならない場合で. すべての $a > 0$ に対して $F(a) < \infty$ となる場合を考える. このとき, 任意の $M > 0$ に対して, ある $[a,b] \subset \mathbb{R}$ が存在して,

$$\int_a^b F(\lambda)\,d\lambda > M$$

とできる. 次に, 補題 4.7 より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, $k \geq N$ ならば

$$\int_a^b F(\lambda)\,d\lambda - \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda < 1$$

とできる. したがって, $k \geq N$ ならば

$$\int_0^\infty F_k(\lambda)\,d\lambda \geq \int_a^b F_k(\lambda)\,d\lambda > \int_a^b F(\lambda)\,d\lambda - 1 > M - 1$$

となるので, やはり, (4.13) は左辺が無限大に発散する意味で成り立つ. □

単調収束定理 (定理 4.4) を具体的に適用した例をみてみよう.

例 **4.8.**

$f_k : (0,2) \to \mathbb{R}$ と $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ を

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 - \frac{1}{k}, \\ -kx + k, & 1 - \frac{1}{k} < x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

とおく. f_k は f に $(0,2)$ 上各点収束する. f_k は $(0,2)$ 上連続関数だから Lebesgue 可測関数となる. $\{f_k\}_{n=1}^\infty$ は非負値単調増加関数列, つまり $x \in (0,2)$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して, $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ だから, 単調収束定理が使えて

$$\int_0^2 f_k(x)\,dx \to \int_0^2 f(x)\,dx \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ. すなわち, 例 4.1 が正当化できる.

さて, 前の節で残していた, 積分の線形性を示そう. そのために, 単関数の定義を改めて述べよう.

定義 4.9 (単関数)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が**単関数**であるとは, 有限個の互いに交わらない可測集合 $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \Sigma$ と実数 $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in \Omega \tag{4.14}$$

と書けることをいう.

単関数の積分を定義に従って計算してみよう.

命題 4.10.
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値単関数 f は有限個の互いに交わらない可測集合 $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \Sigma$ と実数 $a_1, \ldots, a_k > 0$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in \Omega$$

と書けたとする. このとき,

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

が成り立つ.

証明.
必要なら, k をとりかえて, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ としてよい. 積分の定義に従って計算すると,

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\left(\left\{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) > \lambda\right\}\right) d\lambda$$

となる. 便宜上, $a_0 = 0$ とすると $\lambda > a_k$ のときに $\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\} = \emptyset$ だから, 区間加法性より

$$\int_0^\infty \mu\left(\left\{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) > \lambda\right\}\right) d\lambda = \sum_{l=1}^{n} \int_{a_{l-1}}^{a_l} \mu\left(\left\{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) > \lambda\right\}\right) d\lambda$$

となる. $a_{l-1} < \lambda < a_l$ に対して

$$\left\{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) > \lambda\right\} = E_l \cup E_{l+1} \cup \cdots \cup E_k$$

となるから, $E_1,\dots,E_k$ が互いに素であることから,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}\int_{a_{l-1}}^{a_l}\mu\left(\left\{x\in\Omega:\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{E_k}(x)>\lambda\right\}\right)d\lambda\\
&=\sum_{l=1}^{n}\int_{a_{l-1}}^{a_l}\mu\left(E_l\cup E_{l+1}\cup\cdots\cup E_k\right)d\lambda\\
&=\sum_{l=1}^{n}(a_l-a_{l-1})\left(\mu(E_l)+\mu(E_{l+1})+\cdots+\mu(E_k)\right)\\
&=(a_1-a_0)\left(\mu(E_1)+\mu(E_2)+\cdots+\mu(E_k)\right)\\
&\quad+(a_2-a_1)\left(\mu(E_2)+\mu(E_3)+\cdots+\mu(E_k)\right)\\
&\quad+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})\left(\mu(E_{n-1})+\mu(E_k)\right)+(a_n-a_{n-1})\mu(E_k)\\
&=a_1\mu(E_1)+a_2\mu(E_2)+\cdots+a_k\mu(E_k)
\end{aligned}
$$

となる. □

命題 4.10 より, 単関数の積分は, 対応する測度の和で書けることがわかった. 次に, 非負値可測関数が単関数で近似できることを示そう.

命題 4.11 (単関数による近似)**.**
$f:\Omega\to\mathbb{R}$ を非負値可測関数とする. このとき, k について単調増加な非負値単関数列 $f_k:\Omega\to\mathbb{R}$ が存在して, $x\in\Omega$ に対して $f_k(x)\to f(x)$ $(k\to\infty)$ が成り立つ.

証明.
$k\in\mathbb{N}$, $l=1,2,\dots,k2^k$ に対し

$$A_{l,k}:=\left\{x\in\Omega:\frac{l-1}{2^k}\le f(x)<\frac{k}{2^k}\right\},\quad B_k:=\{x\in\Omega:f(x)\ge k\}$$

とおき, 単関数 f_k を

$$f_k(x):=\sum_{l=1}^{k2^k}\frac{l-1}{2^k}\chi_{A_{l,k}}(x)+k\chi_{B_k}(x) \tag{4.15}$$

とおく. f_k が単調増加であることは問題にまわす. 任意の $x\in\Omega$ に対して, $f_k(x)\to f(x)$ $(k\to\infty)$ となることを示す. $f(x)<k$ となる $k\in\mathbb{N}$ に対し,

$\frac{l_k-1}{2^k} \le f(x) < \frac{l_k}{2^k}$ となる $l_k = 1, \ldots, k2^k$ を選ぶ. すると, $f_k(x) = \frac{l_k-1}{2^n}$ であり,

$$f(x) - \frac{1}{2^k} < \frac{l_k - 1}{2^k} \le f(x)$$

だから, $k \to \infty$ とすれば $f_k(x) = \frac{l_k-1}{2^k} \to f(x)$ となる. □

問題 4.4.

式 (4.15) で与えられる f_k が単調増加であることを示したい. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x) \ge k+1$ のときに, $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ となることを示せ.
(2) $n \le f(x) < k+1$ のときに $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ となることを示せ.
(3) $f(x) < k$ のときに, $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ となることを示せ(ヒント: $\frac{l_k-1}{2^k} \le f(x) < \frac{l_k}{2^k}$ となる l_k をとる. $\frac{2l_k-1}{2^{k+1}} \le f(x)$ となるかどうかで場合わけしてみよ)

問題 4.5.

$\Omega = \mathbb{R}$ として, Ω 上の関数 f を次で定めたとき, 関数 f の概形と (4.15) で定めた関数 f_k の概形を書け.

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = e^x$$

さて, 命題 4.11 と単調収束定理 (定理 4.4) を用いて, 積分の線形性を証明しよう.

定理 4.12 (Lebesgue 積分の線形性)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ とスカラー値 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu, \tag{4.16}$$

$$\int_\Omega (cf)\, d\mu = c\int_\Omega f\, d\mu \tag{4.17}$$

が成り立つ.

証明.

1. $f, g \ge 0$, $c \ge 0$ のときに (4.16), (4.17) を示す. 命題 4.11 から, k について単調増加な非負値単関数列 $f_k, g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して, $x \in \Omega$ に対して

$f_k(x) \to f(x)$, $g_k(x) \to g(x)$ $(k \to \infty)$ が成り立つ. 単調収束定理から

$$\int_\Omega f_k\, d\mu \to \int_\Omega f\, d\mu, \quad \int_\Omega g_k\, d\mu \to \int_\Omega g\, d\mu, \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

他方, $a_\alpha, b_\beta > 0$ を用いて $f_k = \sum_{\alpha=1}^{m_a} a_\alpha \chi_{A_\alpha}$, $g_k = \sum_{\beta=1}^{m_b} b_\beta \chi_{B_\beta}$ と書く. $A_0 = \Omega \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{m_a})$, $B_0 = \Omega \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{m_b})$, $a_0 = b_0 = 0$ とおけば,

$$\begin{aligned} f_k + g_k &= \sum_{\alpha=1}^{m_a} a_\alpha \chi_{A_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m_b} b_\beta \chi_{B_\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^{m_b} \sum_{\alpha=1}^{m_a} a_\alpha \chi_{A_\alpha \cap B_\beta} + \sum_{\beta=1}^{m_b} \sum_{\alpha=0}^{m_a} b_\beta \chi_{A_\alpha \cap B_\beta} \\ &= \sum_{\substack{0 \le \alpha \le m_a \\ 0 \le \beta \le m_b}} (a_\alpha + b_\beta) \chi_{A_\alpha \cap B_\beta}, \\ c f_k &= \sum_{\alpha=1}^{m_a} c a_\alpha \chi_{A_\alpha} \end{aligned}$$

となるから, $f_k + g_k$, αf_k はどちらも単調増加な単関数であり $a_0 + b_0 = 0$ に注意して命題 4.10 を用いると

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_k + g_k)\, d\mu &= \sum_{\substack{0 \le \alpha \le m_a \\ 0 \le \beta \le m_b \\ (\alpha,\beta) \neq (0,0)}} (a_\alpha + b_\beta) \mu(A_\alpha \cap B_\beta) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m_a} \sum_{\beta=0}^{m_b} a_\alpha \mu(A_\alpha \cap B_\beta) + \sum_{\alpha=0}^{m_a} \sum_{\beta=1}^{m_b} b_\beta \mu(A_\alpha \cap B_\beta) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m_a} a_\alpha \mu(A_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{m_b} b_\beta \mu(B_\beta) = \int_\Omega f_k\, d\mu + \int_\Omega g_k\, d\mu, \qquad (4.18) \\ \int_\Omega (c f_k)\, d\mu &= \sum_{\alpha=1}^{m_a} c a_\alpha \mu(A_\alpha) \\ &= c \sum_{\alpha=1}^{m_a} a_\alpha \mu(A_\alpha) = c \int_\Omega f_k\, d\mu \end{aligned}$$

が成り立つ. すべての $x \in \Omega$ に対して $f_k(x) + g_k(x) \to f(x) + g(x)$, $\alpha f_k(x) \to \alpha f(x)$ $(k \to \infty)$ となることから, 再び単調収束定理を (4.18) に用いて, $k \to \infty$

とすれば

$$\int_\Omega (f+g)\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu, \quad \int_\Omega (cf)\,d\mu = c\int_\Omega f\,d\mu$$

が得られる.

2. f が可測関数で $c > 0$ のときに (4.17) を示す. $(cf)_+ = cf_+, (cf)_- = cf_-$ に注意すると

$$\begin{aligned}\int_\Omega (cf)\,d\mu &= \int_\Omega (cf)_+\,d\mu - \int_\Omega (cf)_-\,d\mu \\ &= \int_\Omega cf_+\,d\mu - \int_\Omega cf_-\,d\mu \\ &= c\int_\Omega f_+\,d\mu - c\int_\Omega f_-\,d\mu \\ &= c\left(\int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu\right) = c\int_\Omega f\,d\mu\end{aligned}$$

となるので, (4.17) は成り立つ.

3. f が可測関数で $c < 0$ のとき, (4.17) を示す. $c = -|c|$ に注意すると

$$\int_\Omega (cf)\,d\mu = \int_\Omega (-|c|f)\,d\mu = |c|\int_\Omega (-f)\,d\mu$$

となるから, $\int_\Omega (-f)\,d\mu = -\int_\Omega f\,d\mu$ を示せばよい. $(-f)_+ = f_-, (-f)_- = f_+$ となることから

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-f)\,d\mu &= \int_\Omega (-f)_+\,d\mu - \int_\Omega (-f)_-\,d\mu \\ &= \int_\Omega f_-\,d\mu - \int_\Omega f_+\,d\mu = -\int_\Omega f\,d\mu\end{aligned}$$

となるので, (4.17) が示された.

4. f, g が可測関数であるとき, (4.16) を示す. $f+g$ を二通りの書き方

$$f+g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-), \quad f+g = (f+g)_+ - (f+g)_-$$

と表すと

$$f_+ + g_+ + (f+g)_- = (f+g)_+ + f_- + g_- \tag{4.19}$$

が得られる. (4.19) のそれぞれの項は非負値関数だから, 両辺積分をとると, 非負値関数に対する積分の線形性から

$$\int_\Omega f_+\,d\mu + \int_\Omega g_+\,d\mu + \int_\Omega (f+g)_-\,d\mu = \int_\Omega (f+g)_+\,d\mu + \int_\Omega f_-\,d\mu + \int_\Omega g_-\,d\mu \tag{4.20}$$

が得られる. 左辺と右辺を整理すれば

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g)\,d\mu &= \int_\Omega (f+g)_+\,d\mu - \int_\Omega (f+g)_-\,d\mu \\
&= \left(\int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu\right) + \left(\int_\Omega g_+\,d\mu - \int_\Omega g_-\,d\mu\right) \\
&= \int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu
\end{aligned}
$$

となるので, (4.16) が成り立つ. □

定理 4.12 を用いると, 単調収束定理 (定理 4.4) における非負値の仮定は可積分性におきかえればよいことがわかる. 実際に f_k のかわりに $f_k - f_1$ で定理 4.4 の単調収束定理を用いてから, 積分の線形性を用いて f_1 の積分を取り除けばよい. 応用上は, f_k の可積分性は仮定できることが多く, 次の形で使うことが多い.

定理 4.13 (単調収束定理)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ は k について単調増加, すなわち, すべての $k \in \mathbb{N}$ について $f_k \le f_{k+1}$ をみたすとし, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ とおく. このとき,

$$
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu \tag{4.21}
$$

が成り立つ.

問題 4.6.

定理 4.13 を示せ (ヒント: $g_k := f_k - f_1$ とおき, 非負値可測関数に対する単調収束定理と積分の線形性を用いる).

例 4.14.

$D := (0,1) \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ に対する特性関数 $f := \chi_D$ の $(0,1)$ 上の積分を考える. $k \in \mathbb{N}$ に対して $f_k := \chi_{\{q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k\}}$ とおけば, $\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k\}$ が閉集合だから, f_k は Lebesgue 可測関数となる. $x \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ であり, $x \in (0,1)$ に対して, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = \chi_D(x)$ だから, 単調収束定理により,

$$
\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \chi_D(x)\,dx \tag{4.22}
$$

がわかる. (4.22) の左辺の積分は

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 \chi_{\{q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k\}}(x)\,dx = 0$$

となるから (**不連続点が有限個しかないから, Riemann 積分で計算できる!**), 右辺の積分値も 0 となる. つまり, $\int_0^1 \chi_D(x)\,dx = 0$ となる.

χ_D は Lebesgue 可測関数 $f_k = \chi_{\{q_1,\ldots,q_k\}}$ の各点収束における極限関数となっていることに注意しよう. 従って, 命題 3.4 より, χ_D は Lebesgue 可測関数であり, Lebesgue 積分を考えることのできる関数である. 各点収束における極限関数は Riemann 積分可能かどうかが問題になるのに対し, Lebesgue 積分は値が有限になるかはともかく積分を考えることができる.

4.2. Fatou の補題

命題 3.4 の前に上極限と下極限について説明をした. 上極限と下極限を用いると, 関数の**上半連続性**と**下半連続性**が定義できる. 開区間 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が Ω 上の**上半連続関数** (うえはんれんぞくかんすう) であるとは, 任意の Ω 上の収束点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ としたとき $\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \le f(x)$ となることである. 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が Ω 上の**下半連続関数** (したはんれんぞくかんすう) であるとは, 任意の Ω 上の収束点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ としたとき $f(x) \le \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$ となることである. Fatou の補題は, 積分がある種の下半連続性をもつことを主張する. つまり

定理 4.15 (Fatou の補題)**.**
測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の非負値可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は各点収束極限 f をもつ, すなわち, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ とする. このとき,

$$\int_\Omega f\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu \tag{4.23}$$

が成り立つ.

証明.
$k \in \mathbb{N}$ に対して, $g_k := \inf_{l\ge k} f_l$ とおくと, f_l が非負値関数だから, g_l も非負値関数である. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Ω 上各点収束するから $g_k \to \liminf_{k\to\infty} f_k = f$ となる. さらに $l \ge k$ に対して $g_k \le f_l$ より $\int_\Omega g_k\,d\mu \le \int_\Omega f_l\,d\mu$ だから, k に

ついて下限をとると

$$\int_\Omega g_k\,d\mu \le \inf_{l\ge k}\int_\Omega f_l\,d\mu \tag{4.24}$$

となる. $k\to\infty$ とすると, (4.24) の左辺は単調収束定理により $\int_\Omega f\,d\mu$ に収束する. 他方, (4.24) の右辺は $\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\,d\mu$ に収束する. 従って, (4.24) で $k\to\infty$ とすれば, (4.23) が得られる. □

Fatou の補題は関数列の積分の一様な上から評価が得られたときに, その極限関数の積分を上から評価するときに使う. しかし, 関数列の積分の一様な下から評価が得られたとしても, その極限関数の積分を下から評価することはできない. 具体例で説明しよう.

例 **4.16.**

$f_k:(0,1)\to\mathbb{R}$ と $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ を

$$f_k(x) := \begin{cases} -k^2x+k, & 0<x\le \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k}<x<1, \end{cases} \tag{4.25}$$
$$f(x) := 0,\quad 0<x<1$$

とおく. すると, f_k は非負値関数で f に $(0,1)$ 上各点収束することがわかる. $\int_\Omega f_k(x)\,dx = \frac{1}{2}$ だから, f がどういう関数かわかっていなかったとしても Fatou の補題から

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx = \frac{1}{2} \tag{4.26}$$

となることがわかる. 実際に (4.26) の左辺の積分は 0 であり, Fatou の補題に矛盾していない. また, Fatou の補題の不等式を等式にかえることができないこともわかる.

Fatou の補題を逆にしたような次の不等式

$$\limsup_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \tag{4.27}$$

が成立しないことはすぐにわかるであろう. 実際に (4.27) の左辺は $\frac{1}{2}$ であるのにたいし, (4.27) の右辺は 0 である. このことは, 関数列の極限をとったときに, 積分の値 (ざっくりといえば, グラフの面積) が極限操作で消えてしまうことがあるということを示唆している. 実際に, この具体例の場合, 関数列の極限をとると, 積分の値が原点に集中してしまい, 極限をとったときに消えてしまっている.

問題 4.7.

$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $k \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_k(x) := \chi_{(k,k+1)}(x), \quad f(x) := 0$$

と定める. このとき, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が f に $\mathbb{R}$ 上 各点収束することと

$$\int_0^1 f(x)\, dx < \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$$

が成り立つこと, Fatou の補題が等号では成立しないことをたしかめよ. 関数列の極限をとったときに, 積分の値はどこに消えてしまったのか考察せよ.

4.3. Lebesgue の優収束定理

単調でない関数を扱うときには Fatou の補題は有効であるが, 極限と積分の交換が可能かどうかはわからない. そこで, 極限と積分が交換可能となるための条件を述べる.

定理 4.17 (Lebesgue の優収束定理)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の可積分関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は各点収束極限 f をもつ, すなわち, $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ とする. さらに, k によらない可積分関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in \Omega$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して $|f_k(x)| \le g(x)$ が成り立つとする. このとき

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu \tag{4.28}$$

が成り立つ.

証明.

1. すべての $x \in \Omega$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して $|f_k(x)| \le g(x)$ が成り立つから, とくに $-g(x) \le f_k(x)$ である. 従って, $f_k + g \ge 0$ に Fatou の補題を用いると, すべての $x \in \Omega$ に対して $(f_k + g)(x) \to (f + g)(x)$ となるから

$$\int_\Omega (f + g)\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k + g)\, d\mu \tag{4.29}$$

が成り立つ. (4.29) の左辺は積分の線形性より $\int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$ となる. (4.29) の右辺は g が k に依らないことに注意すると, 積分の線形性から

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k + g)\, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu \tag{4.30}$$

となる. 従って, (4.29) と組み合わせると

$$
\int_\Omega f\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu \tag{4.31}
$$

となる.

2. 次に, $f_k(x) \le g(x)$ となるから, $g - f_k \ge 0$ に Fatou の補題を用いると, すべての $x \in \Omega$ に対して $(g - f_k)(x) \to (g - f_k)(x)$ となるから

$$
\int_\Omega (g - f)\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (g - f_k)\,d\mu \tag{4.32}
$$

が成り立つ. (4.32) の左辺は積分の線形性より $\int_\Omega g\,d\mu - \int_\Omega f\,d\mu$ となる. (4.32) の右辺は g が k に依らないことに注意すると, 積分の線形性から

$$
\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (g - f_k)\,d\mu &= \lim_{k\to\infty} \inf_{l\ge k} \left(\int_\Omega g\,d\mu - \int_\Omega f_l\,d\mu \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega g\,d\mu - \sup_{l\ge k} \int_\Omega f_l\,d\mu \right) \\
&= \int_\Omega g\,d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

となる ((4.33) の二つ目の等号で下限と上限が入れ替わることに注意). 従って, (4.32) と組み合わせると

$$
\int_\Omega f\,d\mu \ge \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu \tag{4.34}
$$

となる.

(4.31) と (4.34) より

$$
\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu \le \int_\Omega f\,d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu
$$

となるので, 問題 3.7 の結果より (4.28) が成り立つ. □

問題 4.8.

等式 (4.30) を導け.

例 4.18.

$f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ と $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \cos\left(3k\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), & \frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \le x < 1, \end{cases} \tag{4.35}$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

とおく． すると, f_k が f に $(0,1)$ 上各点収束することがわかる． さらに, $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ を $x \in (0,1)$ に対して $g(x) := 1$ とおけば, すべての $x \in (0,1)$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して $|f_k(x)| \le g(x)$ となり, $\int_0^1 g(x)\,dx = 1 < \infty$ となる. よって, Lebesgue の優収束定理の仮定をみたすことがわかるので

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

がわかる. すなわち, 例 4.2 が正当化できる.

全空間での積分, つまり $\mathbb{R}$ 上の積分を考えるときは, g のとりかたに注意が必要である.

例 4.19.

$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_k(x) := \sin(kx)e^{-kx^2}, \quad f(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.36}$$

とおく． すると, f_k が f に $\mathbb{R}$ 上各点収束することがわかる. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x) := e^{-x^2}$ とおけば, すべての $x \in \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_k(x)| \le e^{-kx^2} \le e^{-x^2} = g(x),$$

つまり, $|f_k(x)| \le g(x)$ となる. さらに,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} < \infty \tag{4.37}$$

となり, よって, Lebesgue の優収束定理の仮定をみたすことがわかるので

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$$

がわかる.

注意 4.20.

Lebesgue の優収束定理の仮定で (4.37) の仮定に注意すること．必要な仮定は積分が発散しないことであって，$|f_k(x)|$ より大きい定数を探せばよいということではない．実際に，$|f_k(x)| \leq 1$ が成り立つことはすぐにわかるが，$g(x) = 1$ としても，(4.37) を導くことはできない．

問題 4.9.

(4.37) の等式を導け．

第 5 章

2 変数の測度論と積分論

5.1. 直積測度

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, 一次元の Lebesgue 外測度 m_1^* は

$$m_1^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\}, \tag{5.1}$$

であった. 定義において本質的なことは開区間で囲う長さの下限を取るということであった. 2 次元における開区間のかわりとなるものの一例は開長方形である. 実際に二次元の Lebesgue 外測度 m_2^* は $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$m_2^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^1 - a_k^1)(b_k^2 - a_k^2) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^1, b_k^1) \times (a_k^2, b_k^2) \right\} \tag{5.2}$$

で与えられる. 三次元以上も同様にして定義できる.

問題 5.1.
$d \in \mathbb{N}$ と, $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して, d 次元 Lebesgue 外測度 m_d^* の定義を与えよ.

さて, Lebesgue 測度 m_1 と m_2 にはどのような関係があるのであろうか？このことをみるために, 測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ が与えられたときに, その直積集合 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上に新しい測度 $\mu_1 \times \mu_2$ を定義しよう.

命題 5.1.
測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ と $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ に対して

$$(\mu_1 \times \mu_2)^*(C) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k), \quad C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k), \quad A_k \in \Sigma_1,\ B_k \in \Sigma_2 \right\} \tag{5.3}$$

で定めると, $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ は $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の外測度になる.

証明.

1. 任意の $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ に対して, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C) \geq 0$ を示す. $A_k \in \Sigma_1$, $B_k \in \Sigma_2$ が $C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k)$ をみたすならば, $\mu_1(A_k) \geq 0$, $\mu_2(B_k) \geq 0$ より $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k) \geq 0$ となる. A_k, B_k について下限をとれば, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C) \geq 0$ がわかる.

2. $(\mu_1 \times \mu_2)^*(\emptyset) = 0$ を示す. $(\mu_1 \times \mu_2)^*(\emptyset) \leq 0$ を示せばよい. $A_k = \emptyset$, $B_k = \emptyset$ ととれば $\emptyset \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ であり, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k) = 0$ となる. よって, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(\emptyset) \leq 0$ である.

3. 可算個の $C_1, C_2, C_3, \ldots \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ に対して, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k)$ を示す. $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k) = \infty$ となる $k \in \mathbb{N}$ があるときは自明なので, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k) < \infty$ としてよい. 任意の $\varepsilon > 0$ と各 C_k に対して, 下限の性質から, $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_1(A_k^l)\mu_2(B_k^l) \leq (\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ かつ $C_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty}(A_k^l \times B_k^l)$ となる $A_k^l \in \Sigma_1$, $B_k^l \in \Sigma_2$ をとることができる. このとき, $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty}(A_k^l \times B_k^l)$ となるから

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \times \mu_2)^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mu_1(A_k^l)\mu_2(B_k^l) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left((\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

が得られる. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, $(\mu_1 \times \mu_2)^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_k)$ がわかる.

4. $C_1, C_2 \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ が $C_1 \subset C_2$ ならば $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_1) \leq (\mu_1 \times \mu_2)^*(C_2)$ となることを示す. $C_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ をみたす $A_k \in \Sigma_1$, $B_k \in \Sigma_2$ に対して, $C_1 \subset C_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ だから $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k)$ が成り立つ. A_k, B_k について下限をとれば $(\mu_1 \times \mu_2)^*(C_1) \leq (\mu_1 \times \mu_2)^*(C_2)$ が得られる. □

命題 5.1 で定められた外測度 $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ は $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ の測度として, それほど不自然ではない. 実際に, 2 次元の Lebesgue 測度の定め方と同じように, $A \in \Sigma_1$, $B \in \Sigma_2$ に対して, 長方形 $A \times B$ の測度を $\mu_1(A)\mu_2(B)$ とみなしておいて, その長方形たちで囲ったときの, 長方形たちのそれぞれの測度の和の下限を取っているのである. これで得られる外測度 $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ に対して, 定理 2.18 を用いれば, 完備測度を $\Omega_1 \times \Omega_2$ に定めることができる. そこで, 二

つの測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対する直積外測度と直積測度, 直積測度空間を定義しよう.

定義 5.2 (直積測度)**.**
測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ に対して, **直積外測度** $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ を $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ に対して
(5.4)
$$(\mu_1 \times \mu_2)^*(C) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\mu_2(B_k),\ C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k),\ A_k \in \Sigma_1,\ B_k \in \Sigma_2\right\}$$
で定める. この直積外測度 $(\mu_1\times\mu_2)^*$ について可測集合のなす集合族を $\Sigma_1\times\Sigma_2$ で表す. 直積外測度 $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ を $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ に制限した測度 $\mu_1 \times \mu_2$ を (完備) **直積測度**といい, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ を (完備) **直積測度空間**という.

さて, 2 次元 Lebesgue 外測度 m_2^* と 1 次元 Lebesgue 測度の直積外測度 $(m_1 \times m_1)^*$ が等しいことを示そう. これにより, $m_2 = m_1 \times m_1$ が従う.

命題 5.3.
任意の $C \subset \mathbb{R}^2$ に対して $m_2^*(C) = (m_1 \times m_1)^*(C)$ が成り立つ.

証明.
1. $(m_1 \times m_1)^*(C) \le m_2^*(C)$ を示す. $C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}((a_k^1, b_k^1) \times (a_k^2, b_k^2))$ をみたす開長方形の列 $\{(a_k^1, b_k^1) \times (a_k^2, b_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$ に対して, $m_1((a_k^1, b_k^1)) = b_k^1 - a_k^1$, $m_1((a_k^2, b_k^2)) = b_k^2 - a_k^2$ と (a_k^1, b_k^1), (a_k^2, b_k^2) が 1 次元 Lebesgue 可測集合であることから, $(m_1 \times m_1)^*$ の定義より
$$(m_1 \times m_1)^*(C) \le \sum_{k=1}^{\infty} m_1((a_k^1, b_k^1))m_1((a_k^2, b_k^2)) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k^1 - a_k^1)(b_k^2 - a_k^2)$$
が得られる. $\{(a_k^1, b_k^1) \times (a_k^2, b_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$ について下限をとれば $(m_1 \times m_1)^*(C) \le m_2^*(C)$ が従う.
2. $m_2^*(C) \le (m_1 \times m_1)^*(C)$ を示す. $(m_1 \times m_1)^*(C) = \infty$ のときは不等式は成り立つので, $(m_1 \times m_1)^*(C) < \infty$ としてよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある Lebesgue 可測集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して,
$$C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} m_1(A_k)m_1(B_k) \le (m_1 \times m_1)^*(C) + \varepsilon$$

とできる. 必要に応じて, A_k, B_k のかわりに $A_k \cap (n, n+1]$, $B_k \cap (m, m+1]$ を考えることで, $m_1(A_k), m_1(B_k) < \infty$ と仮定してよい. 次に, m_1 の定義より, ある開区間の列 $\{(a^1_{k,l}, a^2_{k,l})\}_{l=1}^{\infty}$ と $\{(b^1_{k,m}, b^2_{k,m})\}_{m=1}^{\infty}$ が存在して,

$$A_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty}(a^1_{k,l}, a^2_{k,l}), \quad B_k \subset \bigcup_{m=1}^{\infty}(b^1_{k,m}, b^2_{k,m}),$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}(a^2_{k,l} - a^1_{k,l}) \le m_1(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\frac{1}{1 + m_1(B_k)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(b^2_{k,m} - b^1_{k,m}) \le m_1(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\frac{1}{1 + m_1(A_k)}$$

とできる. すると, $C \subset \bigcup_{k,l,m=1}^{\infty}(a^1_{k,l}, a^2_{k,l}) \times (b^1_{k,m}, b^2_{k,m})$ となるので,

$$\begin{aligned}
m_2^*(C) &\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a^2_{k,l} - a^1_{k,l})(b^2_{k,m} - b^1_{k,m}) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}(a^2_{k,l} - a^1_{k,l})\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(b^2_{k,m} - b^1_{k,m})\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\left(m_1(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\frac{1}{1 + m_1(B_k)}\right)\left(m_1(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\frac{1}{1 + m_1(A_k)}\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} m_1(A_k)m_1(B_k) + 2\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2 \\
&\le (m_1 \times m_1)^*(C) + 3\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

が得られる. $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $m_2^*(C) \le (m_1 \times m_1)^*(C)$ を得る. □

$m_2^*((a_1, a_2) \times (b_1, b_2)) = (a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$ を用いれば, 次が得られる.

命題 5.4.
開長方形 $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は直積外測度 $(m_1 \times m_1)^*$ について可測集合であり,

$$(m_1 \times m_1)((a_1, a_2) \times (b_1, b_2)) = (a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$$

が成り立つ.

問題 5.2.

$m_2^*((a_1, a_2) \times (b_1, b_2)) = (a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$ を示せ.

命題 5.4 の主張は, 直積測度は直感的には縦と横の測度の掛け算になっているということである. さらに一般に次が成り立つ.

定理 5.5 (直積測度の性質 [**1**, Theorem 1.22])**.**

測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ のそれぞれの可測集合 $A \in \Sigma_1$, $B \in \Sigma_2$ について, $A \times B$ は $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ について可測集合となる. さらに,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

が成り立つ.

5.2. Fubini の定理

測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ の直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の可測関数 $f = f(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ を考える. f の積分は

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y)$$

であるが, これを逐次積分

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

と計算できるかどうかを考える. Riemann 積分では, 関数 f が $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上連続であれば上記の積分の順序交換ができた. しかし, 応用上では, 関数 f が連続でない場合も取りあつかうことも多い. Lebesgue 積分における積分の順序交換定理は Fubini の定理と呼ばれておる. これから次の 3 つの主張で述べる.

Fubini の定理を述べるために, 用語を一つ定義する.

定義 5.6 (殆んどすべて)**.**

測度空間 (Ω, Σ, μ) の $x \in \Omega$ を変数とする命題 $p(x)$ が殆んどすべての $x \in \Omega$ について成り立つとは, $N := \{x \in \Omega : p(x)$ が成り立たない $\}$ が零集合となることである.

例 5.7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) := \frac{1}{x}$ と定義しようにも, $x = 0$ で

$f(x) \in \mathbb{R}$ となっていないから定義ができていない. にもかかわらず, $x \neq 0$ で定義できていて, 定義ができない点のあつまり $\{0\}$ は Lebesgue 測度で零集合である. このようなときに, $f(x) := \frac{1}{x}$ はほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ で定義できているという.

例 5.8.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) := \cos x$ とおく. このとき, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f'(x) \neq 0$ が成り立つ. 実際に, $N := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ とおくと, $N = \pi\mathbb{Z} = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$ であり, $m_1(N) = 0$ である. ただし, m_1 は 1 次元 Lebesgue 測度である.

厳密には,「殆んどすべて」を考えるときには, 成り立たないこともあるということに注意をはらう必要がある. 実際に例 5.8 で「すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f'(x) \neq 0$ である」というのは間違いである. 他方, 成り立たない点が少しだけあったとしても, 積分を考えるうえでは考えなくても影響がない[1]くらいしかない場合, そのみえない集合は考えなくても影響がないといえる. つまり,「ほとんどすべて」というのは,「積分を考えるうえでは, 成り立っていない集合が見えない」といってよい[2].

定理 5.9 (Fubini の定理, その 1)**.**

$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限な完備測度空間, $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ は 直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の可測集合, すなわち, $S \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 殆んどすべての $y \in \Omega_2$ に対して $S_y := \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in S\}$ は 測度空間 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測集合となる, すなわち, $S_y \in \Sigma_1$ となる.
(2) 殆んどすべての $x \in \Omega_2$ に対して $S_x := \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in S\}$ は 測度空間 $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測集合となる, すなわち, $S_x \in \Sigma_2$ となる.
(3) $y \mapsto \mu_1(S_y)$ は $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となる.
(4) $x \mapsto \mu_2(S_x)$ は $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測関数となる.

さらに

$$(\mu_1 \times \mu_2)(S) = \int_{\Omega_2} \mu_1(S_y)\, d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1} \mu_2(S_x)\, d\mu_1(x) \tag{5.5}$$

が成り立つ.

[1] しかし, 例 5.7 で, $x = 0$ を考えないことで積分が有限になるわけではない. 積分は無限大にどのくらい速く発散するかを調べていることに注意.

[2] このみえない集合がどうなっているのかを調べる問題ももちろんある.

注意 5.10.

定理 5.9 において, すべての $y \in \Omega_2$ について, $S_y \in \Sigma_1$ ということより, $\mu_1(S_y)$ はすべての $y \in \Omega_2$ について定義できているわけではない. にもかかわらず (5.5) の定義は意味をもつ. それは, $S_y \in \Sigma_1$ が殆んどすべての $y \in \Omega_2$ について成り立つ, すなわち $N := \{y \in \Omega_2 : S_y \notin \Sigma_1\}$ とおくと $\mu_2(N) = 0$ となることから,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} \mu_1(S_y)\, d\mu_2(y) &= \int_{\Omega_2 \setminus N} \mu_1(S_y)\, d\mu_2(y) + \int_N \mu_1(S_y)\, d\mu_2(y)\\ &= \int_{\Omega_2 \setminus N} \mu_1(S_y)\, d\mu_2(y)\end{aligned}$$

とすればよい. 以下, 殆んど至るところ定義された可測関数に関する積分は同様に定義されていない部分を除外して考えればよい.

式 (5.5) は特性関数 χ_S を用いて

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} \chi_S(x,y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \chi_S(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)\\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \chi_S(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)\end{aligned} \tag{5.6}$$

と書ける. つまり, 定理 5.9 は単関数に対する積分の順序交換定理である.

定理 5.11 (Fubini の定理, その 2)**.**

$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限な完備測度空間, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ は直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の**非負値**可測関数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 殆んどすべての $y \in \Omega_2$ に対して, $x \mapsto f(x,y)$ は $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測関数となる.
(2) 殆んどすべての $x \in \Omega_1$ に対して, $y \mapsto f(x,y)$ は $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となる.
(3) $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)$ は $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となる.
(4) $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)$ は $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測関数となる.

さらに

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)\\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)\end{aligned} \tag{5.7}$$

が成り立つ.

定理 5.11 は 5.9 を内包していることに注意しておく. 実際に, 可測集合 $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ に対して, $f = \chi_S$ とおくと, $x \mapsto \chi_S(x, y)$ が Ω_2 上で可測関数ということは, S_y が Ω_2 上の可測集合であることにほかならない. さらに, $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)$ が $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となるということは $y \mapsto \int_{\Omega_1} \chi_S(x, y)\, d\mu_1(x) = \mu_1(S_y)$ が Ω_2 上可測関数となることである. それでも, 定理を二つにわけた理由は, 定理 5.9 を証明してから定理 5.11 を証明するからということと, 定理 5.9 の形でも使うことが多々あるからということである.

また, 定理 5.11 の仮定で可測関数 f に可積分性を仮定してないことにも注意して欲しい. 定理 5.11 は**非負値可測関数であれば, 他に何かを追加して考えることなく, 積分の順序を交換してよいということ**を主張する. この積分の順序交換は無限大に発散していることをも含んでいる. なお, 定理 5.11 は Tonelli の定理ということもある.

最後に符号変化する可測関数に対する Fubini の定理を述べる.

定理 5.12 (Fubini の定理, その 3)**.**

$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限な完備測度空間, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ は直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の**可積分**関数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 殆んどすべての $y \in \Omega_2$ に対して, $x \mapsto f(x, y)$ は $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測関数となる.
(2) 殆んどすべての $x \in \Omega_1$ に対して, $y \mapsto f(x, y)$ は $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となる.
(3) $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)$ は $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 上の可測関数となる.
(4) $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$ は $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上の可測関数となる.

さらに

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

が成り立つ.

定理 5.12 における f の直積測度空間における可積分性は一見すると, 確認のしようがない難しい仮定のように思える. しかし, 定理 5.11 を用いると, この仮定は, 細かいことを考えずに絶対値をつけた積分の順序交換をして, それらが有限かどうかを確かめればよい問題に帰着できる. 実際に, 定理 5.11 から, $|f|$ は非負値可測関数になることに注意すると,

$$\tag{5.9} \begin{aligned} \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|\, d(\mu_1\times\mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|\, d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) \\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. これのどれかが有限であることを確かめられれば, f が直積測度空間上の可積分関数となることが従うのである. まとめると, 次の積分の順序交換に関する有用な系 (Fubini-Tonelli の定理) が得られる.

系 5.13 (Fubini-Tonelli の定理)**.**
$(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ と $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を σ-有限な完備測度空間, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ は直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上の可測関数とする. もし,

$$\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|\, d(\mu_1\times\mu_2)(x,y), \qquad \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|\, d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y),$$
$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)$$

のいずれかが有限であれば,

$$\tag{5.10} \begin{aligned} \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\, d(\mu_1\times\mu_2)(x,y) &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) \\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Fubini の定理の応用として, Lebesgue 可積分でない関数 $\frac{\sin x}{x}$ の広義 Riemann 積分を求めよう.

例 5.14.
任意の $t > 0$ に対して,

$$\tag{5.11} \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

が成り立つ[3].

証明.

$x > 0$ に対して $\frac{e^{-tx}}{x} = \int_t^\infty e^{-xy}\,dy$ だから, とりあえず (成り立つかどうかはあとまわしにして) 積分の順序交換をしてみると

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\int_t^\infty e^{-xy}\,dy\right)\sin x\,dx = \int_t^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy$$

が得られる.

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2} \tag{5.12}$$

より

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_t^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = [\arctan y]_{y=t}^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

となり, (5.11) が成り立つことがわかる.

成り立つかどうかをあとまわしにした, 積分の順序交換ができるかどうかを調べよう. $x \geq 0$ に対して $\sin x \leq x$ より, 特に $|\sin x| \leq x$ となるから, $|e^{-xy}\sin x| \leq xe^{-xy}$ である. 定理 5.11(Fubini の定理/Tonelli の定理) より

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \left(\int_0^\infty |e^{-xy}\sin x|\,dx\right)dy &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty |e^{-xy}\sin x|\,dy\right)dx \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_t^\infty xe^{-xy}\,dy\right)dx \\ &\leq \int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t} < \infty\end{aligned}$$

となるので, 系 5.13 から積分の順序交換が正当化される. □

問題 5.3.

(5.12) を示せ.

例 5.15.

広義 Riemann 積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{5.13}$$

[3] (5.11) は $\frac{\sin x}{x}$ の Laplace 変換という.

が絶対収束はしないが条件収束することは知られている．この積分の値が $\frac{\pi}{2}$ となることを示す．$k \in \mathbb{N}$ に対して例 5.14 から

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \tag{5.14}$$

であった．(5.14) で (左辺が収束するかはとりあえずおいといて) $k \to \infty$ とすると

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

となるから，

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{5.15}$$

が示せれば証明が終わる．

(5.15) の左辺の積分を部分積分して，$x = kz$ と変数変換すると

(5.16)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \left[e^{-\frac{x}{k}} \left(\int_0^x \frac{\sin y}{y}\, dy\right)\right]_{x=0}^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \left(\int_0^x \frac{\sin y}{y}\, dy\right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-z} \left(\int_0^{kz} \frac{\sin y}{y}\, dy\right) dz\end{aligned}$$

が得られる．(5.13) の広義積分が収束することを用いると，ある $M > 0$ が存在して，$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\int_0^{kz} \frac{\sin y}{y}\, dy\right| \le M$$

とできる．よって，(5.16) の変数 z に関する被積分関数は

$$\left|e^{-z} \int_0^{kz} \frac{\sin y}{y}\, dy\right| \le Me^{-z}$$

と評価でき，$\int_0^\infty Me^{-z}\, dz < \infty$ となる．従って，Lebesgue の優収束定理より，極限と積分の順序が交換できて，

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-z} \left(\int_0^{kz} \frac{\sin y}{y}\, dy\right) dz \\ &= \int_0^\infty \lim_{k\to\infty} e^{-z} \left(\int_0^{kz} \frac{\sin y}{y}\, dy\right) dz \\ &= \int_0^\infty e^{-z} \left(\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy\right) dz = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy\end{aligned} \tag{5.17}$$

が得られる. これで, (5.15) が証明できた.

問題 5.4.
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を Fubini の定理を用いて示せ.

索引

参考文献

[1] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992,

[2] Kenneth J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics **85**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[3] Juha Kinnunen, *Measure and Integral*, `http://math.aalto.fi/~jkkinnun/files/measure_and_integral.pdf`

[4] Elliott H. Lieb, and Michael Loss, *Analysis*, second edition, Graduate Studies in Mathematics **14**, American Mathematical Society, 2001.

[5] 伊藤 清三,「ルベーグ積分入門」, 裳華房, 1963.