

### 第3章 高校の微分積分

#### §3.1 微分とその応用

例3.1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := \sqrt{x^2+1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定めるとき、 $f'(x)$  を求めよ。

(やり方1)  $g(x) := x^2+1$ ,  $h(y) = \sqrt{y}$  とすると  $f(x) = h \circ g(x)$  となる。合成関数の微分法より

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(やり方2)  $\log f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2+1)$  を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\text{よって } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ となる。}$$

(やり方3)  $(f(x))^2 = x^2+1$  を微分すると

$$2f(x)f'(x) = 2x \quad \text{よって } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ となる。}$$

④ 微分可能な関数にはいろいろなやり方がある。 □

< Taylor-Macburin 展開 >

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (*)$$

とかけたとして、 $a_0, a_1, a_2, \dots$  を求めよう。

1.  $(*)$  に  $x=0$  を代入すると  $\underline{a_0 = f(0)}$  がわかる。

2.  $(*)$  を  $x$  で微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \quad (**)$$

となるから、 $(**)$  に  $x=0$  を代入すると  $\underline{a_1 = f'(0)}$  がわかる。

3. (\*\*\*) を  $x$  で微分すると

$$f''(x) = 2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x + 4 \times 3 a_4 x^2 + \dots \quad (***)$$

となるから、(\*\*\*) に  $x=0$  を代入すると  $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$  がわかる。

4. (\*\*\*) を  $x$  で微分すると

$$f'''(x) = (3 \times 2 \times 1) a_3 + (4 \times 3 \times 2) a_4 x + \dots \quad (***)$$

となるから、(\*\*\*) に  $x=0$  を代入すると  $a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$  がわかる。

以下 (1) 返すことで

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

と推測できる。

例 3.2

$$e^x \text{ について } (e^x)^{(n)} = \frac{d^n(e^x)}{dx^n} = e^x \quad \forall n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

となる。

□

例 3.3

$\cos x$  について

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x & n=1, 5, 9, 13, \dots \\ -\cos x & n=2, 6, 10, 14, \dots \\ \sin x & n=3, 7, 11, 15, \dots \\ \cos x & n=4, 8, 12, 16, \dots \end{cases}$$

より

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

となる。

□



### 例3.4

$$\log(1+x) \text{ について } (\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \text{ であり}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

となる

□

この展開は  $x=0$  まで正しいのだから?

### 定理3.1 (Taylor-Maclaurin 展開)

無限回微分可能な関数  $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $k \in \mathbb{N}$  に対し

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R(x)x^k$$

とかけると、 $R(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) が成り立つ。 □

Taylor-Maclaurin 展開を用いると、極限が計算できることがある。

### 例3.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} \text{ を求める。定理3.1 より}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + R_{2,1}(x)x^2, \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + R_{2,2}(x)x^2$$

とかけると、 $R_{2,1}(x), R_{2,2}(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{\log(1+x) - x} &= \frac{(1 - \frac{1}{2!}x^2 + R_{2,1}(x)x^2) - 1}{(x - \frac{1}{2}x^2 + R_{2,2}(x)x^2) - x} \\ &= \frac{1 - 2R_{2,1}(x)}{1 - 2R_{2,2}(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

がわかる。

□

### <凸不等式>

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  が凸関数であるとは  $\forall x \in (a, b)$  に対して、 $f''(x) \geq 0$  となることである。

#### 例3.6

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定めると、 $f$  は凸関数である。 □

#### 定理3.2

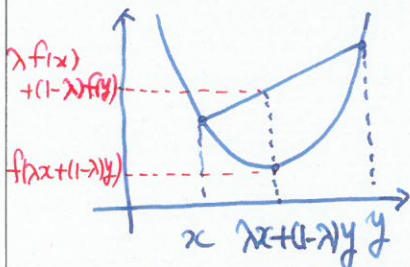
無限回微分可能な  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、次は同値。

(1)  $f$  が凸関数

(2)  $\forall x, y \in (a, b)$ ,  $0 < \lambda < 1$  に対して

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

□



定理3.2 (2) は、グラフをかくと、

$(x, f(x))$ ,  $(y, f(y))$  を結ぶ線分が

常にグラフの上側にあることを主張している。

#### 例3.7 (相加・相乗平均とYoungの不等式)

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := -\log x$  ( $x \in (0, \infty)$ ) で定めると、

$f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$  となるから、 $f$  は凸関数である。よって、

$1 < p < \infty$  に対して、 $\lambda = \frac{1}{p}$  とし、定理3.2を用いると

$\forall x, y > 0$  に対して

$$-\log\left(\frac{1}{p}x + \left(1-\frac{1}{p}\right)y\right) \leq -\frac{1}{p}\log x - \left(1-\frac{1}{p}\right)\log y$$

となる。 $\frac{1}{q} := 1 - \frac{1}{p}$  とおき、両辺  $\exp$  をとると



$$\exp\left(\frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y\right) \leq \exp\left(\log\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)\right)$$

よ)  $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$  —(\*)

となり.  $p=2$  とすれば  $q=2$  となり. 相加相乗平均の不等式

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

が得られる. また.  $a, b > 0$  に対して. (\*) で  $x=a^p, y=b^q$  とおくと

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
 —(\*\*)

が得られる. (\*\*) を Young の不等式という. □

### 例 3.8

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $f(x) := x^3$  ( $x \in (0, \infty)$ ) と定めると.

$f$  は凸関数である(各自). よって  $\forall a, b > 0$  に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

よから

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3$$

となり.

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3 + b^3)$$

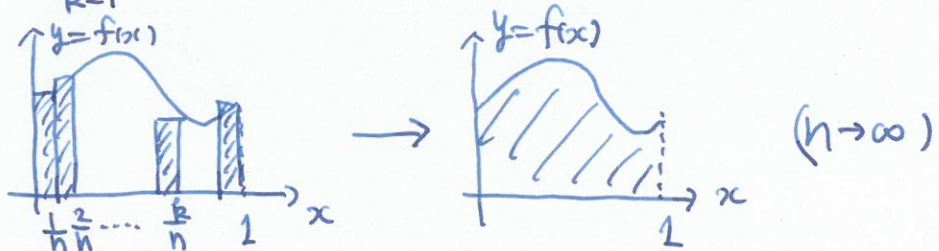
がわかる. □

### §3.2 積分とその応用

<区分求積法>

連続関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  に対し.

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$



$f(x) \geq 0$  のとき,  $\int_0^1 f(x) dx$  は  $[0, 1]$  上のグラフの下側の面積

例13.9

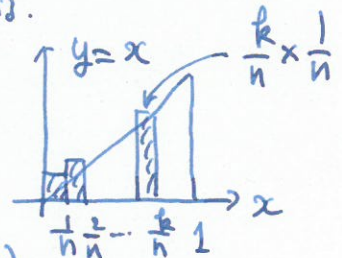
$\int_0^1 x dx$  を微分を考慮せずに求め.

右図より

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  となる。



例13.10 (x軸回転体の体積)

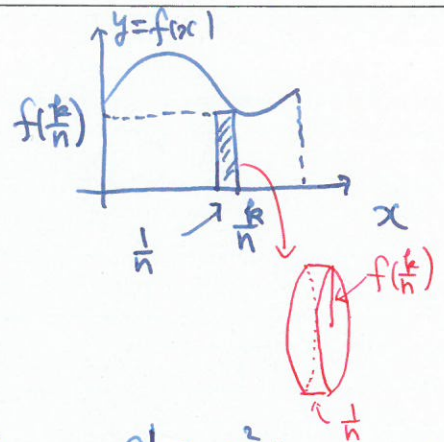
連続関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  は,  $\forall x \in [0, 1]$  に対し  $f(x) \geq 0$  であるとする.  $n$  のとき, 曲線  $y=f(x)$  と x 軸および 2 直線  $x=0, x=1$  で囲まれた部分を x 軸まわりに 1 回転させてできる立体の体積  $V$  を求める.



右図の斜線部分を  $x$  軸の  
まわりに 1 回転させてできる  
立体の体積は

$$\pi \left( f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 \frac{1}{n}$$

半径                      ↑ 円板の厚さ



だから、和をとり  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\sum_{k=1}^n \pi \left( f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 \frac{1}{n} = \pi \sum_{k=1}^n \left( f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 \frac{1}{n} \rightarrow \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。よって  $V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$  となる。 □

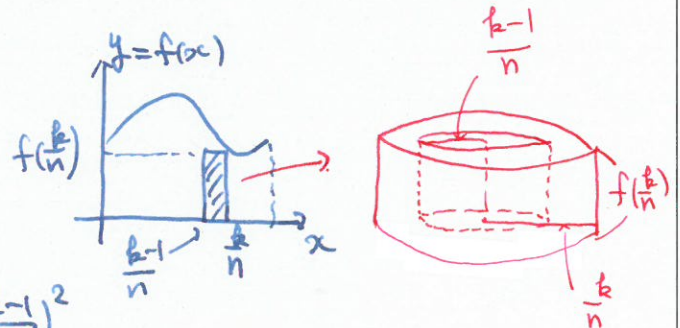
### 例 3.11 (y 軸回転体の体積)

連続関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\forall x \in [0, 1]$  に対して  $f(x) \geq 0$  と  
みたすとする。このとき、曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および 2 直線  
 $x = 0, x = 1$  で囲まれた部分を  $y$  軸まわりに 1 回転させてできる  
立体の体積  $V$  を求める。

右図の斜線部分を  
 $y$  軸まわりに 1 回転  
させてできる立体の体積は

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \pi \left(\frac{k}{n}\right)^2 - f\left(\frac{k}{n}\right) \pi \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

高さ                      ↓ 外側の半径                      高さ                      ↑ 内側の半径



$$= \pi f\left(\frac{k}{n}\right) \left( \frac{2k}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

となるから、和をとり  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\sum_{k=1}^n \pi f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 2\pi \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}}_{\rightarrow \int_0^1 x f(x) dx} - 2\pi \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \downarrow \\ \int_0^1 f(x) dx}}$$

$$\rightarrow 2\pi \int_0^1 x f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。よって  $V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx$  となる。 □

### <曲線の長さ>

パラメータ  $0 \leq t \leq 1$  で表される曲線  $C(x(t), y(t))$  の長さを (少し形式的に) 求める。  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$  に対し。

Taylor-Maclaurin展開より

$$x\left(t + \frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right) = x'\left(\frac{k}{n}\right)t + R_1(t),$$

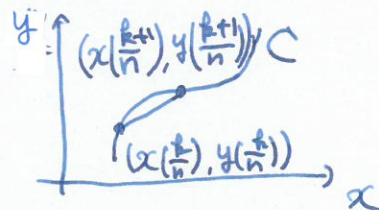
$$y\left(t + \frac{k}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right) = y'\left(\frac{k}{n}\right)t + R_2(t)$$

よって  $\frac{R_1(t)}{t}, \frac{R_2(t)}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0)$  より。  $t = \frac{1}{n}$  とすると

$nR_1\left(\frac{1}{n}\right), nR_2\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$  となる。

$(x\left(\frac{k}{n}\right), y\left(\frac{k}{n}\right))$  と  $(x\left(\frac{k+1}{n}\right), y\left(\frac{k+1}{n}\right))$

の距離は三平方の定理より



$$\sqrt{\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 + \left(y\left(\frac{k+1}{n}\right) - y\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x'\left(\frac{k}{n}\right) + nR_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \left(y'\left(\frac{k}{n}\right) + nR_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} \frac{1}{n}$$

よって  $k$  に関する和  $\Sigma$  によって  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x'\left(\frac{k}{n}\right) + nR_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \left(y'\left(\frac{k}{n}\right) + nR_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (n \rightarrow \infty)$$



となる. 従って曲線  $C$  の長さ  $l$  は

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

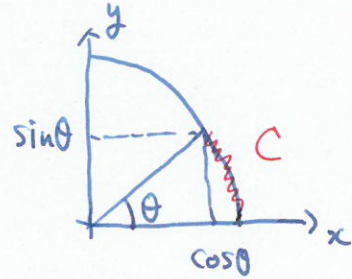
で与えられる.

### 例3.12

単位円は第一象限で

$$(\sqrt{1-y^2}, y) \quad (0 < y < 1)$$

で表す. 角度  $\theta$  (rad) は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき, 右図の曲線  $C$



の長さ  $l$  を求めよ.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\sin \theta} \sqrt{((\sqrt{1-y^2})')^2 + (y')^2} dy \\ &= \int_0^{\sin \theta} \sqrt{\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + 1} dy = \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \end{aligned}$$

となる.  $\theta = \arcsin x$  とおくと,  $\sin \theta = x$  (\*)

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad (*)$$

が得られる. 特に, 円周率の微分積分を用いた定式化

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad \text{が得られる.} \quad \square$$

### 注意3.1

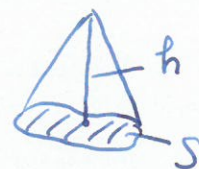
例3.12の(\*)は三角関数の定義そのものである. この定義から, 微分積分学の基本定理より

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy - \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy}{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \Big|_{y=0} = 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

が正当化できる.

### <錐の体積>

右図のような底面積  $S$ , 高さ  $h$  の錐の体積  $V$  を求め.



#### ア行 P1

$h$  を右図のように  $n$  等分する. 上から  $k$  番目のブロックの体積  $V_k$  は. 相似比  $h: \frac{k}{n}h = 1: \frac{k}{n}$  に注意して

$$V_k = \left( \left( \frac{k}{n} \right)^2 S \right) \left( \frac{1}{n} h \right) = \frac{k^2}{n^3} S h$$

となる.  $k$  について和をとる.  $n \rightarrow \infty$  とおくと

$$\sum_{k=1}^n V_k = \frac{S h}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \rightarrow \frac{1}{3} S h \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる.

#### ア行 P2

$h$  を右図のように  $n$  等分する. 上から  $k$  番目のブロックの体積  $V_k$  は

$$V_k = \left( \left( \frac{k-1}{n} \right)^2 S \right) \left( \frac{1}{n} h \right) = \frac{(k-1)^2}{n^3} S h$$

となる.  $k$  について和をとる.  $n \rightarrow \infty$  とおくと

$$\sum_{k=1}^n V_k = \frac{S h}{n^3} \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) \rightarrow \frac{1}{3} S h \quad (n \rightarrow \infty)$$

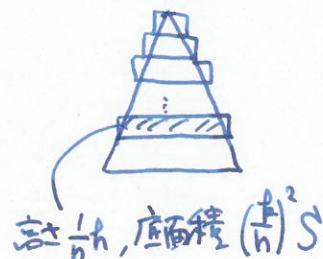
となる. どちらのア行 P でも同じ値に収束した.

#### 疑問

ア行 P1 と ア行 P2 は常に同じ値に収束するのか?

#### 答え

さう! 大雑把にいうと. 同じ値に収束  $\Leftrightarrow$  (Riemann) 積分可能.

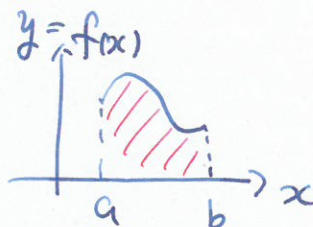




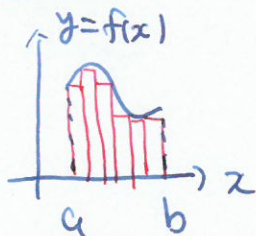
# 第4章 Riemann 積分

<目標>

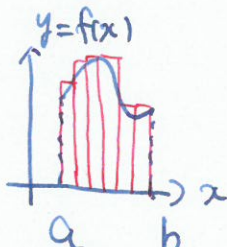
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  
面積を定義したい。



困ること



内側から近づける



外側から近づける

これは一致するの？

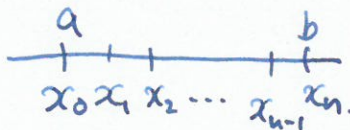
以下  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  とする。

## §4.1 Riemann 積分の定義

定義4.1 (分割)

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \text{ と}$$

$[a, b]$  の分割 という。



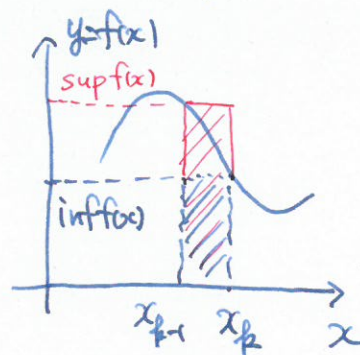
□

有界な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  と  $[a, b]$  の分割  $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$  に対して

$$s_\Delta(f) := \sum_{k=1}^n \left( \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \right) (x_k - x_{k-1}),$$

$$S_\Delta(f) := \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \right) (x_k - x_{k-1})$$

となく。右図で □ の面積をあらわす和をとったものが  $s_\Delta(f)$ , ▨ の面積をあらわす和をとったものが  $S_\Delta(f)$  である。



定義 4.2 (Riemann 積分)

有界な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ S_\Delta(f) : \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割} \}$  ← 内側から近づける

$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ S_\Delta(f) : \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割} \}$  ← 外側から近づける

とおき, Riemann 下積分, Riemann 上積分 という。

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  のとき,  $f$  は  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能であるといふ

$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx (= \int_a^b f(x) dx)$

と定める。

< Riemann 積分可能 のは >

「内側からどんな分割を考えたも, 「外側からどんな分割を考えたも」その極限が同じ値になるとき, 面積(積分)が定められる。ということ。

① Riemann 積分を求めにはどうしたらよいか?

定義 4.3 (分割の長さ)

$[a, b]$  上の分割  $\{x_0, \dots, x_n\}$  に対して  $|\Delta| := \max_{k=1, \dots, n} \{x_k - x_{k-1}\}$

を分割  $\Delta$  の長さという。

定理 4.1 (Darboux)

有界な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して  $\exists \delta > 0$  s.t.  $[a, b]$  上の  $\forall$  分割  $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$  に対して,  $|\Delta| < \delta$  ならば

$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < S_\Delta(f), \int_a^b f(x) dx + \varepsilon > S_\Delta(f)$

が成り立つ。



< Darboux の定理のよいて=3 >

∃ 分割  $\Delta$  なる上限, 下限の定義から従う。  $\forall$  分割  $\Delta$  で  $|\Delta| < \delta$  で成り立つことが非自明。

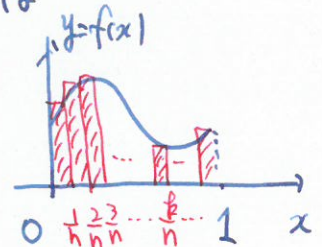
### 系 4.1 (区分解法)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が Riemann 積分可能ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

が成り立つ。

□



定理 4.1 の証明は web1-1 E 参照。

### 系 4.1 の証明

$\forall \varepsilon > 0$  に対して, 定理 4.1 の  $\delta > 0$  により,  $N \in \mathbb{N}$   $\frac{1}{N} < \delta$  とおくと,  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対し  $n \geq N$  ならば  $\Delta := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  とおけば  $|\Delta| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$  であるから, 定理 4.1 より

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < S_n(f) \leq \sum_{n=1}^N f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}, \quad \int_a^b f(x) dx + \varepsilon > S_n(f) \geq \sum_{n=1}^N f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

となる。  $f$  が  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能なることから

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{n=1}^N f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

から従う。

□

### 注意 4.1

区分解法は  $f$  が Riemann 積分可能でないで成り立たない。

□

① Riemann 積分可能な関数はどんな関数か?

### 定義 4.4 (振動量)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  と  $A \subset [a, b]$  に対し

$$\text{osc } f(x) := \sup_{x, x' \in A} |f(x) - f(x')|$$

$\Sigma f$  の  $A$  における振動量という。

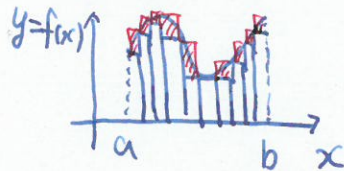
### 命題 4.1

有界な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対し

$\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\exists \Delta = \{x_0, \dots, x_n\} : [a, b]$  上の分割 s.t.

$$\sum_{k=1}^n (\text{osc } f(x)) (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \Rightarrow f \text{ は Riemann 積分可能}$$

<命題 4.1 のイ>



の和が小さい

$\Rightarrow f$  は Riemann 積分可能

証明は web 1-1

### 定理 4.2 (Riemann 積分の基本定理)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が  $[a, b]$  上連続  $\Rightarrow f$  は Riemann 積分可能

### 証明

$f$  は  $[a, b]$  上連続より一様連続となる (定理 2.10)。よって  $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x, x' \in [a, b]$  に対し

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

とできる。  $N \in \mathbb{N}$   $\frac{b-a}{N} < \delta$  となるように (1)。

$[a, b]$  の  $N$  等分割

$$\Delta := \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{1}{N}(b-a), x_2 = a + \frac{2}{N}(b-a), \dots, x_k = a + \frac{k}{N}(b-a), \dots, x_N = b\}$$



$\varepsilon \in (a, b]$  の分割とすると,  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} < \delta$  だから

$$\text{osc } f(x) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$x_{k-1} \leq x, x' \leq x_k$

よって

$$\sum_{k=1}^N (\text{osc } f(x)) (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{N} = \varepsilon$$

が得られる. 命題 4.15)  $f$  は Riemann 積分可能である.  $\square$

### 定理 4.3

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が有界で単調減少 (or 単調増加)

$\Rightarrow f$  は Riemann 積分可能  $\square$

証明は web 1-t.

### 例 4.1

$\int_0^1 x dx$  を区分積法で求める.

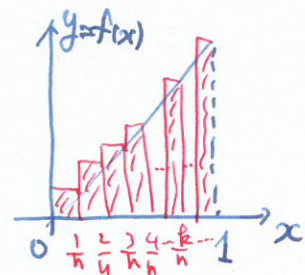
$f(x) = x$  とすると,  $f$  は  $[0, 1]$  上連続だから Riemann 積分可能である.

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

よって

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

と微分 (原始関数) を用いて求められる.  $\square$



## §4.2 Riemann 積分の性質

以下、関数は有界なもののみ考える。

定理4.4 (区間加法性)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は有界,  $a < c < b$

<仮定>

$f$  は  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  上 Riemann 積分可能

<結論>

$f$  は  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能で  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

□

証明  $\forall \varepsilon > 0$  を固定する。

1. (下積分の評価)  $\int_a^c f(x) dx$ ,  $\int_c^b f(x) dx$  の定義より

$\exists \Delta: [a, c]$  の分割,  $\exists \Delta': [c, b]$  の分割 s. t.

$$\int_a^c f(x) dx - \varepsilon < s_{\Delta}(f), \int_c^b f(x) dx - \varepsilon < s_{\Delta'}(f)$$

とできる。  $\Delta \cup \Delta'$  は  $[a, b]$  の分割だから

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx - 2\varepsilon &\leq s_{\Delta}(f) + s_{\Delta'}(f) \\ &= s_{\Delta \cup \Delta'}(f) \leq \int_a^b f(x) dx \quad -(*) \end{aligned}$$

が成り立つ。

2. (上積分の評価) 1. と同様にして

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + 2\varepsilon \geq \int_a^b f(x) dx \quad -(**)$$

が得られる。



3.  $f$  は  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  上 Riemann 積分可能より

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

が成り立つ。(\*)と(\*\*)より

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + 2\varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx + 4\varepsilon$$

となる。  $\varepsilon \downarrow 0$  とすると、それぞれの積分が  $\varepsilon$  に依らないこと  
に注意すれば

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \quad (**)$$

が得られる。他方  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$  だから (\*\*) の不等号  
はすべて等号となる。よって  $f$  は  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能で

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

となる。

□

定理4.4の  $a < c < b$  は積分の向きを考慮にとり仮定せずに  
示すことができる。

定義4.5

Riemann 積分可能な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$$

と定める。

□

定理4.5 (区間加法性)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は有界,  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  上 Riemann 積分可能

$\Rightarrow f$  は  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能で

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

□

証明は  $a, b, c$  についての場合分けと定理4.5を用いる。

定理4.6 (積分の順序保存性)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は Riemann 積分可能,

$\forall x \in [a, b]$  に対して  $f(x) \leq g(x)$  ( $f \leq g$  とか) )

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

□

証明

$[a, b]$  の  $\forall$  分割  $\Delta$  に対しても

$$S_\Delta(f) \leq S_\Delta(g) \quad (\because f \leq g)$$

$$\leq \int_a^b g(x) dx$$

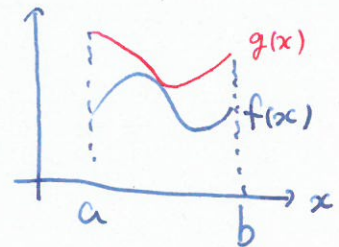
$$= \int_a^b g(x) dx \quad (\because g \text{ は Riemann 積分可能})$$

より  $\Delta$  について上界  $\epsilon$  とすると,  $f$  が Riemann 積分可能なることから

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

となる。

□





### 定理4.7 (積分の線形性)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は Riemann 積分可能,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$  は Riemann 積分可能で

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad \square$$

### 証明

線形性を示すには  $f+g$  と  $\alpha f$  が Riemann 積分可能であること  
を示せばよい。

1.  $f+g$  が Riemann 積分可能であることを示す。

$\forall \varepsilon > 0$  に対し,  $\exists \Delta, \Delta' : [a, b]$  の分割 s.t.

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < S_{\Delta}(f), \quad \int_a^b g(x) dx - \varepsilon < S_{\Delta'}(g)$$

とできる。  $S_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta \cup \Delta'}(f)$  と  $S_{\Delta \cup \Delta'}(f) + S_{\Delta \cup \Delta'}(g) \leq S_{\Delta \cup \Delta'}(f+g)$   
に注意すると

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - 2\varepsilon &< S_{\Delta}(f) + S_{\Delta'}(g) \\ &\leq S_{\Delta \cup \Delta'}(f) + S_{\Delta \cup \Delta'}(g) \\ &\leq S_{\Delta \cup \Delta'}(f+g) \\ &\leq \int_a^b (f(x) + g(x)) dx \end{aligned}$$

となる。  $\forall \varepsilon > 0$  とすると  $f, g$  は Riemann 積分可能である。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

が得られる. 同様にして

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

も成り立つから,  $f+g$  は Riemann 積分可能となる.

2.  $\alpha=0$  のとき,  $\alpha f$  が Riemann 積分可能なのは明らかなので  
 $\alpha \neq 0$  のときに示す.  $\forall \varepsilon > 0$  に対し,  $\exists \Delta: [a, b]$  の分割  $\mathcal{S}$  s.t.

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < S_{\Delta}(f) \quad (*)$$

とできる.  $\alpha > 0$  と  $\alpha < 0$  の場合に分ける.

3.  $\alpha > 0$  のとき,  $(*)$  より

$$\alpha \int_a^b f(x) dx - \alpha \varepsilon < \alpha S_{\Delta}(f) = S_{\Delta}(\alpha f) \leq \int_a^b (\alpha f(x)) dx$$

だから  $\varepsilon \downarrow 0$  とすると  $f$  が Riemann 積分可能より

$$\alpha \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b (\alpha f(x)) dx \text{ が得られる. 同様に.}$$

$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\alpha f(x)) dx$  も得られるので  $\alpha f$  は Riemann 積分可能である.

4.  $\alpha < 0$  のとき,  $(*)$  より

$$\alpha \int_a^b f(x) dx - \alpha \varepsilon > \alpha S_{\Delta}(f) = S_{\Delta}(\alpha f) \geq \int_a^b (\alpha f(x)) dx$$

より  $\varepsilon \downarrow 0$  とすると  $f$  が Riemann 積分可能より

$$\alpha \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b (\alpha f(x)) dx \text{ が得られる. 同様に.}$$

$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\alpha f(x)) dx$  も得られるので  $\alpha f$  は Riemann 積分可能である.

□



### 定理4.8 (積分平均値定理)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は有界.

(1)  $f$  が  $[a, b]$  上 Riemann 積分可能

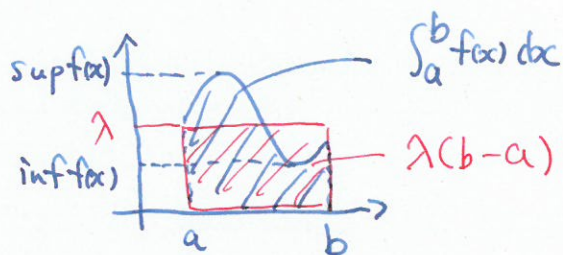
$$\Rightarrow \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \exists \lambda \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \text{ s.t. } \int_a^b f(x) dx = \lambda(b-a)$$

(2)  $f$  が  $[a, b]$  上連続

$$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] \text{ s.t. } \int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a)$$

<定理4.8のイ>

図と  $\square$  の面積が  
等しくなるように  
 $\lambda$  をとることが出来る.



### 定理4.8の証明

(1)  $\forall x \in [a, b]$  に対し

$$m := \inf_{a \leq y \leq b} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{a \leq y \leq b} f(y) =: M$$

だから  $[a, b]$  上で積分すると、定理4.6 (積分の順序保存性) より

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

すなわち

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

となる。よって  $\lambda := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  とおけば  $m \leq \lambda \leq M$

であり  $\lambda(b-a) = \int_a^b f(x) dx$  となる。

(2) (1)において,  $f$ が $[a, b]$ 上連続ならば  $M$ は最大値,  $m$ は最小値となる (定理2.9, Weierstrassの定理). 中間値の定理 (定理2.8)より,  $\exists x_0 \in [a, b]$  s.t.  $\lambda = f(x_0)$  となるので  $\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a)$  となる.  $\square$

### §4.3 不定積分

高校の教科書では, 不定積分 (or 原始関数) を先に学んでから定積分を学んだ. しかし, この講義では積分は面積を求めるための計算であることを重視するため, 定積分 (Riemann積分) を先に扱った.  $\therefore$  不定積分とは何か? を考える.

#### 定義4.6 (不定積分)

有界で Riemann積分可能な関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対し  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  と

$$F(x) := \int_a^x f(z) dz \quad (x \in [a, b])$$

で定義する. この関数  $F$  を  $f$  の不定積分という.  $\square$

#### 注意4.2

上端と下端のない積分記号  $\int f(x) dx$  は原始関数と呼ぶのが正確である.  $\square$

#### 定義4.7 (原始関数)

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  に対し  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  が  $f$  の原始関数

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad (\forall x \in (a, b))$$

このとき,  $F(x) = \int f(x) dx$  とかく.  $\square$



### 注4.3

定義4.7で極限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  は  $F$  の  $x$  における微分係数である。つまり  $F'(x) = f(x)$  ということである。  $\square$

### 定理4.9

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は有界, Riemann積分可能,  $F$  は  $f$  の不定積分, i.e.  $F(x) = \int_a^x f(z) dz$  ( $x \in [a, b]$ ).

$\Rightarrow F$  は  $[a, b]$  上連続  $\square$

### 証明

$M := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty$  とおく。  $\forall x, y \in [a, b]$  に対して

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(z) dz - \int_a^x f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_a^y f(z) dz + \int_x^a f(z) dz \right| \quad (\because \text{定義4.5}) \\ &= \left| \int_x^y f(z) dz \right| \quad (\because \text{区間加法の性質, 定理4.5}) \\ &\leq \left| \int_x^y |f(z)| dz \right| \quad (\because \text{積分の三角不等式}) \\ &\leq M |y - x| \quad (\because |f(x)| \leq M \text{ と順序保存性, 定理4.6}) \\ &\rightarrow 0 \quad (y \rightarrow x) \end{aligned}$$

だから  $F(y) \rightarrow F(x)$  ( $y \rightarrow x$ ) となる。従って  $F$  は  $x$  で連続となり,  $x \in [a, b]$  は任意より  $F$  は  $[a, b]$  上連続となる。  $\square$

定理4.10 (微分積分学の基本定理 その1)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は  $[a, b]$  上連続,  $F$  は  $f$  の不定積分 i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz \quad (x \in [a, b]).$$

$$\Rightarrow \forall x \in (a, b) \text{ に対し } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad \square$$

<定理4.10 のイミ>

① 連続関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $(a, b)$  上で定義された原始関数  $\int f(x) dx$  が存在する。しかもそれは不定積分  $\int_a^x f(z) dz$  と等しい。つまり

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(z) dz \right) = f(x) \quad (x \in (a, b))$$

あとで  
fが

とある。高校教科書では「微分すると  $f(x)$  になる関数を  $f(x)$  の不定積分 または原始関数という」とあるが,  $f$  が連続でないとき不定積分と原始関数と同じものとはみなせない。

② 連続関数の不定積分は端点を除いて微分可能になる。つまり、不定積分はもとの関数より滑らかになることがわかる。

証明

$\forall \varepsilon > 0$  に対して  $f$  が  $x$  で連続なので,  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall z \in [a, b]$  に対し

$$|z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

とできる。そこで,  $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対し,  $0 < |h| < \delta$  ならば

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z) dz - f(x) \right|$$

( $\because$  区間加法の生  
定理4.5)



$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(z) - f(x)) dz \right| \left( \because \int_x^{x+h} f(x) dz = f(x)h \right) \\
&\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(z) - f(x)| dz \right| \left( \because \text{積分の} \right. \\
&\quad \left. \equiv \text{不等式} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|h|} \left| \int_x^{x+h} dz \right| \left( \because (*) \text{ と} \right. \\
&\quad \left. \text{順序保真性 定理 4.6} \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

すなわち  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$  となるので

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow f(x) \quad (h \rightarrow 0)$$

となる。

□

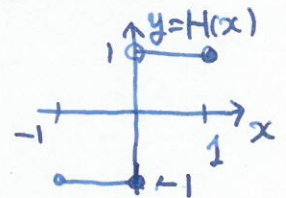
#### 注意 4.4

定理 4.10 は  $f$  が連続でないとは成り立たない。

(反例)  $H: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $H(x) := \begin{cases} -1 & (-1 \leq x < 0) \\ 1 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

により定めると  $H$  は  $x=0$  で連続ではない。

$$\int_{-1}^x H(z) dz = \begin{cases} -\int_{-1}^x dz = -1 - x & (-1 \leq x < 0) \\ -\int_{-1}^0 dz + \int_0^x dx = -1 + x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$



すなわち

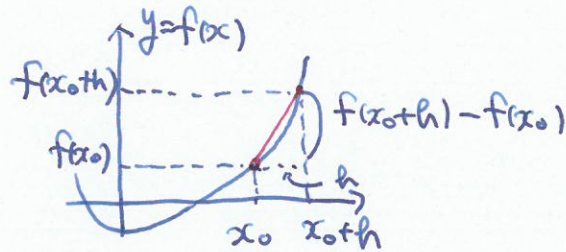
$$\int_{-1}^x H(z) dz = -1 + |x| \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

である。よって  $H$  の不定積分は  $x=0$  で微分できないことがわかる。

□

# 第5章 微分

## §5.1 微分とその性質



$0 < |h| < 1$  に対し

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

はグラフ  $y=f(x)$  の  $x=x_0$  での接線の傾きの近似.

### 定義 5.1 (微分)

$x_0 \in (a, b)$  に対し,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  が  $x=x_0$  で **微分可能**

$\Leftrightarrow$  **定義**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  が 存在する.

このとき  $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  とかき,  $f$  の  $x_0$  における **微分係数** という.

$f$  が  $(a, b)$  上 **微分可能**

$\Leftrightarrow$  **定義**  $f$  は  $\forall x \in (a, b)$  について **微分可能**.

このとき,  $x \in (a, b)$  に対して,  $\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$  とかく.

$\frac{df}{dx}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f$  の **導関数** という □

以下  $I \subset \mathbb{R}$  に対し

$C(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \text{ 上連続}\},$

$C'(a, b) := \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ は } (a, b) \text{ 上微分可能},$   
 $\frac{df}{dx} \in C(a, b) (= C((a, b)))\}$

とかく,

$\leftarrow \frac{df}{dx}$  は  $(a, b)$  上連続



<微分と接線>

$f \in C^1(a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$  に対して

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad (x \in (a, b))$$

と置く。このとき,

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\textcircled{2}} + R(x)(x - x_0)$$

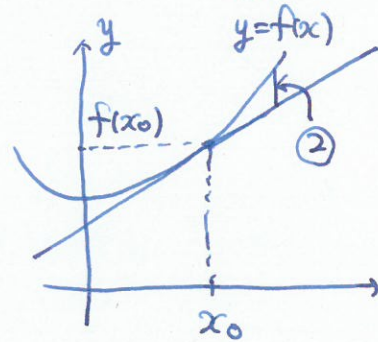
となるが  $x \rightarrow x_0$  とすると

$R(x) \rightarrow 0$  がわかる。

① グラフ  $y=f(x)$  の  $x=x_0$  での接線

②  $(x-x_0)$  より速く  $0$  に近づく。

←  $x-x_0$  より速く  $0$  に収束する。



定理 5.1

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$

$f$  が  $x=x_0$  で微分可能

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$  s.t.  $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$

同値

と書いたときに、 $R(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ) となる。

さらにこのとき、 $\lambda = f'(x_0)$  となる。 □

証明

( $\Rightarrow$ )  $\lambda = f'(x_0)$  とおくと、 $x \neq x_0$  に対して

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

となるから、微分の定義より  $R(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ) となる。

( $\Leftarrow$ )  $R(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ) より

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| = |R(x)| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)$$

すなわち  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \lambda$  ( $x \rightarrow x_0$ ) となるので

$f$  は  $x_0$  で微分可能で  $f'(x_0) = \lambda$  となる。  $\square$

### 系5.1

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  が  $x_0 \in (a, b)$  で微分可能

$\Rightarrow f$  は  $x_0$  で連続。  $\square$

### 証明

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$  とかくと  
定理5.1 より  $R(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow x_0$ ) となる。 したがって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)| \\ &\leq |f'(x_0)| |x - x_0| + |R(x)| |x - x_0| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &\quad \rightarrow 0 \quad \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow 0 \\ &\quad \quad \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

となるから、 $f$  は  $x_0$  で連続となる。  $\square$

<微分の公式>

### 定理5.2

$f, g \in C^1(a, b)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$

(1)  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2)  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(3) (積の微分公式)

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$\square$



### 注意5.1

定理5.2 (1), (2)より微分は線形である。 □

### 証明

(3)のみを示す。  $x \in (a, b)$  に対し

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

より

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0) \quad \downarrow \quad g(x_0) \quad (= \text{系5.1}) \quad \rightarrow g'(x_0) \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

となる。 □

### 定理5.3 (合成関数の微分公式, Chain rule)

$f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = g(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  上微分可能

←「 $f$ の変数は  $x$  とする」の位。

$$\Rightarrow \frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0)) \frac{df}{dx}(x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

□

### 注意5.2

定理5.3は  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$  とおくと形式的に

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{とわかる。}$$

□

### 定理5.3の証明

$x_0 \in \mathbb{R}$  に対し

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_f(x)(x - x_0) \quad (*)$$

$$g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + R_g(y)(y - f(x_0)) \quad (**)$$

とかくと定理5.1より

$$R_f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0), \quad R_g(y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow f(x_0))$$

となる.  $(**) \text{ で } y=f(x) \text{ とおくと}$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + R_g(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

よ)  $(*)$  を代入して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x_0) + g'(f(x_0)) f'(x_0)(x - x_0) \\ + (g'(f(x_0)) R_f(x) + R_g(f(x))(f'(x_0) + R_f(x)))(x - x_0)$$

となる.  $== \text{て}$

$$g'(f(x_0)) R_f(x) + R_g(f(x))(f'(x_0) + R_f(x)) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)$$

$\rightarrow 0 \quad \downarrow \begin{matrix} f(x_0) \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \rightarrow 0$

となるから. 定理 5.1 により  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$  となる.  $\square$

### 例 5.1

$$x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \square$$

証明 (高校では対数微分法で示す本質的に同じ)

$$x^\alpha = \exp(\log x^\alpha) = \exp(\alpha \log x)$$

よ)  $g(y) := e^y, f(x) := \alpha \log x$  とおけば

$$x^\alpha = e^{f(x)} = g(f(x)), \quad g'(y) = e^y, \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x}$$

よ) から.

$$(x^\alpha)' = g'(f(x)) f'(x) \\ = \exp(\alpha \log x) \left( \frac{\alpha}{x} \right) \\ = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

となる.  $\square$



### 定理5.4 (逆関数の微分公式)

$f: (a, b) \rightarrow (c, d)$  全単射, 微分可能,  $x_0 \in (a, b)$ .

$f'(x_0) \neq 0$ ,  $y_0 := f(x_0)$

$\Rightarrow f^{-1}$  は  $y_0$  で微分可能であり  $\frac{d(f^{-1})}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$   $\square$

### 注意5.3

定理5.4は  $y = f(x)$  とかくと形式的に  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$  となる.  $\square$

### 注意5.4

$f^{-1}$  が  $y_0$  で微分可能であることがわかれば,  $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$  で  $x = x_0$  の微分係数を考えれば, 合成関数の微分公式より

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(f(x_0)) \frac{df}{dx}(x_0) = 1.$$

となるので  $\frac{d(f^{-1})}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$  がわかる.  $\square$

### 定理5.4の証明

$y \in (c, d)$  に対し,  $y = f(x)$  となる  $x \in (a, b)$  をとる.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

となす.  $y \rightarrow y_0$  となすと  $f(x) \rightarrow y_0 = f(x_0)$  となるから.

$x \rightarrow x_0$  となる(厳密には背理法で示す). 従って  $f'(x_0) \neq 0$  より

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y \rightarrow y_0)$$

がわかる.  $\square$

### 定理5.5 (パラメータ微分)

$\varphi, \psi \in C^1(a, b)$ ,  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ .  $\varphi$ が狭義単調増加  
(つまり  $t < t' \Rightarrow \varphi(t) < \varphi(t')$ ),  $x_0 = \varphi(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

□

### 注意5.5

定理5.5は形式的に  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$  とかける。

□

### 証明

$\varphi$ が狭義単調増加なので  $\varphi^{-1}(x) = t$  とかける。よって  
 $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$  となるので合成関数・逆関数の微分公式  
を用いればよい。 □  
これらの具体的計算は高校で習っているはず。

### § 5.2 平均値定理

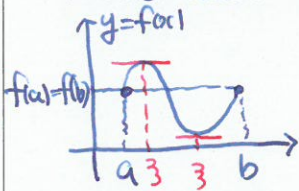
#### 定理5.6 (Rolleの定理)

$f \in C([a, b]) \cap C'(a, b)$ ,  $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) \text{ s.t. } f'(\xi) = 0$$

□

<Rolleの定理の例>



$f(a) = f(b) = 0$  なら、左図のように  
“接線の傾き” = 0 となる点  
があること。

#### 定理5.6の証明

$f$ が定数関数のときは  $\forall x \in (a, b)$  に対して  $f'(x) = 0$  となるから、  
 $\xi$  とせば  $\xi = \frac{a+b}{2}$  とすればよい。以下  $f$ は定数関数でないとする。



1.  $\exists c \in (a, b)$  s.t.  $f(a) < f(c)$  となる場合を考える。このとき、 $f$  は  $[a, b]$  上連続なので定理 2.9 (Weierstrass の定理) より  $\exists \xi \in [a, b]$  s.t.  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\xi)$  となるが、 $f(a) = f(b)$  かつ  $f(a) < f(c) \leq f(\xi)$  より  $\xi \neq a, \xi \neq b$  となる。

2.  $f'(\xi) \leq 0$  を示す。  $\xi < \forall x < b$  に対して

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \quad (\because x - \xi > 0, f(x) - f(\xi) \leq 0)$$

より  $x \rightarrow \xi + 0$  とすると  $f'(\xi) \leq 0$  となる。

3.  $f'(\xi) \geq 0$  を示す。  $a < \forall x < \xi$  に対して

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad (\because x - \xi < 0, f(x) - f(\xi) \leq 0)$$

より  $x \rightarrow \xi - 0$  とすると  $f'(\xi) \geq 0$  となる。 2, 3. より

$f'(\xi) = 0$  がわかる。

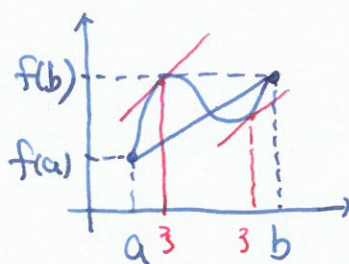
4.  $\exists c \in (a, b)$  s.t.  $f(a) > f(c)$  のときも同様に示す  $\square$

定理 5.7 (微分平均値定理)

$$f \in C([a, b]) \cap C'(a, b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$\square$

<平均値定理の図>



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  は左の斜め線の傾き。

これと同じ傾きを接線にもつ点  $\xi$  が

$(a, b)$  内にあるということ。

証明

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x \in [a, b]$  に対して

$$\varphi(x) := f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)$$

と定めると,  $\varphi \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$  かつ,

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる. Rolle の定理 (定理 5.6) より  $\exists \xi \in (a, b)$  s.t.

$$\varphi'(\xi) = 0 \text{ となるので } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ となる.} \quad \square$$

< 微積分の基本定理 >

定理 5.8 (微積分の基本定理 その2)

$f \in C([a, b]) \cap C^1(a, b)$ ,  $\frac{df}{dx} \in C([a, b])$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{df}{dx}(x) dx = f(b) - f(a) \quad \square$$

証明

$\Delta = \{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  の分割とすると,  $1 \leq k \leq n$  に対して

微分平均値定理 (定理 5.7) より,  $x_{k-1} < \exists \xi_k < x_k$  s.t.

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

とできるので,  $k=1$  から和をとると

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

となる.  $\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x) \leq f'(\xi_k) \leq \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'(x)$  より

$$s_{\Delta}(f) \leq f(b) - f(a) \leq S_{\Delta}(f):$$



だから 分割  $\Delta$  についてそれぞれ上限, 下限  $\varepsilon$  とすると

$$\int_a^b f(x) dx \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^b f(x) dx$$

となる.  $f' = \frac{df}{dx}$  は  $[a, b]$  上連続だから Riemann 積分可能であり (定理 4.2)

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x) dx = f(b) - f(a)$$

がわかる. □

### 微積分の基本定理

$f \in C(a, b)$  とする.

(1)  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を

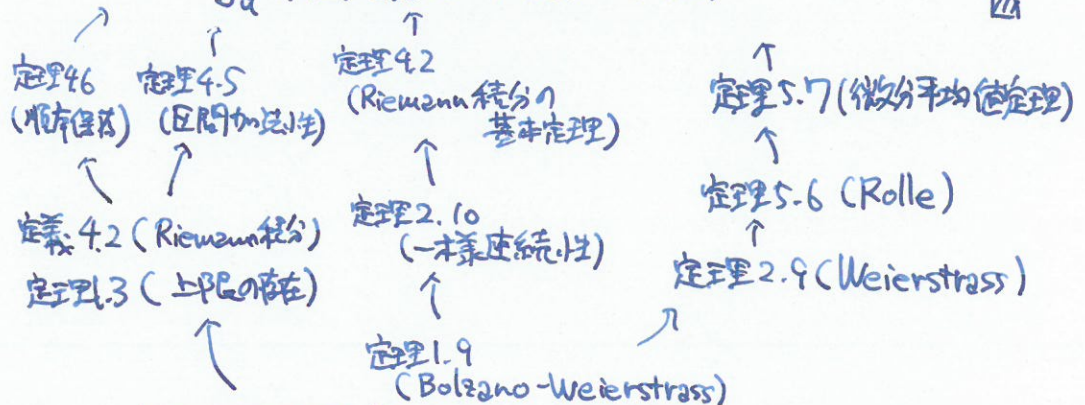
$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

と定めると,  $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$  ( $x \in (a, b)$ ) が成り立つ. つまり

$f$  の **原始関数** が存在する.

(2)  $F \in f$  の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



$\mathbb{R}$ とは何か?

(途中甘ボリまわっている)

<平均値定理の応用>

系5.2

$$f \in C^1(a, b)$$

$f$ が $(a, b)$ 上単調増加  $\Leftrightarrow$   $\forall x \in (a, b)$  に対し  $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$  □

証明

( $\Rightarrow$ )  $\forall x \in (a, b)$  と  $h > 0$  に対し  $f(x+h) - f(x) \geq 0$  となるから

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

( $\Leftarrow$ )  $\forall x, x' \in (a, b)$  に対し  $x < x'$  ならば平均値定理(定理5.1)と仮定より  $x < \xi < x'$  s.t.

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(\xi) \geq 0$$

となるから  $f(x') \geq f(x)$  となる。 □

系5.3

$$f \in C^1(a, b)$$

$f$ が定数関数, すなわち  $\exists c \in \mathbb{R}$  s.t.  $\forall x \in (a, b)$  に対し  $f(x) = c$

$\Leftrightarrow$   $\forall x \in (a, b)$  に対し  $\frac{df}{dx}(x) = 0$  □

証明

( $\Rightarrow$ ) は各自考えよ. ( $\Leftarrow$ ) を示す. 系5.2より  $f$ は単調増加かつ単調減少になるので,  $\forall x, x' \in (a, b)$  に対し  $x < x'$  ならば

$$f(x) \leq f(x') \quad \text{かつ} \quad f(x) \geq f(x')$$

となる. 従って  $f(x) = f(x')$  となる。 □



## <極大・極小>

### 定義 5.2 (極大, 極小)

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \in (a, b)$$

$f$  が  $x=c$  で **極大** (極小)

$\Leftrightarrow$   $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$  に対し

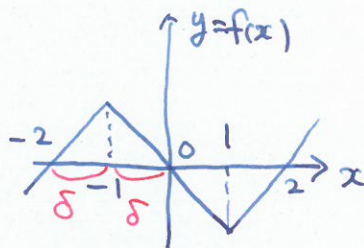
$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

□

### 例 5.2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x+2 & (-\infty < x \leq -1) \\ -x & (-1 \leq x \leq 1) \\ x-2 & (1 \leq x < \infty) \end{cases}$$



よって,  $f$  は  $x=-1$  ( $x=1$ ) で **極大** (極小) となる

□

### 証明

極大のみを示す. 極小は各自考えよ.

$\delta=1$  とおくと,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  に対し  $0 < |x+1| < \delta=1$

ならば,  $-2 < x < -1$  または  $-1 < x < 0$  である

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 < x < -1) \\ -x & (-1 < x < 0) \end{cases} < 1 = f(-1)$$

よって  $f$  は  $x=-1$  で **極大** となる ( $0 < \delta < 4$  である)

$\delta$  はどれをえらんでもよい )

□

極大・極小はもともと微分とは関係ない。しかし、微分でき  
れば、次のわけが判り判定法がある。

### 定理 5.9

$f \in C^1(a, b)$  (または  $c \in (a, b)$ ) で極大 (or 極小)

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

□

### 証明

$f$  が  $x=c$  で極大のときを示す。定義でとれる  $\delta > 0$   
に対して、 $0 < h < \delta$  ならば  $f(c+h) < f(c)$  だから  
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$
 となるので  $h \rightarrow +0$  として

$f'(c) \leq 0$  がわかる。他方、 $-\delta < h < 0$  ならば  
 $f(c+h) < f(c)$  だから 
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$
 となる

ので  $h \rightarrow -0$  として  $f'(c) \geq 0$  がわかる。

よって  $f'(c) = 0$  となる。

□

### 定理 5.10 (極大・極小・判定)

$f \in C^1(a, b)$ ,  $c \in (a, b)$

<仮定>

$\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in (a, b)$  に対して

$$c - \delta < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$c < x < c + \delta \Rightarrow f'(x) < 0$$

<結論>

$f$  は  $x=c$  で極大。

□



## 証明

$\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$  に対し,  $0 < |x - c| < \delta$  を仮定す.

1.  $c - \delta < x < c$  ならば平均値定理より  $x < \xi_1 < c$  s.t.

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(\xi_1) > 0 \quad \text{とよぶから, } f(x) < f(c) \text{ とよぶ.}$$

2.  $c < x < c + \delta$  ならば, 平均値定理より  $c < \xi_2 < x$  s.t.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_2) < 0 \quad \text{とよぶから } f(x) < f(c) \text{ とよぶ.}$$

よってこの場合も  $f(x) < f(c)$  とよぶので  $f$  は  $x = c$  で極大となる。

□

## <微積分の基本定理の応用>

### 定理 5.11

$$f \in C([a, b]) \cap C'(a, b), \quad \frac{df}{dx} \in C([a, b])$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = \left( \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb + (1-t)a) dt \right) (b - a)$$

□

## 証明

$tb + (1-t)a$  は  $t=0, 1$  を代入するとそれぞれ  $a, b$  となることに注意しておく.  $f(tb + (1-t)a)$  を  $t$  について微分すると

合成関数の微分公式により

$$\frac{d}{dt} (f(tb + (1-t)a)) = \frac{df}{dx} (tb + (1-t)a) (b - a)$$

となる. 両辺  $0 \leq t \leq 1$  で積分すると

$$\text{(左辺)} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tb + (1-t)a)) dt = [f(tb + (1-t)a)]_0^1 = f(b) - f(a)$$

$$(右辺) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a)(b-a) dt = \left( \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) dt \right) (b-a)$$

$$\text{よ) } f(b) - f(a) = \left( \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) dt \right) (b-a) \text{ が得られる}$$

□

定理5.11で  $\int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) dt$  に積分平均値定理(定理4.8)

を用いると  $0 \leq t_0 \leq 1$  s.t.  $\frac{df}{dx}(tb_0+(1-t_0)a) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) dt$

となるので  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{df}{dx}(tb_0+(1-t_0)a)$ . つまり微分平均値

定理(定理5.7)が得られる. 定理5.11は定理5.7より仮定が強いが, 応用上はこれで十分なことが多い.

定理5.12

$$f \in C([a, b]) \cap C'(a, b), \frac{df}{dx} \in C([a, b]).$$

← 実は  $\frac{df}{dx}$  は  $(a, b)$  上有界

よ) 十分

$$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right| |b - a|$$

□

証明

定理5.11 よ)

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_0^1 \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) dt \right| |b-a|$$

$$\leq \int_0^1 \left| \frac{df}{dx}(tb+(1-t)a) \right| dt |b-a| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\leq \int_0^1 \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right| dt |b-a| \quad (\because \text{順序保存性})$$

$$= \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right| |b-a|$$

□



### §5.3 高階導関数とTaylorの定理

#### 定義5.3

$f \in C^1(a, b)$  の導関数  $\frac{df}{dx}$  が  $x_0 \in (a, b)$  で微分可能なとき、

$$f''(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{df}{dx}(x) - \frac{df}{dx}(x_0)}{x - x_0}$$

とかく、 $f''(x_0)$  を  $f$  の  $x_0$  における **第2次微分係数** という。  
また  $\frac{df}{dx}$  が  $(a, b)$  上微分可能なとき、

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) := f''(x) \quad (x \in (a, b))$$

とかく、 $\frac{d^2f}{dx^2}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f$  の **2階導関数** という。四

3次微分係数、3階導関数 etc... も同様に定義する。

以下  $n \in \mathbb{N}$  に対し

$$C^n(a, b) := \left\{ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ は } (a, b) \text{ 上 } n \text{ 回微分可能, } \frac{d^n f}{dx^n} \in C(a, b) \right\}$$

とかく、

$\frac{d^n f}{dx^n}$  が  $(a, b)$  上連続

#### 例5.3

$n \in \mathbb{N}$  に対し、 $\frac{d^n(\arcsin)}{dx^n}(0)$  を求める。  $x \in (-1, 1)$  に対し

$$\frac{d(\arcsin)}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

よ)

$$\frac{d^2(\arcsin)}{dx^2}(x) = \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} \frac{d(\arcsin)}{dx}(x)$$

$$\text{だから } f := \arcsin \text{ とおくと } (1-x^2) \frac{d^2f}{dx^2}(x) = x \frac{df}{dx}(x)$$

となる. 両辺を  $n$  回微分すると

$$(\text{左辺}) = (1-x^2) \frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) - 2nx \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) - n(n-1) \frac{d^n f}{dx^n}(x),$$

$$(\text{右辺}) = x \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + n \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

となるから,  $x=0$  を代入すると

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) - n(n-1) \frac{d^n f}{dx^n}(0) = n \frac{d^n f}{dx^n}(0),$$

$$\text{すなわち } \frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(0) = n^2 \frac{d^n f}{dx^n}(0) \text{ となる. } f(0)=0, \frac{df}{dx}(0)=1$$

より漸化式  $a_n = n^2 a_{n-2}$ .  $m \in \mathbb{N}$  として

$$\frac{d^{2m}f}{dx^{2m}}(0) = 0, \quad \frac{d^{2m+1}f}{dx^{2m+1}}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2$$

が得られる. □

定理 5.13 (Taylor の定理)

$$n \in \mathbb{N}, f \in C^n(a, b), \frac{d^k f}{dx^k} \in C([a, b]) \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

$$\text{と書いたときに, } a < \theta < b \text{ s.t. } R_n = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n \text{ となる.}$$

注意 5.6 □

定理 5.13 で  $n=1$  とすると,  $a < \theta < b$  s.t.

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$$

となる. これは微分平均値定理 (定理 5.7) である. □



### 定理5.13の証明

$n=2$ で示す.  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  と

$$\varphi(x) := f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + (f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)) \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}$$

$(x \in [a, b])$

とあくと.  $\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)$ ,  $\varphi \in C^1(a, b) \cap C([a, b])$  と

なるから. Rolleの定理 (定理5.6) より.  $a < \theta < b$  s.t.  $\varphi'(\theta) = 0$

とあす. 一方

$$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'(x)}{1!} - 2(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)) \frac{b-x}{(b-a)^2}$$

とあすから

$$0 = \varphi'(\theta) = \frac{f''(\theta)}{1!}(b-\theta) - \frac{f'(\theta)}{1!} - 2(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)) \frac{b-\theta}{(b-a)^2}$$

より

$$\frac{f''(\theta)}{2!}(b-a)^2 = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a)$$

がわかった. □

### 定理5.14 (Taylor-Maclaurin展開)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^n(-1, 1)$ ,  $x \in (-1, 1)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)x^n$$

$$\Rightarrow R_n(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad \square$$

### 証明

$\forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  に対して. Taylorの定理から.  $0 < |\theta_x| < |x|$

とあす  $\theta_x \in \mathbb{R}$  があす

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}x^n$$

とできる。ここで、 $x \rightarrow 0$  とすると  $\theta_x \rightarrow 0$  とできる。よって

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0))x^n$$

から、

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\theta_x) - f^{(n)}(0)) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

とできる。 □

例 5.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \quad \square$$

証明

Taylor-Maclaurin 展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3$$

を考慮して、 $R_3(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ )。よって

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x)x^3)}{x^3} \\ &= \frac{1}{6} - R_3(x) \rightarrow \frac{1}{6} \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned} \quad \square$$



例 5.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x - \sin x} = 2$$

□

証明

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \quad (\log(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad (\log(1+x))''' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

よ)

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \log(1) + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + R_3(x)x^3 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)x^3 \end{aligned}$$

と Taylor-Maclaurin 展開 すると  $R_3(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ )。

他方

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3'(x)x^3$$

と Taylor-Maclaurin 展開 すると  $R_3'(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ )。

従って

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x - \sin x} &= \frac{(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3'(x)x^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + R_3(x)}{\frac{1}{6} - R_3'(x)} \rightarrow 2 \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となる。

□

### §5.4 de l'Hospital の定理

#### 例 5.6

$f, g \in C^1(-1, 1)$ ,  $f(0) = g(0) = 0$ ,  $g'(0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

□

#### 証明

Taylor-Maclaurin 展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_f(x)x, \quad g(x) = g(0) + g'(0)x + R_g(x)x$$

と考えると  $R_f(x), R_g(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) となる。従って

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(0) + f'(0)x + R_f(x)x}{g(0) + g'(0)x + R_g(x)x} \\ &= \frac{f'(0) + R_f(x)}{g'(0) + R_g(x)} \quad (\because f(0) = g(0) = 0) \\ &\rightarrow \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

□

例 5.6 の (1)  $f(0) = g(0) = 0$ , つまり  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  が不定形ならば

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

とならなければならない。このことが正しいことを主張するのが de l'Hospital の定理である。

定理 5.15 (de l'Hospital の定理)

$a \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$

(1)  $f(x), g(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow a$ ) ← 不定形の条件

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$



(2)  $f(x), g(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow a$ ) ← 不定形の条件

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \square$$

標語的にいって、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  が不定形ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{と成る.}$$

例 5.7

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$  は de l'Hospital の定理を用いて示す.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad (\because \frac{0}{0} \text{ の不定形})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \quad (\because \frac{0}{0} \text{ の不定形})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \quad (\because \frac{0}{0} \text{ の不定形})$$

$$= \frac{1}{6} \quad \square$$

注意 5.7

例 5.7 で  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{0}$  とはいけなない.

de l'Hospital の定理は極限が極限が不定形のときしか使えない.

例 5.8

$\lim_{x \downarrow 0} x^x = 1$  を示す.  $x^x = \exp(x \log x)$  より

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} x^x &= \lim_{x \downarrow 0} \exp(x \log x) = \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} (x \log x)\right) \quad (\because \exp \text{ は連続}) \\ &= \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right) \quad (\because \frac{\infty}{\infty} \text{ の不定形}) \\ &= \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} (-x)\right) = 1. \end{aligned}$$

とたす。

定理5.15 (de l'Hospitalの定理)の証明はweb 1-1を参照せよ。

### §5.5 凸関数

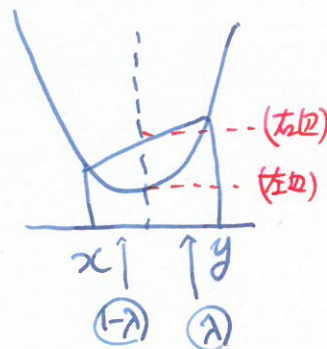
#### 定義5.4 (凸関数)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が  $[a, b]$  上凸関数

$\Leftrightarrow \forall x, y \in [a, b], 0 < \lambda < 1$  に対し

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

□



#### 定理5.16

$$f \in C([a, b]) \cap C'(a, b),$$

$f$  が  $[a, b]$  上凸関数  $\Leftrightarrow \frac{df}{dx}$  が  $(a, b)$  上単調増加

□

#### 系5.4

$$f \in C([a, b]) \cap C^2(a, b)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0 \Rightarrow f \text{ は } [a, b] \text{ 上凸関数}$$

□



( $\Leftarrow$ )  $\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0$  ならば  $\frac{df}{dx}$  は  $(a, b)$  上 単調増加となる。

定理 5.16 を用いればよい。  $\square$

### 定理 5.16 の証明

( $\Leftarrow$ ) のを示す。  $x, y \in (a, b)$  が  $x < y$  ならば  $0 < \lambda < 1$  に  
対して

$$\begin{aligned} & \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \overset{(\lambda+(1-\lambda))}{f(\lambda x + (1-\lambda)y)} \\ &= \lambda (f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)) + (1-\lambda) (f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &= \lambda f'(\theta_1) (x - (\lambda x + (1-\lambda)y)) + (1-\lambda) f'(\theta_2) (y - (\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ & \quad (x < \theta_1 < \lambda x + (1-\lambda)y < \theta_2 < y) \quad (\because \text{平均値定理}) \\ &= \lambda(1-\lambda) (f'(\theta_1)(x-y) + f'(\theta_2)(y-x)) \\ &= \lambda(1-\lambda) (y-x) \underbrace{(f'(\theta_2) - f'(\theta_1))}_{\geq 0} \geq 0 \quad (\because \frac{df}{dx} \text{ は単調増加}) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) < f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

がわかる。  $x > y$  のときは同様に計算すればよい  $\square$

### 例 5.9

$p > 1$  に対して  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := x^p$  ( $x \in [0, \infty)$ ) と

定めると、  $x > 0$  に対して

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0 \quad (\because p, p-1 \geq 0)$$

よって、系 5.4 より  $f$  は  $[0, \infty)$  上凸関数である。

従って、 $a, b > 0$  と  $0 < \lambda < 1$  に対して

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^p \leq \lambda a^p + (1-\lambda)b^p$$

が成り立つ。とくに  $\lambda = \frac{1}{2}$  とすると  $1-\lambda = \frac{1}{2}$  より

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$$

よって  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$  が得られる。

これから、数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p < \infty \text{ ならば } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p < \infty$$

よってこれがわかる。実際  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|a_n + b_n|^p \leq (|a_n| + |b_n|)^p \leq 2^{p-1}(|a_n|^p + |b_n|^p)$$

より

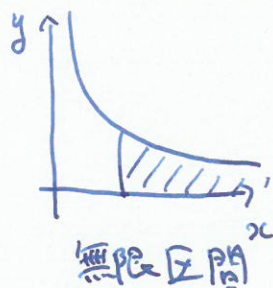
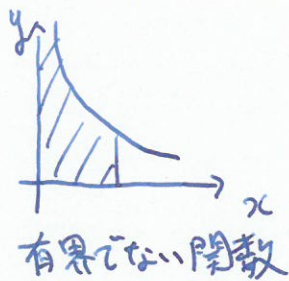
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \leq 2^{p-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right) < \infty$$

がわかる。





## 第6章 広義積分



どうやって積分(面積)

を定義するのが妥当か?

### §6.1 広義積分

#### 例6.1

$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$  ( $x \in (0, 1]$ ) で定めるとき,

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  をどう定めればよいか? を考える.

$x=0$  で  $f(x)$  は定義できない (発散) ことに注意せよ.

しかし、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  は定まるから

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

と定めるのが一つの方法だろう.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

よって

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 2$$

とすればよいだろう. □

このアイデアを一般化する.

### 定義6.1 (広義積分)

$f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は  $(a, b]$  上連続とする。このとき、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

と定義する。  $\int_a^b f(x) dx$  を **広義積分** といい、極限が存在するとき、  $\int_a^b f(x) dx$  は **収束する** という。極限が存在しないとき、  $\int_a^b f(x) dx$  は **発散する** という。  $\square$

### 例6.2

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  を求める。  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  は  $x=0$  で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

と2つに分けて広義積分を求めなければいけない。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 \quad (\text{各自})$$

$$\text{よ} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4 \text{ となる。} \quad \square$$

### 例6.3

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  は発散する。

### 証明

$\frac{1}{x}$  は  $x=0$  で定義できないから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

と2つに分ける。



$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} [\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon_1} = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0} \log \varepsilon_1 = -\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} [\log|x|]_{\varepsilon_2}^1 = \lim_{\varepsilon_2 \downarrow 0} (-\log \varepsilon_2) = +\infty$$

となし。それぞれの広義積分は収束しない。  $\square$

### 注意 6.1

例 6.3 で正しいようにみえる次の計算は正しくない

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = [\log|x|]_{-1}^1 = \log|1| - \log|-1| = 0$$

( $x=0$  で  $\frac{1}{x}$  が定義できないことを認識していない)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

(2つの広義積分を同じ  $\varepsilon$  で表している)

### 例 6.4

$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) := \frac{1}{x^2}$  ( $x \in [1, \infty)$ ) で定めるとき、

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

をどう定めればよいか? を考えよ。

$\forall M > 1$  に対し  $\int_1^M \frac{1}{x^2} dx$  は定まるから

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$$

と定めるのが一つの方法であらう。

$$\int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \int_1^M x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^M = 1 - M^{-1} = 1 - \frac{1}{M}$$

よし)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{M} \right) = 1$$

と定めればよいはず  $\square$

## 定義6.2 (広義積分)

$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は  $[a, \infty)$  上連続とする. このとき

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

で定義する.  $\int_a^\infty f(x) dx$  を **広義積分** といい. 極限が存在するとき,  $\int_a^\infty f(x) dx$  は **収束する** という. 極限が存在しないとき,  $\int_a^\infty f(x) dx$  は **発散する** という.  $\square$

$\alpha > 0$  に対し  $\frac{1}{x^\alpha}$  の広義積分は重要である.

## 定理6.1

$\alpha > 0$  に対して. 次の成り立つ.

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & (0 < \alpha < 1) \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty & (\alpha > 1) \\ \infty & (0 < \alpha \leq 1) \end{cases} \quad \square$$

証明は演習とする.  $\alpha = 1$  のときに注意せよ.

## 例6.5 (Gauss積分)

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  は収束する.  $\square$

## 証明

1.  $x \geq 0$  に対し  $e^{-x^2} \geq 0$  より  $\int_0^M e^{-x^2} dx$  は  $M > 0$  について単調増加である. 従って  $\int_0^M e^{-x^2} dx$  が  $M > 0$  について有界であることさえいえばよい.



2.  $\exists z > 1$  に対し,  $\exists e^{-z} \leq 1$  だから (各自), とくに  
 $z = x^2$  とし  $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$  ( $x > 1$ ) がわかる.

従って  $M > 1$  に対し

$$\begin{aligned}\int_1^M e^{-x^2} dx &\leq \int_1^M \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (\because \frac{1}{x^2} \geq 0) \\ &= 1 \quad (\because \text{定理 6.1})\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^M e^{-x^2} dx \\ &\leq 1 + 1 \quad (\because \text{第1項は } e^{-x^2} \leq 1 \text{ (恒)})\end{aligned}$$

よ)  $\int_0^M e^{-x^2} dx$  は  $M$  について有界となるので

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  は収束する. □

### 注意 6.2

実は  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  となる. この広義積分は, 偏差値などの確率・統計, 温度分布や濃度分布を表す微分方程式など, 様々な分野で関係のある積分である. なお, 不定積分  $\int_0^x e^{-y^2} dy$  は  $x$  の初等関数 (積分を含まない関数) でかくことはできないことが知られている. □

## §6.2 絶対収束と条件収束

以下、連続関数  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  のみを考える。このとき、

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{と} \quad \int_0^{\infty} f(x) dx$$

の収束・発散を調べる。

### 例6.6

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  に  $x \in [0, \infty)$  に対し、

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

とすると、 $f$  は  $[0, \infty)$  上連続となる。このとき、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  は収束し、 $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  は発散する。  $\square$

### 証明.

1.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  が収束することを示す。  $M, M' > 0$  に対し

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{M'} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_{M'}^M \frac{\sin x}{x} dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{x} (-\cos x) \right]_{M'}^M - \int_{M'}^M \frac{1}{x^2} \cos x dx \right| \quad (\because \text{部分積分}) \\ &\leq \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \left| \int_{M'}^M \frac{1}{x^2} dx \right| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &\leq 2 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} \right) \rightarrow 0 \quad (M, M' \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

だから、Cauchyの収束判定条件より  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx$  は存在する。すなわち  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  は収束する。



2.  $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  が発散することを示す.  $n \in \mathbb{N}$  に対し

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (\text{各回}) \end{aligned}$$

となる.  $l \in \mathbb{N}$  に対し,  $n = 2^l$  とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2 \times} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4 \times = 2^{3-1} \times} \\ &\quad + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^l} + \dots + \frac{1}{2^l}}_{2^{l-1} \times} \\ &= 1 + \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

となるので  $l \rightarrow \infty$  とおくと  $n \rightarrow \infty$  となる。

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} l \right) \rightarrow \infty \quad (l \rightarrow \infty)$$

だから  $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  は発散する. □

定義 6.3 (絶対収束, 条件収束)

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[0, \infty)$  上連続

(1)  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  が絶対収束  $\Leftrightarrow$   $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  が収束

(2)  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  が条件収束  $\Leftrightarrow$   $\int_0^{\infty} f(x) dx$  は収束するが絶対収束しない □

例 6.6 は条件収束の例である。  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x \, dx$  は絶対収束 (例 6.5 を参照)

### 定理 6.2

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[0, \infty)$  上連続.

$\int_0^{\infty} f(x) \, dx$  は絶対収束  $\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) \, dx$  は収束  $\square$

### 証明

$M, M' > 0$  に対し  $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$  は絶対収束するか?

$$\left| \int_0^M f(x) \, dx - \int_0^{M'} f(x) \, dx \right| = \left| \int_{M'}^M f(x) \, dx \right|$$
$$\leq \left| \int_{M'}^M |f(x)| \, dx \right| \quad (\because \text{三角不等式})$$

$$\rightarrow 0 \quad (M, M' \rightarrow \infty) \quad (\because \int_0^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty)$$

よって Cauchy の収束判定条件より  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f(x) \, dx$  は収束  $\square$

### 定理 6.3 (絶対収束の判定条件)

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[0, \infty)$  上連続

<仮定>

$\exists \lambda > 1, \exists K > 0$  s.t.  $\forall x \in [0, \infty)$  に対し  $x^\lambda |f(x)| \leq K$ .

<結論>

$\int_0^{\infty} f(x) \, dx$  は絶対収束  $\square$



### 証明

$M > 0$  に対し  $\int_0^M |f(x)| dx$  は単調増加 ( $\because |f(x)| \geq 0$ )  
だから,  $\int_0^M |f(x)| dx$  が  $M > 0$  について有界であることを  
いえばよい. 仮定より)

$$|f(x)| \leq \frac{k}{x^\lambda} \quad (\forall x \in [1, \infty))$$

だから,  $M \geq 1$  に対し

$$\begin{aligned} \int_1^M |f(x)| dx &\leq \int_1^M \frac{k}{x^\lambda} dx \leq \int_1^\infty \frac{k}{x^\lambda} dx \quad (\because \frac{1}{x^\lambda} \geq 0) \\ &= \frac{k}{\lambda-1} \quad (\because \text{定理 6.1}) \end{aligned}$$

だから,

$$\int_0^M |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^M |f(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{k}{\lambda-1}$$

に注意すれば  $\int_0^M |f(x)| dx$  は  $M > 0$  について有界となる.  $\square$

### 系 6.1

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[0, \infty)$  上連続,  $\lambda > 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x)$  が存在  $\Rightarrow \int_0^\infty f(x) dx$  は絶対収束  $\square$

☺  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x)$  が存在する  $\Rightarrow x^\lambda f(x)$  は  $[0, \infty)$  上有界となる.  
従って定理 6.3 の仮定を満たす.  $\square$

### 例 6.7

$s > 0$  に対し  $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束 (絶対収束)  $\square$

### 証明

1.  $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$  を考慮.  $0 < s < 1$  のとき,  $e^{-x} x^{s-1} \rightarrow \infty$  ( $x \downarrow 0$ )

である。  $0 < x \leq 1$  に対し  $e^{-x} \leq 1$ ,  $x^{s-1} \geq 0$  であり

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx \leq \int_0^1 x^{s-1} dx = \frac{1}{1-s} < \infty$$

だから  $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する。  $s \geq 1$  のとき,  $e^{-x} x^{s-1}$  は  $x \rightarrow 0$  で発散しない。 ( $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する)。

2.  $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  を考えよう。

$$x^2 (e^{-x} x^{s-1}) = e^{-x} x^{s+1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

より系 6.1 から  $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する。  $\square$

### 定義 6.4 ( $\Gamma$ -関数)

$s > 0$  に対し  $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  を  $\Gamma$ -関数という  $\square$

### 命題 6.1

$\Gamma$ -関数について次が成り立つ

$$(1) \Gamma(1) = 1. \quad (2) s > 0 \text{ に対し } \Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad \square$$

### 命題 6.1 (より)

$$\Gamma(1) = 1 = 0!, \quad \Gamma(2) = \Gamma(1+1) = \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3! \quad \dots$$

となるので

$$n \in \mathbb{N} \text{ に対し } \Gamma(n) = (n-1)!$$

がわかる。つまり、 $\Gamma$ -関数は階乗を  $(0, \infty)$  に拡張したものである。